

结合自适应网格的基于特征线方程的分离算法¹⁾

陈 炎²⁾ 曹树良 梁开洪 祝宝山

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 热能工程系, 北京 100084)

摘要 提出一种新的网格自适应方法: 在需要加密的网格单元中心加入新结点, 并对加密后的相邻三角形网格单元进行公共边变换, 构成新的网格单元. 与传统的在网格边界中点加入新结点的自适应方法相比, 新方法可以更加灵活地控制网格密度, 加密后的网格继承原先的网格质量不发生畸变, 并且算法编程简便, 容易实现. 将自适应网格生成方法和基于特征线方程的分离算法相结合, 对空腔内不可压缩黏性流动进行了计算. 在特征线方向上进行时间步离散, 动量方程求解过程中采用非增量型分离算法. 计算中, 把求解变量梯度值作为判定准则, 在变化剧烈的区域进行网格局部加密. 计算结果表明该组合算法有很好的计算精度, 并有效减少了计算时间和存储量.

关键词 自适应网格, h 方法, 特征线方程, 分离算法

中图分类号: O351.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2009)05-0666-05

引 言

为了提高流场计算的精度和效率, 需要在流场计算过程中尽量使计算域网格密度与所求解物理量的梯度相匹配. 采用自适应网格技术, 可以使相同计算精度下的网格数最少或可以降低网格单元的插值函数阶次, 从而可以达到减少计算机存储量和提高计算效率的目的^[1]. 目前自适应网格方法主要有: (1) 在需要改变网格密度的计算区域中重新生成网格的后置处理方法; (2) 在已有的网格基础上进行自适应处理的方法. 因为后置处理方法需要重新生成新网格, 计算量比较大, 且在数据传递过程中需要进行大量的插值运算, 引入映射误差, 因此一般采用在已有网格基础上进行自适应处理方法^[2].

在基础网格上进行自适应的方法包括: h 方法, 即改变网格单元的尺寸来减少误差; p 方法, 提高插值函数的阶次来减少误差; 组合 hp 方法^[3]. 在采用有限元方法求解流动问题时, 一般采用显式的时间格式, 高阶的网格单元并不是非常合适, 通常推荐采用 h 方法进行网格自适应.

1 研究内容

传统的 h 型网格自适应方法采用单元边界中点

加入新结点的方式, 方法直观但不能很好地控制网格密度和质量, 并且算法实现复杂. 本文提出了一种新的网格自适应方式, 采用单元中心加密的方法进行网格自适应. 与边界中点加入新结点的方法相比, 该方法可以更加灵活地控制网格密度, 算法实现简单, 加密后的网格具有很高的网格质量.

在流场计算方面, 本文采用基于特征线方程的分离 (CBS) 算法. 该算法由 Zienkiewicz 和 Codina^[4] 在 1995 年提出, 并认为是近十几年来采用有限元方法求解流动问题所取得的最重要的进展之一^[5]. 算法在时间域上采用特征线方法进行离散. 离散后的特征线方程可以推导得到对流稳定项, 有效避免传统有限元方法求解流体问题时对流项占优引起的求解振荡问题. 在动量方程的求解过程中采用非增量型分离算法进行求解, 离散后的方程自动满足 BB 条件. 压力和速度可以采用等阶次插值函数. 解决了传统有限元方法由于插值函数选择不当而引起压力场虚假振荡的问题. 与传统的有限元求解方法相比, 该方法在算法的稳定性和应用领域的广泛性方面都有较大的优势. 目前在流场计算的各个领域该算法都得到了迅速发展^[6], 而国内关于基于特征线方程的分离算法研究尚处于起步阶段.

最后, 本文将中心加密的自适应的网格技术与

2008-07-17 收到第 1 稿, 2008-10-23 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (50776052).

