

金属射流失稳断裂的理论分析¹⁾

石艺娜²⁾ 秦承森

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

摘要 基于 Hamilton 原理, 提出一个包含射流强度、剪切、应变率效应、动力学黏性、表面张力和速度梯度等多因素耦合的金属射流拉伸运动方程, 具体分析了各种失稳因素, 并由数值解定量给出其影响大小, 以及最不稳定波长与初始应变率乘积 $\lambda_m \dot{\epsilon}_0$ 值的变化范围; 给出了射流断裂的时间判据和近似理论公式, 计算得到的 $t_b - \dot{\epsilon}_0$ 曲线与射流实验点、Chou&Carleone 拟合公式三者符合较好.

关键词 金属拉伸射流, 运动方程, 失稳因素, 最不稳定波长, 断裂时间

中图分类号: O358, O317 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2009)03-0361-09

引 言

由爆轰加载下聚能罩塌缩产生的金属射流, 具有很强的侵彻穿透能力, 在军事和民用领域具有广泛的应用, 射流在自由飞行过程中处于拉伸状态, 速度梯度变化约为 $10^4 \sim 10^5 \text{s}^{-1}$, 飞行一段时间后, 由于局部区域颈缩而产生断裂, 会大大影响射流侵彻能力^[1]; 近年来, 工程应用研究中, 对于高速冲击作用下金属材料表面微喷射现象的实验观测表明, 产生微物质喷射的一个重要原因是金属材料表面微缺陷形成的射流机制^[2]. 这些使得深入研究金属射流的失稳、断裂过程, 预测射流的断裂时间和颗粒化分布规律具有重要意义.

近 50 年来, 对于金属射流失稳、断裂的研究一直是学术界和工程界的热点问题, 国内外学者试图采用实验、数值模拟以及建立解析模型等, 对金属射流的失稳因素和断裂机理加以解释. 早期的流体射流模型不能正确解释金属射流断裂的原因, 自 20 世纪 70 年代以来, 射流断裂研究集中于弹塑性拉伸失稳. Chou^[3], 郑哲敏^[4] 对常屈服应力下金属射流的拉伸失稳进行了小扰动分析; 基于应变率无关模型, Curtis^[5], Romero^[6], Shenoy 和 Freund^[7] 分别进行了轴对称射流的线性失稳分析. Curtis 给出了扰动波数的变化范围; Romero 得出了扰动发展的最不稳定波长, 忽略后期惯性效应, 与准静态分析结果一

致, 但是过低估计了射流的拉伸过程. 采用应变率相关模型, Fressengeas 和 Molinari^[8] 给出了平面应变射流的最不稳定波长和扰动增长方程, 并以射流局部厚度颈缩为零作为断裂判据, 得到了射流断裂时间和颗粒大小; Guduru 和 Freund^[9] 分析了惯性和应变率对轴对称射流颈缩失稳的影响; Jeanclaude 和 Fressengeas^[10] 采用非线性黏塑性模型进行轴对称射流失稳分析. 在数值模拟方面, Karpp 等^[11,12] 采用二维拉氏程序模拟了均匀拉伸射流的颈缩失稳过程, 模型中聚能罩坍塌后射流强度参数的选取, 依赖于射流实验边界的确定; Mercier 和 Molinari^[13] 采用拉氏程序预测了射流断裂时间和颗粒尺寸, 并指出: 聚能罩坍塌前后, 描述拉伸射流应选用不同的材料强度参数. Karlsson^[14,15] 采用 Euler 程序对金属射流的拉伸、失稳和断裂进行模拟, 但给出的断裂颗粒尺寸受网格敏感性、数值误差和人为因素的影响很大, 对计算条件的要求也很高; Cowan 等^[16] 和 Petit 等^[17] 分别采用解析模型和 Euler 程序相结合模拟了均匀铜射流的失稳断裂过程, 并预测了射流断裂时间和颗粒尺寸. 目前的研究结果表明, 实验初始条件和模型参数对于金属射流断裂时间的影响是不明显的.

由于金属射流失稳断裂的本质是一个弹塑性拉伸杆的力学失稳和断裂问题, 全面考察这一现象, 需要从描述射流失稳的运动方程出发, 研究各种因

2007-09-12 收到第 1 稿, 2007-12-24 收到修改稿.

1) 中国工程物理研究院科学技术发展基金重点项目 (2007A09001), 国家自然科学基金和中国工程物理研究院联合基金重点项目 (10676120) 资助.

2) E-mail: shyn@iapcm.ac.cn

素对射流失稳和断裂的影响. 本文基于 Hamilton 原理, 提出了一个包含材料强度、剪切、应变率效应、动力学黏性、表面张力以及速度梯度等多因素耦合的拉伸射流运动方程, 具体分析了各种失稳因素及其影响大小, 给出了射流断裂的时间判据和 $t_b-\dot{\epsilon}_0$ 曲线, 并与射流实验点和 Chou&Carleone 拟合曲线进行了比较.

1 金属射流的拉伸运动方程

1.1 基本假设

为了简化问题, 将断裂前处于自由飞行拉伸状态的金属射流看作是一个具有轴向速度梯度的二维细长弹塑性圆杆, 选取柱坐标系 (z, r, φ) , 做以下假设:

(1) 金属射流呈圆柱形, 速度沿轴向分布, 运动是轴对称、无旋转的;

(2) 在拉伸运动过程中, 射流近似为不可压缩流体;

(3) 金属射流的轴向长度 $L \gg$ 半径 R , 同一截面上的轴向应力 σ_z , 轴向位移 u 和轴向速度 V 是空间坐标 z 和时间 t 的函数, 与坐标 r 无关.

金属射流的一个突出特征是射流长度是其直径的几十, 甚至几百倍, 根据实验结果, 断裂前的拉伸射流具有速度梯度, 其中头部速度最大, 往尾部速度递减, 且射流半径变化较小, 第 1, 3 假设是合理的; 由于射流的自由飞行时间约为 $100\mu\text{s}$ 左右, 热传导可忽略不计, 拉伸过程可以看作是绝热的, 塑性功全部用于射流内能的增加, 使其内部温度升高. 实验表明, 射流在飞行拉伸过程中温度升高大约 $200^\circ\text{C} \sim 300^\circ\text{C}$, 密度基本保持不变, 因此, 第 2 假设也是近似成立的.

