

考虑自重载荷作用的连续体结构拓扑优化¹⁾

张 晖 刘书田²⁾ 张 雄

(大连理工大学工程力学系工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 针对自重载荷作用下连续体结构拓扑优化中常遇到的柔顺度随单元密度变化的非单调性、非有效的材料体积约束和材料低密度区出现的“附属”效应等主要困难, 提出了 RAMP 材料插值模型和平均敏度过滤技术相结合的求解策略, 并采用 MMA 方法进行了优化求解. 研究了惩罚因子的选择对最优拓扑以及材料体积约束的影响. 结果表明, 合理增大 RAMP 材料模型中惩罚因子 (例如取值达到 20.0), 可使材料体积约束达到有效约束. 此外, 通过与 Sigmund 提出的敏度过滤技术比较表明, 当引入平均敏度过滤技术时, 结果 0/1 化程度较 Sigmund 的敏度技术高, 可获得清晰的黑白拓扑.

关键词 拓扑优化, 连续体结构, 自重, RAMP, 敏度过滤

中图分类号: O343.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2009)01-0098-07

引 言

近 20 年来, 作为继尺寸设计和形状设计之后一个极具挑战性的研究领域, 结构拓扑优化设计得到快速发展, 并成功应用于许多实际工程问题^[1,2]. 结构拓扑优化在给定材料用量, 边界条件已知的情况下, 以寻求满足预期性能的最优拓扑形式为目的, 为工程师在概念设计阶段提供参考. 目前, 常用的拓扑优化方法包括: 均匀化方法^[3~6], SIMP 方法^[7], 进化算法^[8] 和水平集方法^[9~11] 等. 在以往的拓扑优化研究中, 通常忽略结构的自重而仅考虑结构在外载荷作用下的最优拓扑形式. 然而在许多实际结构如大坝、桥梁的初始设计阶段, 自重往往是需要考虑的主要影响因素之一. 到目前为止, 国内尚未见相关研究工作的报道, 国际上相关研究也相对较少. Turteltaub 和 Washabaugh^[12] 以设计域内各点处的弹性张量为设计变量, 研究了集中载荷和体力作用下的结构的拓扑和材料性能, 并比较了四棱柱结构在各种载荷情况下的优化结果. Bruyneel 和 Duysinx^[13] 指出了考虑自重情况下结构拓扑优化研究中的 3 个困难: 柔顺度随单元密度变化的非单调行为、非有效的材料体积约束和 SIMP 方法在材料低密度区出现的“附属”效应, 并对优化求解过程

和材料插值模型进行了改进. Yang 等^[14] 分别采用进化算法 (ESO) 和双向进化算法 (BESO) 对传递载荷、结构自重和表面载荷进行了研究. Lopes 等^[15] 研究了受自重和惯性载荷作用的三维结构的拓扑优化设计问题.

本文研究自重载荷作用下拓扑优化问题, 并针对常遇到的柔顺度随单元密度变化的非单调行为、非有效的材料体积约束和 SIMP 方法在材料低密度区出现的“附属”效应等主要问题, 提出了材料属性的有理近似模型 (rational approximation of material properties, RAMP)^[16] 与平均敏度过滤技术^[17] 相结合的优化求解策略, 并采用 Svanberg^[18] 提出的 MMA 方法进行了优化求解. 通过算例分析了材料模型中惩罚参数的选择对优化结果的影响, 并对比研究了本文求解策略的优点.

1 材料属性的有理近似模型

材料属性的有理近似模型 (RAMP)^[16] 是 Svanberg 于 2001 年提出的. 与 SIMP 模型类似, 该模型基于各向同性材料, 在不引入微结构和均匀化过程的情况下, 以设计域中各单元的相对密度作为设计变量, 人为假定材料密度和材料特性之间对应关系. RAMP 模型通过引入惩罚因子对单元中间密度

2007-06-13 收到第 1 稿, 2007-12-05 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10572030, 10721062), 国家重点基础研究 (973) 计划 (2006CB601205) 和教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目 (NCET-04-0272).