2) E-mail: yan-chen03@mails.tsinghua.edu.cn

基于特征线方程的分离算法相结合, 计算了空腔内不可压缩黏性流动并对该组合算法进行了性能评价。

2 自适应网络技术

2.1 边界中点加密的自适应网格生成方法

常见的自适应网格技术一般在网格单元边界中点加入新的节点, 其细化方式如图 1 所示。为保证加密后的网格质量, 边界中点加入节点的网格细化方式一般只能选择 4 倍的加密比例。该方法的优点是方法直观, 但因为加入新节点的边界同属于两个网格单元, 因此算法实现比较麻烦, 计算量较大。并且由于算法基于 4 倍的加密倍率, 在某些情况下会造成网格过密和数据量过大的情况。

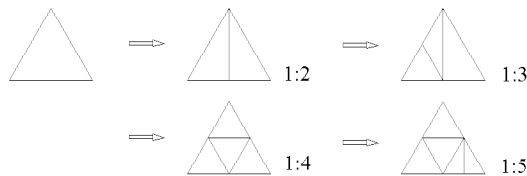


图 1 边界中点处加密自适应网格技术

Fig.1 Insert new point at the median technology

2.2 中心点加密的自适应网格生成方法

本文提出一种新的自适应网格方法, 该方法在需要加密的网格单元中心处加入一个新的节点, 并对新生成的相邻三角形网格进行公共边变化后得到新的细化网格。因为公共边变换容易实现, 因此算法的计算量很小。

这种算法的几何原理是: 在近似正三角形的三角形网格单元的中心加入一个新的结点, 则原先的正三角形被划分为 3 个近似钝角为 120° 的等腰三角形。两个相邻的 120° 等腰三角形经过公共边变换后可以得到两个近似正三角形, 如图 2 所示。

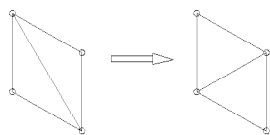


图 2 公共边变换

Fig.2 Change edge technology

中心点加密方法的优点是充分利用了已有的基础网格: 初始网格单元一般都接近于正三角形, 因此新加入的中心点在经过公共边变换后, 可以得到近似于正三角形的新网格单元。具体做法是对需要细化的网格区域内的三角形寻找其三角形中心, 连接三角形中心与各三角形节点, 形成初步细分网格

如图 3(b) 所示; 然后对形成的初步细分网格进行公共边变换, 得到最终的网格细化后的图形, 如图 3(c) 所示。

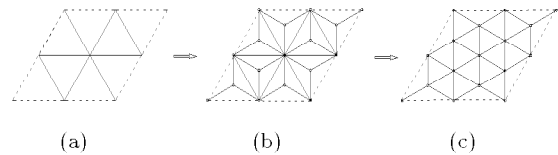


图 3 网格单元中心点加密实现过程

Fig.3 The process of grid refine using adding centre point

2.3 中心点加密的自适应网格算法实现

2.3.1 单次或多次细化算法的实现

在每次网格自适应操作中, 可以根据所求解单个物理量或多个物理量组合的梯度变化大小来决定网格细化的程度。在具体算法实现过程中可以添加一个数组来保存每个单元需要细化的程度量级。根据物理量的变化程度, 来决定网格需要细化的次数。本文的做法是:

(1) 数组中把不需要细化的网格单元的记值为 0, 一般的细化区域记为 1, 需要特别细化的区域记为 2 或更大的数字。

(2) 对初始网格单元进行扫描, 对数组中不等于 0 的网格单元进行加点细分操作, 并把数组值减 1。

(3) 重复第 2 步的扫描工作, 直到所有网格单元的数组值都等于 0。

(4) 最后对网格单元进行公共边变换得到最终细化的网格图形。

这个算法实现非常简单, 不需要额外的计算时间和复杂数据就可以根据物理量的计算结果实现计算区域网格不同细化程度的要求。

2.3.2 网格粗化和细化过程的实现

为了能够自动实现网格粗化和细化过程, 将新添加的节点数据放在原节点数组的尾端, 新建一个数组保存网格细化后的节点连接方式。这样就可以快速将细分后的单元恢复到原先粗化的网格结构。这种算法非常灵活, 实现过程中几乎不需要占用计算时间, 并且不用采用复杂的数据结构。