1.2 运动方程

在金属射流拉伸运动过程中, 其哈密顿作用量泛函的一阶变分形式可以写为

$$\delta II = \int_{t_0}^t \delta K dt - \int_{t_0}^t \delta U dt = \delta II_1 - \delta II_2 \quad (1)$$

其中, K 和 U 分别表示系统的动能和势能.

采用拉氏坐标 h , 系统动能 K 由轴向和径向运动两部分组成, 其泛函变分动能项 δII_1 的具体形式可写为

$$\delta II_1 = \int_{t_0}^t \int_0^L \left[-\rho A_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \frac{\rho}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial h \partial t} \left(\frac{A^3}{A_0} \frac{\partial^2 u}{\partial h \partial t} \right) \right] \delta u dh dt \quad (2)$$

计入材料强度、剪切变形、应变率效应、表面张力、动力学黏性等因素的影响, 系统势能由以下 6 部分组成, 即

$$U = W_z + W_{rz} + W_T + W_Q + W_p + W_F \quad (3)$$

其中, 拉伸变形势能 W_z 的变分形式为

$$\delta II_{21} = \int_{t_0}^t \delta W_z dt = - \int_{t_0}^t \int_0^L \frac{\partial(A\sigma_z)}{\partial h} \delta u dh dt \quad (4)$$

剪切变形势能 W_{rz} 的变分形式为

$$\delta II_{22} = \int_{t_0}^t \delta W_{rz} dt = - \int_{t_0}^t \int_0^L \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{A}{A_0} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{A^2 \sigma_{RZ}}{R} \right) \right] \delta u dh dt \quad (5)$$

表面张力势能 W_T 的变分形式为

$$\delta II_{23} = \int_{t_0}^t \delta W_T dt = - \int_{t_0}^t \int_0^L \frac{\partial(\pi RT)}{\partial h} \delta u dh dt - \int_{t_0}^t \int_0^L \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{A}{A_0} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{A^2 T}{A_0} \frac{\partial R}{\partial h} \right) \right] \delta u dh dt \quad (6)$$

动力学黏性势能 W_Q 的变分形式为

$$\delta II_{24} = \int_{t_0}^t \delta W_Q dt = \int_{t_0}^t \int_0^L \left[\frac{5}{4} \frac{\partial(AQ_{zz})}{\partial h} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{A}{A_0} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{A^2}{R} Q_{RZ} \right) \right) \right] \delta u dh dt \quad (7)$$

表面压力做功增加的势能 W_p (或气动压力势能) 的变分形式为

$$\delta II_{25} = \int_{t_0}^t \delta W_p dt = \int_{t_0}^t \int_0^L A \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right) \delta u dh dt \quad (8)$$

沿轴向体积力位势能 W_F 的变分形式为

$$\delta II_{26} = \int_{t_0}^t \delta W_F dt = - \int_{t_0}^t \int_0^L F_z \delta u A_0 dh dt \quad (9)$$

其中, $\rho, u, A, R, V, \sigma_z, T, p, F_z$ 分别表示射流密度、轴向位移、截面积、半径、轴向速度、轴向应力、表面张力、表面气动压力和 z 方向的体积力. 根据 Hamilton 原理, 有泛函的一阶变分: $\delta II = 0$. 由

此, 可得关于轴向位移 $u(h, t)$ 和截面积 $A(h, t)$ 的射流运动方程的具体形式

$$\begin{aligned} \rho A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\rho}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial h \partial t} \left(\frac{A^3}{A_0} \frac{\partial^2 u}{\partial h \partial t} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial h} (A \sigma_z) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{A}{A_0} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{A^2}{R} \sigma_{RZ} \right) \right] + \\ \pi \frac{\partial}{\partial h} (RT) + \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{A}{A_0} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{TA^2}{A_0} \frac{\partial R}{\partial h} \right) \right] - A \frac{\partial p}{\partial h} + \\ \frac{3}{2} \frac{\partial (AQ_{zz})}{\partial h} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{A}{A_0} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{A^2}{R} Q_{RZ} \right) \right] + A_0 F_z \end{aligned} \quad (10)$$

结合质量守恒方程

$$\frac{\partial u}{\partial h} = \frac{A_0}{A} - 1 \quad (11)$$

式 (10) 和 (11) 即为描述金属射流拉伸运动的方程组。其中, 式 (10) 等号左边表示射流的轴向和横向运动; 右边第 1, 2 项为拉伸、剪切变形项, 第 3, 4 项为表面张力项, 第 5 项为射流表面气动压力项, 第 6, 7 项为黏性效应, 最后 1 项为 z 轴方向的体积力 F_z 作用项。其中, 表面剪应力 σ_{RZ} 和黏性应力 Q_{zz} , Q_{RZ} 的表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_{RZ} &= -\frac{\sigma_z R}{3} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial z} \\ Q_{zz} &= 2\mu \frac{\partial V}{\partial z}, \quad Q_{RZ} = -\frac{\mu R}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

如果已知射流的初始半径、轴向速度分布和材料的本构形式, 可以对以上方程具体求解, 用来研究拉伸射流的稳定性。当不考虑黏性效应和体积力时, 方程 (10) 和 (11) 在小扰动近似下可以退化为郑哲敏^[4]在分析聚能射流失稳时给出的微扰方程; 若不考虑剪切变形、黏性、表面张力、气动力和体积力, 即仅保留方程 (10) 的左端两项和右端第 1 项, 在弹性近似下, 它自然演化为 Love-Rayleigh 圆柱杆运动方程。