2) E-mail: stliu@dlut.edu.cn

值进行惩罚, 使中间密度向 0/1 靠拢, 且插值模型是基于某种有理函数提出的, 可以得到一个凹的设计问题, 确保了结果收敛到离散的 0/1 解. 同时, 与 SIMP 模型相比, RAMP 模型还有其自身的优势.

对于考虑自重的结构拓扑优化问题, 如果采用 SIMP 模型, 当单元密度趋近于零时, 结构自重 $G(x_i)$ 与结构刚度 $K(x_i^3)$ 的比值将趋于无穷大, 这意味着在结构低密度区, 结点位移和结构柔顺度的值趋于无穷. 为了减少这些结点的位移, 优化过程不得不在这些本来需要删除单元的位置添加一部分材料, 从而使得该区域成为“附属”的灰色地带. 而 RAMP 模型即使在单元密度取值很小的时候, 结构自重与结构刚度的比值也不会变得无界, 因此可以很好地消除低密度区的影响.

RAMP 材料插值模型如下

$$E(x_i) = \frac{x_i}{1 + q(1 - x_i)} E_0 \quad (1)$$

其中, $E(x_i)$ 表示插值之后的弹性模量; E_0 为实体材料的弹性模量, q 为惩罚因子; 且 $q \geq 0$; x_i 为设计域中单元 i 的材料密度.

2 结构拓扑优化模型

本文以柔度最小化即结构刚度最大化为优化目标, 以结构整体材料用量为优化的约束条件, 在位移动边界已知的情况下, 基于上述 RAMP 材料密度插值模型建立连续体结构优化设计在自重载荷作用下的数学模型.

优化的数学模型为

$$\left. \begin{aligned} &\text{Find } x_i \\ &\min \quad C = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{i \in NE} \frac{x_i}{1 + q(1 - x_i)} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i \\ &\text{s.t.} \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ &\quad V = \sum_{i \in NE} x_i v_i \leq V_0 f \\ &\quad 0 < x_{\min} \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, NE \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{U}$, $\mathbf{u}_i$ 分别为整体和单元位移列阵, $\mathbf{K}$, $\mathbf{k}_i$ 分别为整体和单元刚度矩阵. V 为实际材料用量, v_i 为单元体积, V_0 为设计域体积, f 为给定材料体分比 (材料体积与设计域体积的比值), NE 为设计域中有限单元的个数. 为了避免有限元方程在求解过程中刚度矩阵的奇异性, 这里单元最小密度并不取零, 而是给定一个小量 $x_{\min}$, 实际计算中,

$x_{\min} = 0.01$. $\mathbf{F}$ 为载荷向量, 本文中主要指结构自重. 由于数值计算中采用 4 结点双线性单元离散设计域, 因此, 第 i 个单元第 j 个结点的载荷为 F_{ij}

$$F_{ij,x} = 0, \quad F_{ij,y} = \frac{1}{4} G_i = -\frac{1}{4} x_i \rho_0 v_i g \quad (3)$$

其中, G_i 为第 i 个单元的自重, ρ_0 为实体材料的质量密度, g 为重力加速度.

优化问题 (2) 采用移动渐近线方法 (the method of moving asymptotes, MMA)^[18] 求解, 由于该优化方法的非单调近似属性, 可以克服柔顺度随单元密度变化的非单调行为. 为了避免优化结果中经常出现的棋盘格、网格依赖性, 本文在优化求解过程中采用平均敏感度过滤 (mean sensitivity filter)^[17] 方法消除结果中的数值不稳现象, 与 Sigmund^[19] 提出的启发式的敏感度过滤 (sensitivity filter) 技术相比, 平均敏感度过滤方法一个最显著的特点是它可以获得离散的 0/1 解. 由于 Sigmund 的敏感度过滤技术无法消除结果拓扑边界的扩散效应, 即结构边界与孔洞之间的灰度单元, 因此虽然采用该技术可以消除数值不稳现象, 但是这给结果的后处理和加工制造过程中拓扑形状的提取造成了困难. 平均敏感度过滤方法不但可以消除结果的棋盘格和网格依赖性, 更重要的是可以获得清晰的 0/1 拓扑, 且操作简单, 容易实现.