2.3.3 Laplace 光顺处理

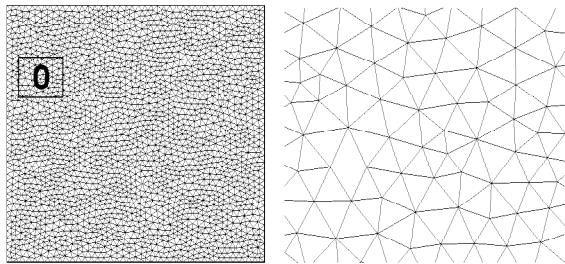
网格加密结束之后, 可以采用 Laplace 算法进行光顺化处理, 记

$$(x_i, y_i)^{\text{new}} = (x_i, y_i)^{\text{old}} + \frac{\omega}{n} \sum_{k=1}^n [(x_k, y_k) - (x_i, y_i)] \quad (1)$$

其中 (x_i, y_i) 为被光顺的网格点, (x_k, y_k) 为共享该点的所有三角形顶点坐标, n 为共享该点的三角形顶点个数, ω 为松弛因子. 经过 Laplace 光顺化处理后的局部加密网格与原网格之间能够更加平稳过渡, 且网格更加均匀.

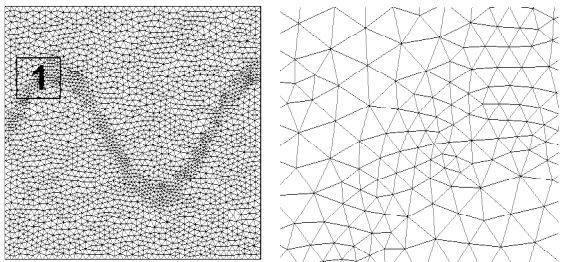
2.4 中心点加密的自适应网格生成算法性能评价

从图 3 中可以得出中心加密的网格细化方法可以很好地继承原先的网格质量, 并可以较好地实现最小 3 倍加密比例, 有较大的灵活性. 本文采用三角形单元的内接圆与外接圆半径的比值 K 来度量网格单元的质量. 当单元为正三角形时, $K = 0.5$. 定义 $\bar{K} = K/0.5$, 则正三角形的 $\bar{K} = 1$. 如果三角形偏离正三角形越严重, $\bar{K}$ 越小, 网格质量越差. 图 4 为初始网格, 沿正弦曲线进行 1 次, 2 次和 3 次加密后的网格图形. 从同一位置的局部放大图形可以看出通过中心点加密后的网格单元仍保持很高的质量.



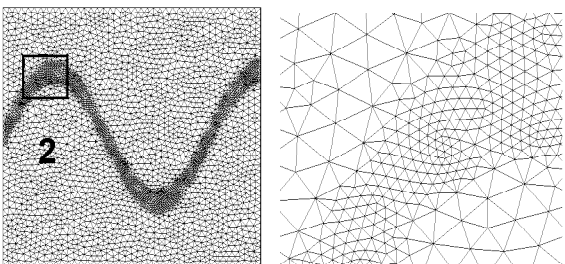
(a) 初始网格及局部放大图

(a) Initial and enlarged grid



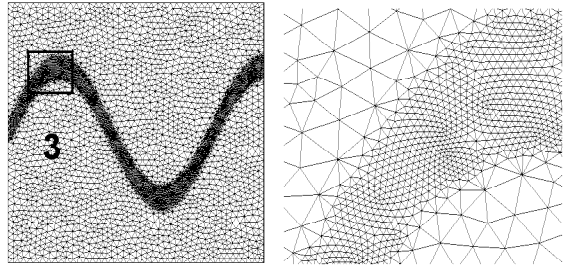
(b) 1 次加密网格及局部放大图

(b) First refined and enlarged grid



(c) 2 次加密网格及局部放大图

(c) Second refined and enlarged grid



(d) 3 次加密网格及局部放大图

(d) Third refined and enlarged grid

图 4 初始网格和 1~3 次迭代后的网格及局部放大图

Fig.4 Initial grid and refined grid

表 1 为图 4 中算例的不同质量网格单元数占总单元数的百分比. 由表 1 可见采用本文提出的中心点加密的自适应网格技术可以很好地保证加密后的网格质量.