2 金属射流的失稳因素分析

2.1 无量纲方程

选取以下无量纲量

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho/\rho_0, \quad \tilde{u} = u/R_{00}, \quad \tilde{h} = h/R_{00} \\ \tilde{t} &= t/\tau, \quad (\tau = R_{00}/C_p, C_p = \sqrt{Y_0/\rho_0}) \\ \tilde{A}_0 &= A_0/\pi R_{00}^2, \quad \tilde{A} = A/\pi R_{00}^2, \quad \tilde{R} = R/R_{00} \\ \tilde{V} &= V/C_p, \quad \tilde{\sigma} = \sigma_z/Y_0, \quad \tilde{\sigma}_{RZ} = \sigma_{RZ}/Y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{zz} &= Q_{zz}/Y_0, \quad \tilde{Q}_{RZ} = Q_{RZ}/Y_0, \quad \tilde{\mu} = \mu C_p/R_{00} Y_0 \\ \tilde{T} &= T/R_{00} Y_0, \quad \tilde{p} = p/Y_0, \quad \tilde{F}_z = F_z R_{00}/Y_0 \end{aligned}$$

其中, ρ_0 , Y_0 , R_{00} , μ 分别为射流的初始密度, 材料强度, 初始半径和动力学黏度; C_p , τ 为特征速度和特征时间。以下采用无量纲形式, 并略去“ $\sim$ ”号。

引入无量纲应变和应变率: $\varepsilon = \partial u/\partial h$, $\dot{\varepsilon} = \partial V/\partial h$, 由式 (11) 得: $A = A_0/(1 + \varepsilon)$, 代入式 (10), 并取 $\rho = 1$, 可得无量纲方程为

$$\begin{aligned} -A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2}{\partial h \partial t} \left[\frac{1}{A_0} \left(\frac{A_0}{1 + \varepsilon} \right)^3 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{A_0 \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})}{1 + \varepsilon} + \frac{3A_0 \mu}{(1 + \varepsilon)^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{R_0 T}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial h} \left\{ \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{A_0^2}{4R_0} \left(-\frac{\sigma}{3(1 + \varepsilon)^{7/2} \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\mu}{2(1 + \varepsilon)^{7/2}} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial h \partial t} + \frac{\mu}{2(1 + \varepsilon)^{9/2}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon}{\partial h} \right) + \right. \\ \left. \frac{A_0 T}{(1 + \varepsilon)^2} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{R_0}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) \right\} - \\ \frac{A_0}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial h} + A_0 F_z = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

相应的初、边值条件为

$$\begin{aligned} t = 0 : u(h, 0) &= 0, \varepsilon(h, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{t=0} &= V(h, 0) = V(h) \\ h = 0 : \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{h=0} &= V(0, t) = V_0 \\ h = L : \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{h=L} &= V(L, t) = V_L \end{aligned}$$

2.2 小扰动方程

假设方程 (12) 的无扰动解 $u(h, t)$ 为理想射流解, 即 $\varepsilon_0 = \text{const}$, 扰动后方程解为: $\bar{u} = u + u'$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon'$, $\bar{V} = V + V'$, 代入式 (12), 并取 $R_0 = 1$, $A_0 = 1$, 略去一阶以上量, 可得微扰方程为

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + \frac{1}{8(1 + \varepsilon)^3} \cdot \frac{\partial^4 u'}{\partial h^2 \partial t^2} + \\ \left[\frac{1}{1 + \varepsilon} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{3\mu}{(1 + \varepsilon)^2} - \frac{3\varepsilon_0}{4(1 + \varepsilon)^4} \right] \cdot \\ \frac{\partial^3 u'}{\partial h^2 \partial t} + \left[\frac{3\varepsilon_0^2}{2(1 + \varepsilon)^5} + \frac{1}{1 + \varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} - \frac{\sigma}{1 + \varepsilon} \right) - \right. \\ \left. \frac{6\mu\varepsilon_0}{(1 + \varepsilon)^3} - \frac{T}{2(1 + \varepsilon)^{3/2}} \right] \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial h^2} + \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{\sigma}{12(1+\varepsilon)^{9/2} \cdot \varepsilon} + \frac{\mu \dot{\varepsilon}_0}{8(1+\varepsilon)^{11/2}} - \frac{T}{2(1+\varepsilon)^{9/2}} \right] \cdot \frac{\partial^4 u'}{\partial h^4} - \frac{\mu}{8(1+\varepsilon)^{9/2}} \cdot \frac{\partial^5 u'}{\partial h^4 \partial t} = 0 \quad (13)$$

方程系数仅与时间 t 有关. 设有形式 $u'(h, t) = f(t)e^{ikh}$ 的特解, 代入上式得

$$A(t)\ddot{f} + B(t)\dot{f} + C(t)f = 0 \quad (14)$$

其中, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, λ 为扰动波长. 初始条件为: $f(0) = f_0, \dot{f}(0) = \dot{f}_0$. 且

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= A(\varepsilon(t)) = 1 + \frac{k^2}{8(1+\varepsilon)^3} \\ B(t) &= B(\varepsilon(t)) = \frac{k^2}{1+\varepsilon} \cdot \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{3\dot{\varepsilon}_0}{4(1+\varepsilon)^3} + \frac{3\mu}{(1+\varepsilon)} + \frac{\mu k^2}{8(1+\varepsilon)^{7/2}} \right] \\ C(t) &= C(\varepsilon(t)) = \frac{k^2}{1+\varepsilon} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} - \frac{\sigma}{1+\varepsilon} \right) + \frac{3\dot{\varepsilon}_0^2}{2(1+\varepsilon)^4} - \frac{6\mu\dot{\varepsilon}_0}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{T}{2(1+\varepsilon)^{1/2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + k^2 \cdot \left[\frac{\sigma}{12(1+\varepsilon)^{7/2}\varepsilon} - \frac{\mu\dot{\varepsilon}_0}{8(1+\varepsilon)^{9/2}} + \frac{T}{2(1+\varepsilon)^{7/2}} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

2.3 失稳因素分析

对以上方程做 Goldstein 变换

$$f(t) = g(t) \cdot \exp \left[- \int_0^t \frac{B(\tau)}{2A(\tau)} d\tau \right] \quad (16)$$

