

正交各向异性材料的弹塑性损伤本构关系¹⁾

傅衣铭 田燕萍²⁾

(湖南大学力学与航空航天学院, 长沙 410082)

摘要 基于弹塑性力学和损伤理论, 建立了一个与应力球张量有关的正交各向异性材料的混合硬化屈服准则, 该准则无量纲化后与各向同性材料的 Mises 准则同构, 在此基础上, 进而建立了混合硬化正交各向异性材料的增量型弹塑性损伤本构方程, 并以具局部损伤的正交各向异性矩形薄板为例, 采用 Galerkin 法和迭代法, 对其弹塑性屈曲问题进行了分析, 讨论了局部损伤对正交各向异性矩形薄板弹塑性屈曲临界应力的影响。

关键词 弹塑性, 正交各向异性薄板, 损伤, 增量理论, 弹塑性屈曲

中图分类号: O344.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2009)01-0067-09

引 言

近年来, 在材料屈服准则和本构关系的研究方面, 基于 Hill 屈服准则, 袁祖培等^[1]克服了假定材料屈服与应力球张量无关这一瑕疵, 设在应力球张量作用下, 正交异性材料还会产生变形, 建立了一个与应力球张量有关的新的屈服准则; 基于二次屈服准则和硬化定律, Maewal^[2]建立了正交各向异性受压敏感材料的塑性本构关系; 万建松等^[3]给出了采用计算机模拟确定各向同性韧性材料真实应力-应变曲线的具体方法, 并采用弹塑性大变形有限元法分析了各向同性和正交各向异性韧性材料光滑圆棒拉伸试件的颈缩问题; 梁立孚等^[4]将一般加载情况下一维全量理论的简单模型推广到一维增量理论, 进而推广到多维增量理论, 建立了一般加载下多维增量理论的本构关系; Alexander^[5]对有限应变下的各种各向同性弹塑性模型进行了比较, 并求解了具有有限应变的二维热弹塑性问题; Zhou 等^[6]在塑性应变空间将应力视为塑性应变的函数, 建立了积分型的弹塑性本构方程, 并与实验结果进行了对比; 樊建平^[7]根据 Mises 屈服准则, 考虑各向异性损伤效应, 推导出四阶对称的弹塑性变形损伤刚度张量, 并根据物体的变形和现时损伤状态构造了材料的损伤演化方程。此外, 在结构的弹塑性稳定性研究方面, 陈铁云等^[8]在其著作中分别基于线弹性理论和塑性流动理论, 分析了单向压缩各向同性筒支矩

形板的弹塑性屈曲问题; Wang 等^[9]运用 Prandtl-Reuss 和 Hencky 理论, 研究了各向同性板的弹塑性屈曲; Chakrabarty^[10]讨论了材料的正交各向异性对矩形板塑性屈曲的影响; Khaled 等^[11]采用有限元法, 分析了带孔矩形板的弹塑性屈曲。然而, 由于材料本身的缺陷或加工成型的工艺问题, 可能会引起结构某些区域的刚度下降, 对结构整体的稳定性产生影响, 而具损伤结构的弹塑性屈曲问题, 至今未见有关文献报导, 尚待进行深入探讨。

1 混合硬化正交各向异性材料的弹塑性损伤本构模型

1.1 弹性损伤本构方程

设正交各向异性损伤主变量 D_1, D_2, D_3 分别为材料沿 x, y, z 方向上的损伤变量, 其定义为

$$D_i = \frac{A_i - \tilde{A}_i}{A_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

式中, A_1, A_2, A_3 分别为材料无损时在 x, y, z 方向上的横截面积; $\tilde{A}_i$ 为损伤后相对应的表观横截面面积。

根据 Lemaitre 的等效应变原理, 若 σ 与 $\bar{\sigma}$ 分别定义为柯西应力和有效应力, 则应力 σ 作用在受损材料上引起的应变与有效应力 $\bar{\sigma}$ 作用在无损材料上引起的应变等价。用四阶张量来表示各向异性损伤

2006-11-28 收到第 1 稿, 2007-07-12 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金资助项目 (10872066)。

2) E-mail: tianyanp@gmail.com

状态, 则有效应力可以表示为

$$\bar{\sigma} = M(D) : \sigma \quad (2)$$

式中 $M(D)$ 为损伤有效张量, 它可表示为六阶对角矩阵^[12], 其对角线元素依次为 $1/m_{11}, 1/m_{22}, 1/m_{33}, 1/m_{23}, 1/m_{31}, 1/m_{12}$, 且 $m_{11} = 1 - D_1, m_{22} = 1 - D_2, m_{33} = 1 - D_3, m_{23} = [(1 - D_2)(1 - D_3)]^{1/2}, m_{31} = [(1 - D_2)(1 - D_1)]^{1/2}, m_{12} = [(1 - D_1)(1 - D_2)]^{1/2}$. 当 $D_1 = D_2 = D_3$ 时蜕化为各向同性损伤的情况, $D_1 = D_2$ 时蜕化为横观各向同性损伤的情况.