平均敏感度过滤是取被过滤单元邻近单元的目标函数敏感度的平均值作为新的单元敏感度值, 具体操作如下

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x_i} &= \left(\sum_{j \in N_e} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) / \left(\sum_{j \in N_e} 1 \right) \\ &\{j \in N_e | \text{dist}(i, j) \leq r_{\min}\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中, $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x_i}$ 表示过滤之后目标函数对第 i 个单元的材料密度的敏感度, $\frac{\partial C}{\partial x_j}$ 表示目标函数对第 i 个单元邻近区域的第 j 个单元的材料密度的敏感度. $\text{dist}(i, j)$ 为单元 i 和单元 j 中心之间的距离, $r_{\min}$ 为过滤半径, N_e 为与单元 i 中心距离不大于 $r_{\min}$ 的单元集.

3 灵敏度分析

通过采用伴随变量敏感度分析可以得到式 (2) 中目标函数的敏感度表达式.

引入一个伴随变量 λ , 可以定义一个新的目标函数 C^*

$$C^* = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} + \lambda (\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}) \quad (5)$$

它在数值上与原目标函数是等价的.

求 C^* 的导数, 可得

$$\frac{\partial C^*}{\partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} = (\mathbf{U}^T + \lambda) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} + (2\mathbf{U}^T + \lambda) \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \quad (6)$$

如取伴随变量 $\lambda = -2\mathbf{U}^T$, 则目标函数的敏度为

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U} + 2\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} \quad (7)$$

4 算例与分析

考虑一个仅受自重作用的二维结构, 结构尺寸和位移边界条件如图 1(a) 所示. 由于结构的对称性, 仅取 1/2 结构进行计算, 边界条件如图 1(b). 采用 20×20 个 4 结点双线性单元离散设计域. 分布在设计域中的实体材料的材料属性为: $E = 1.0, \nu = 0.3, \rho_0 = 1.0$. 重力加速度 $g = 9.8$. 过滤半径 $r_{\min}$ 取 1.5 倍的单元尺寸.

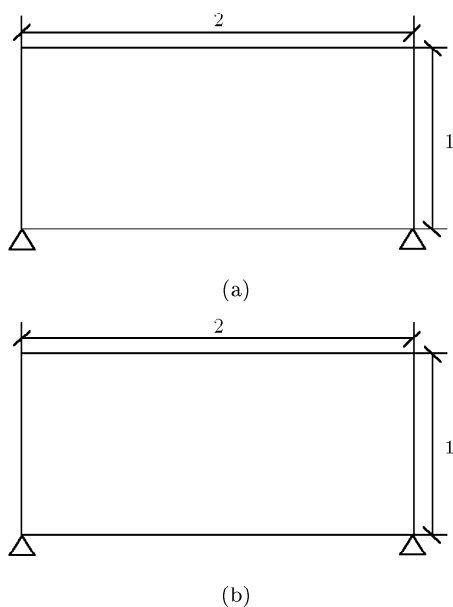


图 1 二维结构设计域 (a) 结构尺寸, 边界条件 (b) 一半结构
Fig.1 Design of a 2D structure. (a) The admissible design domain, boundary conditions (b) Half of the original design domain used as design model according to symmetry

为了便于评价结果的 0/1 化程度, 采用 Wang 和 Wang^[20] 建议的评价方法

$$x^* = \sum_{i=1}^{N^*} x_i / N^*, \quad x_i > x_{\min} \quad (8)$$

其中, N^* 为结果中密度值大于 $x_{\min}$ 的单元个数.

x^* 越接近 1, 说明结果的 0/1 化程度越高. 如果 $x^* = 1$, 则表示完全的 0/1 收敛.

本文分两种情况讨论 RAMP 插值模型中惩罚因子对优化结果的影响.