则方程 (14) 的正规形式为

$$\ddot{g}(t) - G(t)g(t) = 0 \quad (17)$$

其中, $G(t) = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} \right)' - \frac{C}{A}$, 且 $\left(\frac{B}{A} \right)'$ 为关于时间 t 的导数, 当 $\dot{\varepsilon}_0$ 为小量时, $G(t) = G(\dot{\varepsilon}_0 t)$ 是 t 的缓变函数. 采用 WKB 近似, 做微扰展开, 可得 $f(t)$ 的一阶近似解

$$\begin{aligned} f(t) &= \left\{ D_{10} \cdot \exp \left\{ \int_0^t \left[\sqrt{G(t)} - \frac{B}{2A} \right] d\tau \right\} + \right. \\ &\quad \left. D_{20} \cdot \exp \left\{ \int_0^t \left[-\sqrt{G(t)} - \frac{B}{2A} \right] d\tau \right\} \right\} / \\ &\quad \sqrt[4]{G(t)} \end{aligned} \quad (18)$$

记: $H_{\pm} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{G} = -\frac{B}{2A} \{1 \pm \sqrt{1-q}\}$, 其中, $q = \frac{4AC}{B^2} - \frac{2A^2}{B^2} \left(\frac{B}{A} \right)'$. 对失稳因素做以下具体分析:

当系数 $B(t) < 0$ 时, $H_{\pm}$ 总存在大于零的实部, $f(t)$ 将随时间 t 指数增大, 射流失稳. 这意味着系数 $B(t)$ 表达式中, $-\frac{3\dot{\varepsilon}_0 k^2}{4(1+\varepsilon)^4}$ 项贡献大于其余项, 这表明纵向拉伸效应的失稳作用.

当系数 $B(t) > 0$ 时, 只要 $q < 0$, 仍有 $H_- > 0$, 故此时 $q < 0$ 为射流的失稳条件. 将式 (15) 代入, 并考虑到 $A > 0, B > 0$, 失稳条件可进一步化为: $\bar{q} < 0$, 其中

$$\begin{aligned} \bar{q} &= -\frac{3\dot{\varepsilon}_0 \cdot B}{8(1+\varepsilon)^3 + k^2} + \left[2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} - \frac{\sigma}{1+\varepsilon} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\dot{\varepsilon}_0}{1+\varepsilon} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) - \dot{\varepsilon}_0 \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon \partial \dot{\varepsilon}} \right) \right] + \frac{k^2}{(1+\varepsilon)^3} \cdot \\ &\quad \left[\frac{\sigma}{6(1+\varepsilon)^{1/2}\varepsilon} + \frac{5\mu\dot{\varepsilon}_0}{16(1+\varepsilon)^{3/2}} + \frac{T}{(1+\varepsilon)^{1/2}} \right] - \\ &\quad \frac{T}{(1+\varepsilon)^{1/2}} - \frac{6\mu\dot{\varepsilon}_0}{(1+\varepsilon)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

由 $\bar{q}$ 的表达式, 可以看出:

(1) 第 1 项: 当 $B > 0$ 时该项恒为负. $\dot{\varepsilon}_0 > 0$ 为速度梯度, 表示拉伸作用程度, 是失稳因素; 分母 $8(1+\varepsilon)^3$ 来自式 (13) 的横向惯性项, 它使第 1 项绝对值减小, 因此, 射流横向运动是稳定性因素.

(2) 第 2 项: 材料强度效应. 若取 σ 与 $\dot{\varepsilon}$ 无关, 且 $\mu = T = 0$, 略去剪切作用项 (即含有乘子 k^2 的项), 则式 (19) 可以化为

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} - \frac{\sigma}{1+\varepsilon} < 0 \quad (20)$$

这是众所周知的塑性失稳判据. 若采用本构形式: $\sigma = \sigma_0 + \alpha\varepsilon$, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 有 $\sigma > \alpha$, 即为 Chou^[3] 给出的聚能射流失稳条件. 该项表明: 材料强度是重要的失稳因素; 仅就应变硬化效应而言, $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} > 0$ 是致稳因素.

(3) 第 3 项: 恒大于零, 故剪切效应是致稳因素. 它包括 3 部分: 射流表面剪切力 σ_{RZ} 、黏性剪应力 Q_{RZ} 和表面张力的剪切展平作用.

(4) 表面张力项: $\frac{T}{(1+\varepsilon)^{1/2}} \cdot \left[\frac{k^2}{(1+\varepsilon)^3} - 1 \right]$, 第 1 项是剪切效应, 第 2 项为颈缩效应. 当扰动波数

$k > k_T$ 时, 表面张力是稳定性因素; 而当 $k < k_T$ 时, 是失稳因素, 其中, $k_T = (1 + \varepsilon)^{3/2} = (R_0/R)^3$.

(5) 黏性效应: 在 $\bar{q}$ 表达式中黏性项包括两部分: $-\frac{6\mu\dot{\varepsilon}_0}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{5\mu\dot{\varepsilon}_0 k^2}{16(1+\varepsilon)^{9/2}}$. 其中, 第 1 项源于黏性压力 Q_{zz} , 它的作用类似于增强材料的强度, 是失稳因素, 与波长无关; 另 1 项为剪切黏性项, 具有致稳作用. 即: 法向黏性应力是失稳因素, 剪切黏性力是致稳因素. 当扰动波数 $k > k_c$ 时, 黏性致稳, 而当 $k < k_c$ 时, 黏性失稳, 其中, $k_c = \sqrt{19.2 \cdot (1 + \varepsilon)^{5/4}} = \sqrt{19.2} \cdot (R_0/R)^{5/2}$.

2.4 数值解

记: 射流扰动振幅的相对增长 $\delta = (f(t) - f_0)/f_0$, f_0 为初始扰动振幅. 采用拟合多项式本构形式: $\sigma = c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2$, 对方程 (14) 和 (15) 进行数值求解. 选取 $f_0 = 0.001$, $\mu = 0.2$, $T = 0.001$, 图 1 分别计算了 $\dot{\varepsilon}_0 = 0.2$ 和 $\dot{\varepsilon}_0 = 1.0$ 时不同的扰动波长 λ 对振幅相对增长 δ 的影响.