表 1 算例网格的几何特性统计

Table 1 Geometrical features of grid

$\bar{K}$	0~0.4	0.4~0.6	0.6~0.8	0.8~1.0
Fig.4(a)	0	0	0.56%	99.44%
Fig.4(b)	0	0	0.55%	99.45%
Fig.4(c)	0	0.13%	1.38%	98.49%
Fig.4(d)	0	0.09%	2.49%	97.42%

3 结合自适应网格生成方法的基于特征线方程的分离算法

3.1 网格自适应准则选取

为将自适应网格生成方法和基于特征线方程的分离算法相结合, 在一定计算步之后, 需要根据自适应准则来判定计算域内的网格是否需要细化处理. 一般应根据求解问题的特点选取一个或多个变量组合的梯度作为自适应准则. 另外也可以考虑二阶导数项来减少误差 [7]. 本文采用速度梯度作为网格的自适应准则.

3.2 基于特征线方程的分离算法介绍

将 NS 方程沿特征线方向离散后可以得到

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= U_i^{n+1} - U_i^n = \\ &\Delta t \left[-\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \right) - \rho g_i \right]^n + \\ &\Delta t R_i^{n+\theta_2} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial(u_j U_i)}{\partial x_j} - \right. \\ &\left. \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \right]^n - \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial R_i^{n+\theta_2}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2)$$

采用非增量型分离算法对特征线方程进行求解, 算法分 3 个步骤进行^[8]:

第 1 步: 忽略方程 (2) 中压力项, 得到速度中间值求解方程

$$\Delta U_i^* = U_i^* - U_i^n = \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \right]^n \quad (3)$$

第 2 步: 由连续方程和特征线离散方程求解压力值

$$\Delta \rho = \left(\frac{1}{C^2} \right)^n \Delta p = -\Delta t \left[\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} - \Delta t \theta_1 \left(\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i \partial x_i} \right) \right] \quad (4)$$

第 3 步: 由第 2 步得到的压力值对第 1 步中得到的速度再次进行修正, 得到最终的修正速度

$$\Delta U_i^{**} = -\Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k^n \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_k \partial x_i} \quad (5)$$

上面的求解矩阵为正定矩阵满足 BB 条件, 因此可以选择任意的速度和压力的插值函数 N_u 和 N_p , 算法都将保持稳定^[9]. 在本文算例中, 速度和压力都采用 T_3P_3 等阶次插值函数进行空间离散.

4 算例及讨论

为了验证结合自适应网络的基于特征线方程分离算法的有效性, 本文以 $Re = 400$ 空腔流动为例进行了流场计算. 每迭代计算 200 步便进行一次网格自适应. 如图 5 所示, 分别为计算初始时的空腔网格, 计算结束时的流线与网格叠加图形. 从流场流线和网格叠加图形可以看出, 组合算法在计算过程中对速度梯度变化大的区域有效地进行了局部网格加密.

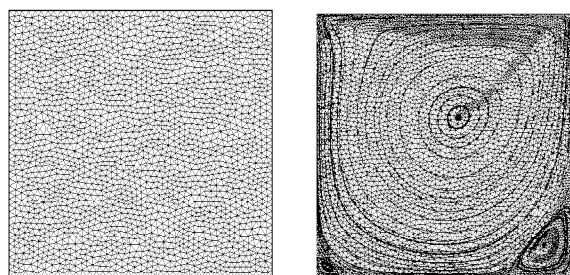


图 5 结合自适应网格生成方法的基于特征线方程的分离算法的计算结果

Fig.5 Result of using combined method

计算区域初始网格的节点数为 3674, 单元数为 7142. 计算结束后网格的节点数为 4994, 单元数为 9782, 节点数增加 35.9%. 表 2 为算法的网格几何特性的改变, 从表中可以看出组合算法可以避免网格发生畸变, 很好地保证网格质量.

表 2 网格几何特性改变

Table 2 Change of geometrical feature

	0~0.4	0.4~0.6	0.6~0.8	0.8~1.0
initial grid	0	0.04%	2.50%	97.46%
final grid	0	1.7%	5.49%	92.81%

图 6 为方腔垂直中线上 ($x = 0.5$) 的速度分量 U 分布与经典 Ghia^[10] 计算结果的比较, 从图中可以看出组合算法的计算结果与经典结果吻合很好, 有很高的计算精度.