(1) 给定惩罚因子 $q = 5.0$, 材料体分比 f 分别取 0.5 和 0.8

在给定惩罚因子 ($q = 5.0$) 的条件下, 比较不同的材料体分比上限对应的优化结果. 当材料体分比上限 f 分别取为 0.5 和 0.8 时, 优化后的结构实际体分比、目标值、 x^* 值以及拓扑图如表 1 所示. 仅受自重作用, 最优的结构拓扑为一拱型结构. 由于平均敏度方法的引入, 结果的 0/1 程度很高. 同时, 对于惩罚因子取值较小的情况, 结构的最优拓扑存在着一个“自然”的体积值, 它不受给定体分比上限的限制. 如表 1 所示, 给定体分比 0.5 和 0.8 两种情况, 最优解的实际体分比都为 0.18, 且比给定的体分比值小. 这说明, 考虑自重载荷的情况, 结构拓扑优化的体积约束不是有效约束. 这一特点在 Turteltaub 和 Washabaugh^[12] 以及 Bruyneel 和 Duysinx^[13] 的工作中也有提及. 但是对于实际应用而言, 除自重载荷外, 结构还可能承受其它载荷. 因此, 结构还需要一定的承载能力. 自重作用下结构的拓扑优化是载荷与设计相关的优化问题. 为了研究拓扑相关载荷作用下的设计问题的处理方法, 探讨载荷的拓扑相关性对结构构型的影响, 往往只考虑拓扑相关载荷 (本文考虑的自重载荷) 的作用. 而结构的承载能力通过材料体积用量体现. 因此需要材料体积约束为有效约束以便控制最优结构的材料用量. 在单纯考虑自重载荷作用的情况下, 材料用量的增加在提高承载能力的同时, 也增加了作用载荷. 这势必引起结构柔顺性的增加. 因此, 结构构型的优劣除取决于目标函数值外, 还应该判断材料体积约束是否为有效约束, 以体现其它载荷作用下结构承载力的要求.

(2) 给定材料体分比上限 $f = 0.5$, 惩罚因子 q 分别取 2.0, 5.0, 10.0 和 20.0

在材料体分比上限 f 取为 0.5 的条件下, RAMP 材料模型中的惩罚因子 q 分别取 2.0, 5.0, 10.0 和 20.0 时, 优化后的结构实际体分比、目标值、 x^* 值以及拓扑图如表 2 所示. 由表 2 可见, 随着惩罚因子 q 的增加, 即 RAMP 方法对单元中间密度值惩罚的加强 (各惩罚因子值对应的材料插值函数如图 2 所示), 结果的实际体分比趋近给定体分比, 当 $q = 20.0$ 时,

表 1 惩罚因子一定，不同给定体分比下的优化结果

Table 1 Optimal results for different volume fractions

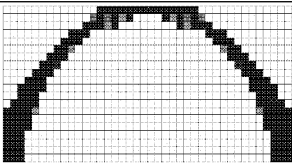
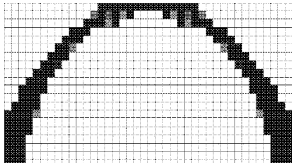
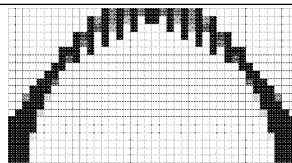
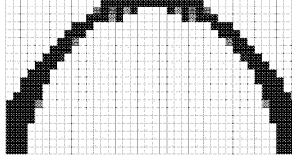
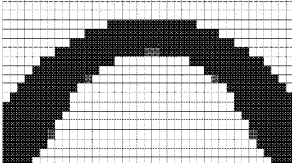
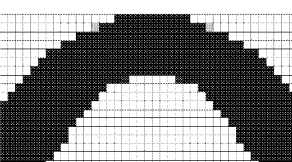
Volume fraction	Actual volume fraction	Objective	x^*	Topology plot
0.5	0.18	26.32	0.92	
0.8	0.18	26.31	0.92	

表 2 材料体分比一定，不同惩罚因子下的优化结果

Table 2 Optimal results for different penalty factors

q	Actual volume fraction	Objective	x^*	Topology plot
2.0	0.18	35.94	0.85	
5.0	0.18	26.32	0.92	
10.0	0.34	65.49	0.99	
20.0	0.50	135.87	0.99	

结构体积约束为有效约束，且结果为离散的 0/1 解。也就是说，仅自重载荷作用下，结构优化问题的体积约束为非有效约束的结论仅适用于惩罚因子取值较小的情况，通过惩罚因子的选择，这里主要指合