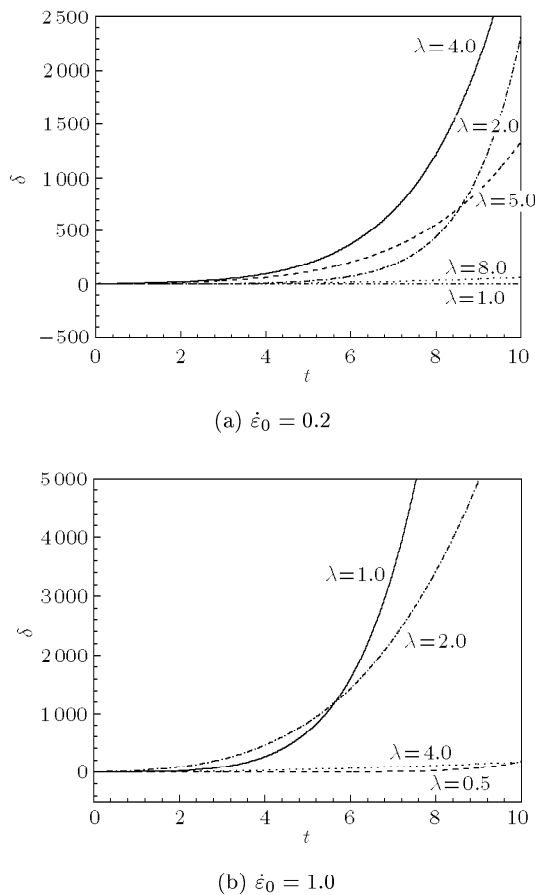


图 1 扰动波长 λ 对振幅相对增长 δ 的影响

Fig.1 Relative amplitude growth versus time for surface disturbances with various wavelength

可以看出: 金属射流扰动振幅的增长随时间是均匀变化的; 射流表面失稳过程中, 在横向惯性力作用下, 射流径向运动速度减小, 抑制了长波扰动振幅的增长, 但对短波扰动的影响不大; 而多轴应力场的作用又抑制了短波扰动振幅的增长, 最终的作用结果导致存在一个随时间扰动发展最快的中间波长, 即: 最不稳定波长 λ_m , 使得金属射流在该波长下发生颈缩而断裂成颗粒.

文献 [18,19] 中提到最不稳定波长与初始应变率乘积 $\lambda_m\dot{\varepsilon}_0$ 在平均意义上接近于常数 (即: 相邻颗粒的无量纲速度差近似为常数), 但得到的这一实验常数各不相同, Babkin^[18] 给出的值为 0.65 和 1.14 之间. 本文计算给出了无量纲 $\lambda_m\dot{\varepsilon}_0$ 值随初始应变率 $\dot{\varepsilon}_0$ 的变化范围, 图 2 是相应的计算点和数值拟合曲线, 其中, 拟合曲线公式为: $\lambda_m\dot{\varepsilon}_0 = 1.0 + f(\dot{\varepsilon}_0)$, $f(\dot{\varepsilon}_0) = -0.56 + 0.70\dot{\varepsilon}_0 - 0.12(\dot{\varepsilon}_0)^2$. 可以看出: $\lambda_m\dot{\varepsilon}_0$ 值随初始应变率 $\dot{\varepsilon}_0$ 的增大而有所增加, 其变化范围约在 0.4 ~ 1.6 之间; 而文献中给出的不同实验值, 实际上是在不同 $\dot{\varepsilon}_0$ 下得到的或为 $\dot{\varepsilon}_0$ 变化区间内的平均值. 这一结果与 Babkin^[18] 结果是一致的.

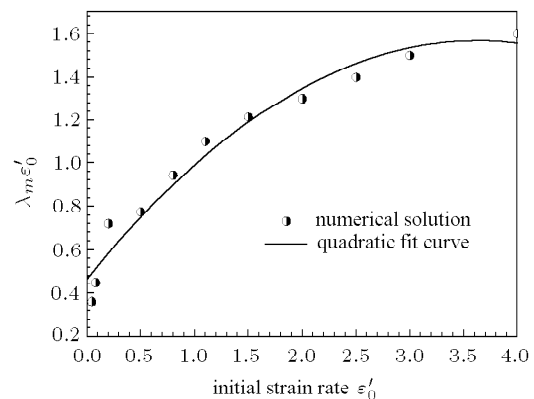


图 2 无量纲 $\lambda_m\dot{\varepsilon}_0$ 值随初始应变率 $\dot{\varepsilon}_0$ 的变化

Fig.2 Non-dimensional $\lambda_m\dot{\varepsilon}_0$ vs. initial strain rate $\dot{\varepsilon}_0$

图 3 是选取 $\lambda = 4$, $\dot{\varepsilon}_0 = 0.2$, $T = 0.001$ 时, 射流材料强度对扰动振幅相对增长 δ 的影响. 可以看出: 材料强度大, 使得射流扰动振幅随时间迅速增长更快, 它是重要的失稳因素.

图 4 分别给出了取 $\lambda = 4$, $\dot{\varepsilon}_0 = 0.2$, $T = 0.001$ 和 $\lambda = 10$, $\dot{\varepsilon}_0 = 1.0$, $T = 0.001$ 两组参数时, 扰动振幅增长 δ 随黏性系数 μ 的变化. 可以看出: 对于波长较短的情况, 黏性效应的致稳作用是非常明显的, 而对于长波扰动如图 4(b), 黏性效应是失稳因素.