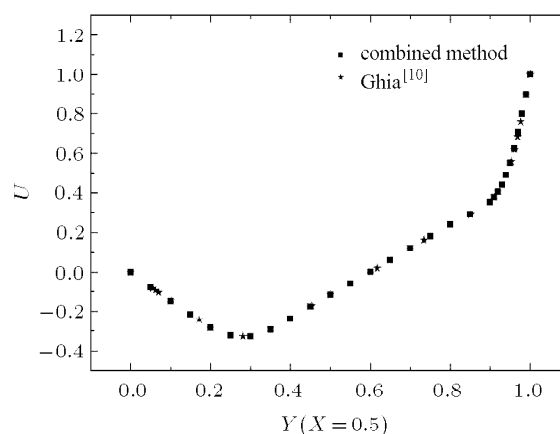


图 6 方腔垂直中线上速度 U 值分布

Fig.6 Velocity U at chamber centerline

5 结 论

本文提出了一种新的自适应网格方法: 在需要加密的网格单元中心加入新结点, 并对加密后相邻的三角形网格进行公共边变换. 与以往采用的边界中点加入新节点的方法相比, 该方法可以更加灵活地控制网格密度和控制网格质量, 算法实现简单, 计算量小. 最后本文将该方法与基于特征线方程的分离算法相组合对空腔流动进行计算. 计算结果表明: 组合算法在计算过程中对变量梯度变化大的区域有效地进行了局部网格加密, 网格数据量增长较少, 有效减少了计算时间、存储量, 提高了计算精度.

参 考 文 献

- 1 桑为名, 李凤蔚. 采用自适应直角网格计算三维增压装置绕流. 力学学报, 2005, 37: 80~86 (Sang Weiming, Li Fengwei. Numerical analysis of flows around 3-D high-lift system by adaptive Cartesian grid method. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37: 80~86 (in Chinese))
- 2 陶文铨. 计算传热学的近代进展. 北京: 科学出版社, 2000. 19~104 (Tao Wenquan. The New Progresses on Numerical Heat Transfer. Beijing: Science Press, 2000. 19~104 (in Chinese))
- 3 Oden JT, Wu W, Legat V. An hp adaptive strategy for finite element approximations of the Navier-Stokes equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20: 831~851
- 4 Zienkiewicz OC, Codina R. A general algorithm for compressible and incompressible flow. Part I. The split characteristic based scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20: 869~885
- 5 Zienkiewicz OC. Achievement and some unsolved problems of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 47: 9~28
- 6 Zienkiewicz OC, Taylor RL, Nithiarasu P. The Finite Element Method for Fluid Dynamics(6th edn). Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 1~4
- 7 康红文, 谷湘潜, 柳崇健. 自适应网格技术中的权函数问题研究. 力学学报, 2002, 34: 790~795 (Kang Hongwen, Gu Xiangqian, Liu Chongjian. Study on weigh functions of adaptive grid technique. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34: 790~795 (in Chinese))
- 8 Nithiarasu P, Zienkiewicz OC. Analysis of an explicit and matrix free fractional step method for incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195: 5537~5551
- 9 Langtangen HP, Mardal KA, Winther R. Numerical methods for incompressible viscous flow. *Advances in Water Resources*, 2002, 25: 1125~1146
- 10 Ghia U, Ghia KN, Shin C.T. High-*Re* solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multi-grid method. *Journal of Computation Physics*, 1982, 48: 387~411

(责任编辑: 王 薇)

A NEW GRID ADAPTIVE STRATEGY COMBINED CHARACTERIZED BASED SPLIT METHOD¹⁾

Chen Yan²⁾ Cao Shuliang Liang Kaihong Zhu Baoshan

(Key Laboratory for River Dynamics and Hydraulic Engineering, Department of Thermal Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract A new self-adapting grid method is presented by adding the new point at the centre of the grid cell. Compared with the traditional method adding the new point at the median, the new refine method is more convenient to program and has better geometrical feature. At last, this paper combines the new refined method with characterized based split method to solve N-S equation. The convective acceleration term disappear along the characteristic. In order to avoid the restriction on the nature of the interpolation function, the momentum equation is solved by non-incremental split method, which satisfies the Babuska-Brezzi(BB) condition. The variable gradient is used as the adaptive parameter. The result shows the combined method has good precision and convergence.

Key words self-adapting grid, h refinement, characterized line, split method

Received 17 July 2008, revised 23 October 2008.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50776052).

2) E-mail: yan-chen03@mails.tsinghua.edu.cn