理增大惩罚因子的值，可以获得体积约束为有效约束的结果。这对于实际应用来说非常有益，将使得最优结构拓扑的材料用量具有可控制性。

为了表明结果的有效性，在固定惩罚因子 $q =$

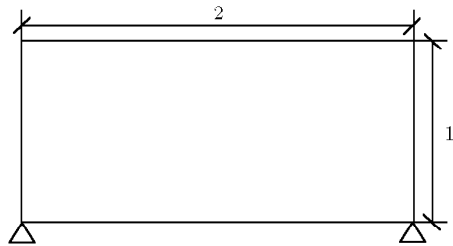


图 2 RAMP 密度插值模型 (1) $q = 2.0$, (2) $q = 5.0$, (3) $q = 10.0$, (4) $q = 20.0$

Fig.2 RAMP material model with penalty factors (1) $q = 2.0$, (2) $q = 5.0$, (3) $q = 10.0$, (4) $q = 20.0$

20.0, 给定体分比为 0.3 的情况下, 优化后的结构实

际体分比、目标值、 x^* 值以及拓扑图如表 3 所示. 结果同样表明, 当 RAMP 方法中的惩罚因子取到 20.0 时, 自重载荷作用下的结构拓扑优化问题的体积约束为有效约束.

以下将本文的求解策略与 RAMP 方法结合 Sigmund 的敏度过滤技术的求解策略进行比较. 后者在材料体分比一定, q 分别取 5.0, 10.0 和 20.0 的优化后的结构实际体分比, 目标值, x^* 值以及拓扑图如表 4 所示. 同样的, 当 q 取值达到 20.0 时, 体积约束为有效约束, 且目标值与表 2 中 $q = 20.0$ 的情况是一致的, 但 0/1 化程度明显不如平均敏度过滤方

表 3 惩罚因子为 20.0, 体分比为 0.3 的优化结果

Table 3 Optimal results for penalty factor equal to 20.0 and volume fraction equal to 0.3

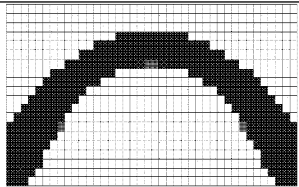
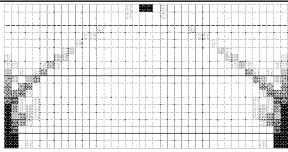
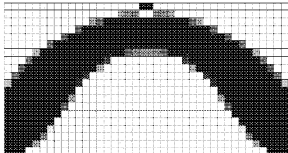
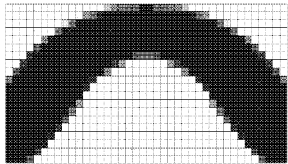
Volume fraction	Actual volume fraction	Objective	x^*	Topology plot
0.3	0.30	55.91	0.99	

表 4 给定材料体分比, 不同惩罚因子下的 (RAMP+Sigmund 敏度过滤) 策略的优化结果

Table 4 Optimal results for different penalty factors using the RAMP material model combined with the sensitivity filtering

q	Actual volume fraction	Objective	x^*	Topology plot
5.0	0.044	15.17	0.10	
10.0	0.41	92.47	0.89	
20.0	0.50	136.91	0.93	

法高. 从表 4 中可以看出, RAMP 方法结合 Sigmund 的敏度过滤技术的策略得到的结果仅在惩罚因子较高时可以得到拓扑, 而对于较低的 q 值则无法形成结构. 因此, 相比较而言, 平均敏度过滤技术更有效.

5 结 论

本文研究了自重载荷作用下的连续体结构的拓扑优化问题, 针对常遇到的柔顺度随单元密度变化的非单调行为、非有效的材料体积约束和 SIMP 方法在材料低密度区出现的“附属”效应等主要问题, 提出了 RAMP 材料插值模型和平均敏度过滤技术相结合的求解策略. 研究表明, 合理增大 RAMP 材料模型中惩罚因子 (例如取值达到 20.0), 材料体积约束为有效约束, 解决了以往研究中仅考虑自重载荷情况下体积约束无法达到有效约束, 材料用量无法控制的问题. 由于平均敏度过滤技术的引入, 采用本求解策略得到的最优拓扑结果的 0/1 化程度高, 可获得离散的黑白拓扑.