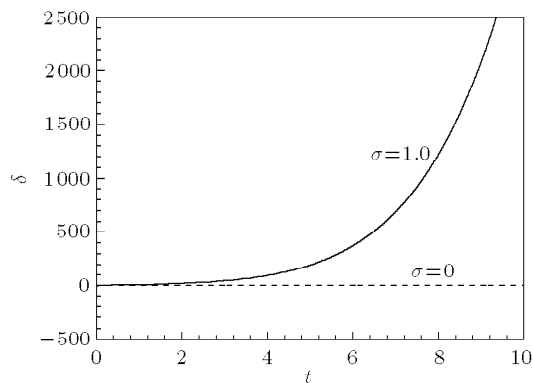
图 3 射流强度对振幅相对增长 δ 的影响

Fig.3 Effect of jet strength on relative disturbance growth

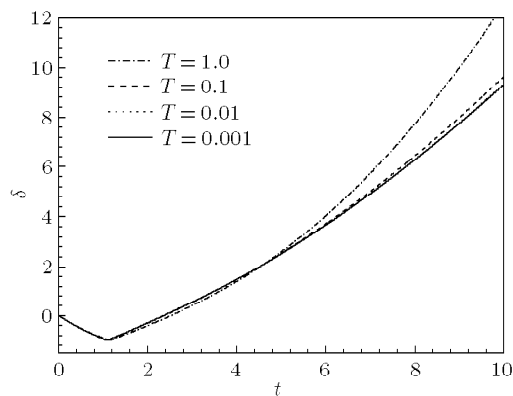
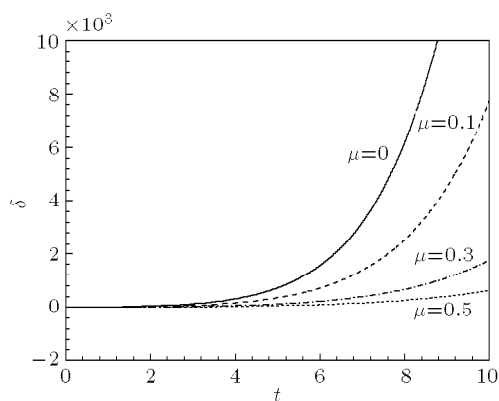
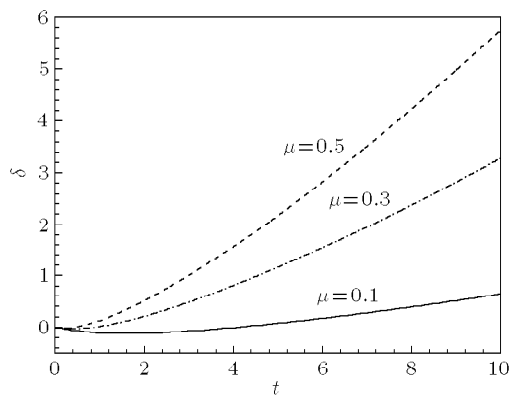
(a) $\lambda = 6$ (a) $\lambda = 4, \dot{\epsilon}_0 = 0.2, T = 0.001$ (b) $\lambda = 10, \dot{\epsilon}_0 = 1.0, T = 0.001$ 图 4 扰动振幅增长 δ 随黏性系数 μ 的变化

Fig.4 Effect of viscosity on relative disturbance growth

图 5 是取 $\mu = 0.2, \dot{\epsilon}_0 = 1.0$, 波长 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = 6$ 时射流扰动振幅增长 δ 随表面张力 T 的变化. 可以看出: 对于图 5(a) 中扰动波长较长的情况, 表面张力越大, 扰动增长越快, 表面张力是失稳因素, 这是由于表面张力引起的径向收缩效应所致; 随着 k 增加, 对于扰动波数 k 较大的短波如图 5(b), 表面张力

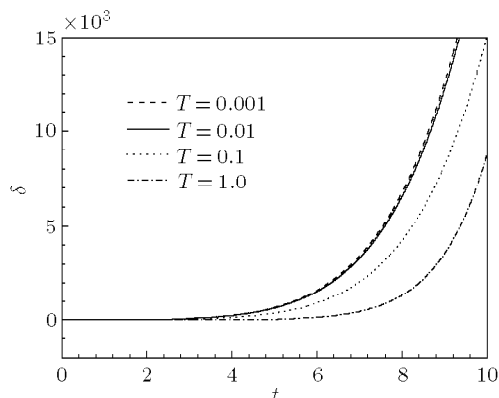
(b) $\lambda = 1$ 图 5 扰动振幅增长 δ 随表面张力系数 T 的变化

Fig.5 Effect of surface tensile force on relative disturbance growth

的剪切展平作用占主导地位, 此时, 表面张力对射流具有稳定性作用.

3 金属射流的断裂时间

3.1 理论曲线和实验点

金属射流的断裂时间是一个重要的物理量. 我们通过与射流实验结果比较发现: 射流运动方程 (10) 和 (11) 的数值解存在一个分叉点, 恰好与金属射流实验的断裂时刻相对应. 因此, 这里将射流断裂时间定义为射流运动方程数值解的分叉时刻.

采用理想射流假设, 近似认为各断裂点的分离时刻是相同的, 略去剪切项、表面张力、气动力和体积力, 对方程 (12) 关于时间 t 求导, 再关于 h 积分, 可得金属射流断裂时间 t_b 满足的近似方程为

$$-\frac{3}{8}\dot{\epsilon}_0^2\left(\frac{1}{\dot{\epsilon}_0 t + 1}\right)^3 + \sigma + 3\mu\dot{\epsilon}_0\left(\frac{1}{\dot{\epsilon}_0 t + 1}\right) = g(t) \quad (21)$$

其中, $g(t)$ 为时间积分常数, 可以由数值解或实验值来确定. 由数值研究表明, $g(t_b)$ 值近似为一常数. 若采用拟合多项式本构形式: $\sigma = c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2$, 断裂时间 t_b 的近似公式^[20] 可写为

$$t_b = \frac{1}{\dot{\varepsilon}_0} \left[\Gamma - \frac{c_1 + 3\mu\dot{\varepsilon}_0}{3(c_0 - g)} - 1 \right] \quad (22)$$

式中, $\Gamma = \sqrt[3]{-\frac{\eta}{2}} \cdot (\sqrt[3]{1+\beta} + \sqrt[3]{1-\beta})$, 其中:
 $\beta = \sqrt{1 + \frac{4\xi^3}{27\eta^2}}$, $\xi = -\frac{1}{3} \left(\frac{c_1 + 3\mu\dot{\varepsilon}_0}{c_0 - g} \right)^2 + \frac{c_2}{c_0 - g}$,
 $\eta = \frac{2}{27} \left(\frac{c_1 + 3\mu\dot{\varepsilon}_0}{c_0 - g} \right)^3 - \frac{c_2(c_1 + 3\mu\dot{\varepsilon}_0)}{3(c_0 - g)^2} - \frac{3\dot{\varepsilon}_0^2}{8(c_0 - g)}$.

选取一段密度 $\rho_0 = 8.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 的铜射流, 屈服强度 $Y_0 = 0.3 \text{ GPa}$, 初始扰动取为 $R = R_0(1 + 0.001 \cos(2\pi h/\lambda))$, 采用拟合多项式本构形式, 图 6 给出了无量纲射流断裂时间 t_b 随初始应变率 $\dot{\varepsilon}_0$ 的变化曲线, 其中包括: 黏度 $\mu = 0.4$ 的方程 (10), (11) 数值解、近似公式 (22) 取不同 μ 值时的 t_b - $\dot{\varepsilon}_0$ 曲线, 以及 Chou&Carleone 拟合公式^[1] 和不同的射流实验点^[1].

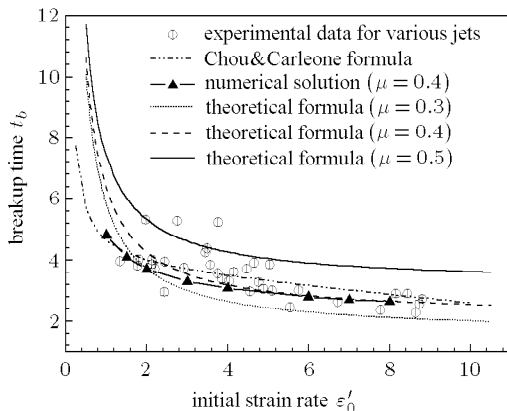


图 6 射流断裂时间的无量纲理论值与实验比较

Fig.6 Comparison between theoretical breakup time and some experimental data

可以看出: 当黏度 $\mu = 0.4$ 时, 方程 (10), (11) 数值解、近似公式 (22) 的理论曲线与 Chou&Carleone 公式三者符合较好; 而在 $\mu = 0.3 \sim 0.5$ 范围, 近似公式 (22) 得到的理论曲线族基本包络了不同的射流实验点.

3.2 断裂时间公式的几种形式

在不同的近似条件下, 金属射流断裂时间 t_b 满足的关系式 (21) 可以退化成几种半经验拟合公式的形式.

(1) 在理想塑性且不考虑黏性效应的情况下, 有 无量纲量 $\sigma = 1$, $\mu = 0$, 则式 (21) 可化为

$$t_b = \alpha(\dot{\varepsilon}_0)^{-1/3} - (\dot{\varepsilon}_0)^{-1} \quad (23)$$

其中, $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{8(1-g)}}$ 为常数. 当 $\dot{\varepsilon}_0$ 值较大时, 略去 $(\dot{\varepsilon}_0)^{-1}$ 项, 上式可化为: $t_b = \alpha(\dot{\varepsilon}_0)^{-1/3}$, 这是郑哲敏^[4] 由量纲分析得出的公式; 若对于等温和绝热过程加以区分, 取不同的屈服应力值 Y_0 , 则为 Chou&Carleone 拟合公式^[1].

(2) 在理想塑性条件下, 考虑黏性效应但略去径向收缩项, 由式 (21) 可得

$$t_b = 3\mu\alpha - (\dot{\varepsilon}_0)^{-1} \quad (24)$$

其中, $\alpha = 1/(g-1)$ 为常数, 即为 Haugstad 第 2 公式^[21].

(3) 若取本构形式: $\sigma = c_0 + c_n \left(\frac{A}{A_0} \dot{\varepsilon}_0 \right)^n$, 略去黏性和径向收缩项, 代入式 (21) 得

$$t_b = \alpha - (\dot{\varepsilon}_0)^{-1} \quad (25)$$

其中, $\alpha = \sqrt[n]{\frac{c_n}{c_0 - g}}$ 为常数, 这是 Haugstad 第 1 公式^[21]; 当 $(\dot{\varepsilon}_0)^{-1}$ 可忽略时, 为 Hirsch 公式^[21,22].

(4) 若取本构形式: $\sigma = c_0 + c_1 \left(\frac{A}{A_0} \right) + c_2 \left(\frac{A}{A_0} \right) \dot{\varepsilon}_0$, 略去径向收缩项, 可得

$$t_b = \alpha_1\mu + \alpha_2 + \alpha_3(\dot{\varepsilon}_0)^{-1} \quad (26)$$

其中, $\alpha_1 = 3/(g - c_0)$, $\alpha_2 = c_2/(g - c_0)$, $\alpha_3 = (c_0 + c_1 - g)/(g - c_0)$ 为常数. 这一公式包含了 Haugstad 第 1,2 公式和 Hirsch 公式, 适用范围更为广泛.

4 结 论

基于 Hamilton 原理, 提出了一个包含射流强度、剪切、应变率效应、动力学黏性、速度梯度以及表面张力等多因素耦合的拉伸射流运动方程, 给出了射流断裂时间判据和近似理论公式, 计算得到的 t_b - $\dot{\varepsilon}_0$ 曲线与射流实验点、Chou&Carleone 拟合公式符合较好. 通过对金属射流失稳因素的具体分析, 可以得出:

(1) 在射流表面失稳过程中, 存在一个随时间扰动发展最快的波长, 即最不稳定波长 λ_m ;

(2) 射流最不稳定波长与初始应变率乘积 $\lambda_m\dot{\varepsilon}_0$ 在平均意义上接近于常数, 其变化范围约在 0.4 ~ 1.5 之间. 初始应变率 $\dot{\varepsilon}_0$ 增加, 射流断裂时间提前;

(3) 材料强度和惯性拉伸作用是重要的失稳因素;

(4) 射流横向运动和剪切效应具有明显的致稳作用;

(5) 表面张力产生的剪切效应具有展平轴向扰动波纹的作用, 是致稳因素; 但是, 表面张力在环向引起的颈缩作用加快了扰动的发展, 是失稳因素. 对于扰动波数 $k > k_T$ 的短波, 表面张力具有致稳作用, 而对于 $k < k_T$ 的长波, 表面张力是失稳因素, 其中: $k_T = (R_0/R)^3$;

(6) 在黏性效应中, 剪切黏性力是致稳因素, 法向黏性应力是失稳因素. 对于短波, 当波数 $k > k_c$ 时, 黏性的综合作用是致稳的, 而对于长波 $k < k_c$ 的情况, 黏性是失稳因素, 其中: $k_c = \sqrt{19.2} \cdot (R_0/R)^{5/2}$.