参 考 文 献

- 1 Eschenauer HA, Olhoff N. Topology optimization of continuum structures: A review. *Applied Mechanics Reviews*, 2001, 54(4): 331~390
- 2 Bendsoe MP, Sigmund O. *Topology Optimization—Theory, Methods and Applications*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2003
- 3 Bendsoe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71 (2): 197~224
- 4 Yuan Z, Wu C, Li H. Homogenization-based topology design for pure torsion of composite shafts. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 19(3): 241~246
- 5 Zhang WH, Dai GM, Wang FW, et al. Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures. *Acta Mechanica Sinica*, 2007, 23(1): 77~89
- 6 孙士平, 张卫红. 多相材料微结构多目标拓扑优化设计. *力学学报*, 2006, 38(5): 633~638 (Sun Shiping, Zhang Weihong. Multiple objective topology optimal design of multiphase microstructures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(5): 633~638 (in Chinese))
- 7 Bendsoe MP. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1989, 1(4): 193~202
- 8 Xie YM, Steven GP. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, 1993, 49(5): 885~896
- 9 Wang MY, Wang XM, Guo DM. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(1-2): 227~246
- 10 Mei YL, Wang XM. A level set method for structural topology optimization with multi-constraints and multi-materials. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 20(5): 507~518
- 11 荣见华. 一种改进的结构拓扑优化水平集方法. *力学学报*, 2007, 39(2): 253~260 (Rong Jianhua. An improved level set method for structural topology optimization. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(2): 253~260 (in Chinese))
- 12 Turteltaub S, Washabaugh P. Optimal distribution of material properties for an elastic continuum with structure-dependent body force. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 36(30): 4587~4608
- 13 Bruyneel M, Duysinx P. Note on topology optimization of continuum structures including self-weight. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 29(4): 245~256
- 14 Yang XY, Xie YM, Steven GP. Evolutionary methods for topology optimization of continuous structures with design dependent loads. *Computers & Structures*, 2005, 83(12-13): 956~963
- 15 Lopes RA, Stump FV, Silva ECN. Topology optimization of three dimensional structures under self-weight and inertial forces. 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization. Rio de Janeiro, 30 May ~ 03 June, 2005, Brazil
- 16 Stolpe M, Svanberg K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 22 (2): 116~124
- 17 Sigmund O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4): 401~424
- 18 Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359~373
- 19 Sigmund O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. *Mechanics of Structures and Machines*, 1997, 25 (4): 493~524
- 20 Wang MY, Wang SY. Bilateral filtering for structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 63(13): 1911~1938

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF CONTINUUM STRUCTURES SUBJECTED TO SELF WEIGHT LOADS¹⁾

Zhang Hui Liu Shutian²⁾ Zhang Xiong

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipments, Department of Engineering Mechanics,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

Abstract The topology optimization of continuum structures with self weight loads is investigated in this paper. Such difficulties as non-monotonous behavior of the compliance, inactive volume constraint of the optimal topology and the parasitic effect of low density regions are often arisen in topology optimization problems with self weight loads. Solution strategies based on the RAMP material model and the mean sensitivity filtering technique are proposed to get rid of the difficulties and MMA code is used to solve the optimization problem. The influence of penalty factors of the RAMP model on the optimal topology results is investigated. Research results show that the material resource constraint turn to active when the penalty factor is set to an appropriate value (for example, 20.0). In addition, compared with the sensitivity filtering suggested by Sigmund, discrete 0/1 design can be obtained by the mean sensitivity filtering technique.

Key words topology optimization, continuum structure, self weight, RAMP, sensitivity filtering

Received 13 June 2007, revised 5 December 2007.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10572030, 10721062), National Basic Research Program of China (2006CB601205), and Program for New Century Excellent Talents in University of the State Ministry of Education of China (NCET-04-0272).

2) E-mail: stliu@dlut.edu.cn