参 考 文 献

- 1 Chou PC, Flis WJ. Recent developments in shaped charge technology. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 1986, 11: 99~114
- 2 Sorenson DS, Minich RW, Romero JL, et al. Ejecta particle size distributions for shock loaded Sn and Al metals. *J Appl Phys*, 2002, 92: 5830~5836
- 3 Chou PC, Carleone J. The stability of shaped charge jets. *J Appl Phys*, 1977, 48: 4187~4195
- 4 郑哲敏. 聚能射流的稳定性问题. 爆炸与冲击, 1981, 1: 6~17 (Zheng Zhemín. Stability of jet produced by shaped charge. *Explosion and Shock Waves*, 1981, 1: 6~17 (in Chinese))
- 5 Curtis JP. Axisymmetric instability model for shaped charge jets. *J Appl Phys*, 1987, 61(11): 4978~4985
- 6 Romero LA. The instability of rapidly stretching plastic jets. *J Appl Phys*, 1989, 65(8): 3006~3016
- 7 Shenoy VB, Freund LB. Necking bifurcations during high strain rate extension. *J Mech Phys Solids*, 1999, 47: 2209~2233
- 8 Fressengeas C, Molinari A. Fragmentation of rapidly stretching sheets. *Eur J Mech A/Solids*, 1994, 13, 251~268
- 9 Guduru PR, Freund LB. The dynamics of multiple neck formation and fragmentation in high rate extension of ductile materials. *Int J Solids Struct*, 2002, 39: 5615~5632
- 10 Jeanclaude V, Fressengeas C. Dynamic necking of rods at high strain rates. *J Phys IV Colloque C3*, 1997, 7: 699~704
- 11 Karpp RR, Simon J. An estimate of the strength of a copper shaped charge jet and the effect of strength on the breakup of a stretching jet. Tech. Rep. BRL-1893, 1976
- 12 Karpp RR, Hull LM, Price ML. A technique for estimating the strength of materials in stretching shaped-charge jets. In: Mayseless M, Bodner SR, eds. Proceedings of the 15th International Symposium on Ballistics, Jerusalem, Israel, 1995, 2: 175~182
- 13 Mercier S, Molinari A. Predictions of bifurcation and instabilities during dynamic extension. *Int J Solids Struct*, 2003, 40(8): 1995~2016
- 14 Karlsson HEV. Computer simulation of shaped charge jet fragmentation. In: Crewther IR, ed. Proceedings of the 19th International Symposium on Ballistics, Interlaken, Switzerland, 2001, 2: 819~826
- 15 Karlsson HEV. Computer simulations of shaped charge jet fragmentation. In: Carleone J, Orphal D, eds. Proceedings of the 20th International Symposium on Ballistics, Orlando, Florida, 2002, 1: 557~564
- 16 Cowan KG, Greenwood PR, Cornish R, et al. Hydrocode and analytical code modelling of the effect of liner material grain size on shaped charge jet break-up parameters. In: Van Niekerk C, ed. Proceedings of the 17th International Symposium on Ballistic, Midrand, South Africa, 1998, 2: 217~224
- 17 Petit J, Jeanclaude V, Fressengeas C. Breakup of copper shaped-charge jets: experiment, numerical simulations, and analytical modeling. *J Appl Phys*, 2005, 98: 123521
- 18 Babkin AV, Ladov SV, Fedovo SV. Regularities of shaped charge metal jets deformation and breakup in free flight. In: Proceedings of the 17th International Symposium on Ballistics, Midrand, South Africa, 1998, 2: 225~232
- 19 秦承森, 李勇. 一个新的射流颗粒速度差公式. 爆炸与冲击, 2001, 1: 8~12 (Qin Chengsen, Li Yong. Particle velocity variation along shaped charge. *Explosion and Shock Waves*, 2001, 1: 8~12 (in Chinese))
- 20 Qin CS, Duan QS, Lin Z. Study of shaped charge jet breakup. In: Mayseless M, Bodner SR, eds. Proceedings of the 15th International Symposium on Ballistics, Jerusalem, Israel, 1995. 325~332
- 21 Walters WP, Summers RL. A review of jet breakup time models. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 1993, 18: 241~246
- 22 Hirsch E. Scaling of the shaped charge jet break-up time. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 2006, 31(3): 230~233

(责任编辑: 刘希国)

INSTABILITY AND BREAKUP OF STRETCHING METALLIC JETS¹⁾Shi Yina²⁾ Qin Chengsen*(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)*

Abstract Based on the Hamilton principle, a coupled motion equation of stretching metallic shaped-charge jet is presented to study the effects of yield strength, shear, strain rate, viscosity, surface tension force and velocity gradient on the jet instability, and the results are quantitatively discussed. The value range of non-dimensional $\lambda_m \dot{\epsilon}_0$ was obtained to illustrate the product of the wavelength in unstablest solution and initial strain rate. Furthermore, the criterion and approximate theoretical formula of jet breakup time are presented. The theoretical results were in fairly good agreement with the jet experimental data and those from the method developed by Chou and Carleone.

Key words stretching metallic jet, motion equation, instability factor, critical wavelength, break-up time

Received 12 September 2007, revised 24 December 2007.

1) The project supported by the Foundation for Development of Science and Technology of Chinese Academy of Engineering Physics (2007A09001), the National Natural Science Foundation of China and Chinese Academy of Engineering and Physics (10676120).

2) E-mail: shyn@iapcm.ac.cn