根据 Sidoroff 的能量等价原理^[13]: 应力作用在受损材料时产生的弹性余能与作用在无损伤材料时产生的弹性余能在形式上相同. 无损伤材料的弹性余能为

$$W^e(\sigma, 0) = \frac{1}{2} \sigma^T : \bar{C}^{-1} : \sigma \quad (3)$$

其中, $\bar{C}^{-1}$ 为无损伤材料的弹性张量. 而损伤材料的弹性余能为

$$W^e(\bar{\sigma}, D) = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^T : C^{-1} : \bar{\sigma} \quad (4)$$

将式 (2) 代入式 (4), 且定义有效弹性张量为 $\bar{C} = M^{-1} : C : M^{-T}$, 则损伤材料的弹性本构关系为

$$d\sigma_{ij} = \bar{C}_{ijkl}^e d\epsilon_{kl}^e \quad (5)$$

1.2 损伤混合强化规律

在弹塑性变形情况下, 根据文献 [1], 假设: (1) 应力球张量产生塑性变形, 塑性应变可压缩; (2) 由主动应力引起的均匀体积扩张不影响塑性变形; (3) 屈服曲面在应力空间中随着塑性应变的产生不断移动和扩张; (4) 无量纲化后的正交各向异性材料的屈服准则与各向同性材料的 Mises 屈服准则同构. 基于上述假设, 取损伤材料混合硬化的屈服准则为

$$f(\bar{\sigma}_{ij} - b_{ij}) - \kappa(\zeta) = 0 \quad (6)$$

式中, $f(\bar{\sigma}_{ij} - b_{ij})$ 为屈服函数, $\bar{\sigma}_{ij}$ 为材料损伤后的有效应力, b_{ij} 是背应力张量, 它表示随动强化引起的屈服曲面中心的平移, 反映了材料的运动强化; $\bar{\sigma}_{ij} - b_{ij}$ 为有效主动应力, 它是引起塑性变形的主要因素; $\kappa(\zeta)$ 描述屈服面各向同性膨胀或收缩, 即等向强化规律, 一般取作等效塑性应变 $\bar{\epsilon}^p$ 的函数.

为满足假设 (2), 由主动应力 $\bar{\sigma}_{ij} - b_{ij}$ 引起的应变分量满足 $\bar{\epsilon}_{11} = \bar{\epsilon}_{22} = \bar{\epsilon}_{33}$, 即

$$\frac{\bar{\sigma}_{11} - b_{11}}{\alpha_1} = \frac{\bar{\sigma}_{22} - b_{22}}{\alpha_2} = \frac{\bar{\sigma}_{33} - b_{33}}{\alpha_3} \quad (7)$$

其中 $\alpha_1 = \bar{C}_{11} + \bar{C}_{12} + \bar{C}_{13}, \alpha_2 = \bar{C}_{21} + \bar{C}_{22} + \bar{C}_{23}, \alpha_3 = \bar{C}_{31} + \bar{C}_{32} + \bar{C}_{33}$. 假设材料主方向与坐标轴 x, y, z 方向一致, 类似 Hill 屈服准则, 取屈服函数 $f(\bar{\sigma}_{ij} - b_{ij})$ 为如下形式

$$\begin{aligned} f = & K_{12}(\bar{\sigma}'_{11} - \mu_{12}\alpha_{12}\bar{\sigma}'_{22})^2 + \\ & K_{23}(\bar{\sigma}'_{22} - \mu_{23}\alpha_{23}\bar{\sigma}'_{33})^2 + \\ & K_{31}(\bar{\sigma}'_{33} - \mu_{31}\alpha_{31}\bar{\sigma}'_{11})^2 + \\ & 2K_{44}\bar{\sigma}'_{44}{}^2 + 2K_{55}\bar{\sigma}'_{55}{}^2 + 2K_{66}\bar{\sigma}'_{66}{}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $\bar{\sigma}'_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - b_{ij}$; K_{ij}, μ_{ij} 为待定常系数; $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}$ 分别表示正交各向异性材料沿 x, y, z 方向的有效正应力; $\bar{\sigma}_{44}, \bar{\sigma}_{55}, \bar{\sigma}_{66}$ 分别表示对应于坐标平面 $(y, z), (z, x), (x, y)$ 上的有效剪应力, 且有 $\alpha_{12} = \alpha_1/\alpha_2, \alpha_{23} = \alpha_2/\alpha_3, \alpha_{31} = \alpha_3/\alpha_1$.

从式 (8) 可以看出, 当不考虑损伤且 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} \neq 0, \sigma_{44} = \sigma_{55} = \sigma_{66} = 0$ 时, $f \neq 0$, 即假设 (1) 成立, 应力球张量产生塑性变形. 当应力分量满足式 (7), 且 $\mu_{12} = \mu_{23} = \mu_{31} = 1$ 时, $f = 0$, 假设 (2) 成立. 当背应力 b_{ij} 在复杂塑性应变路径作用下不断演化时, 塑性屈服曲面中心不断移动, 同时, 屈服曲面还随着硬化参量 κ 的变化不断扩张, 假设 (3) 成立. 若不考虑运动硬化和损伤, $b_{ij} = 0$, 则有 $\bar{\sigma}'_{ij} = \sigma_{ij}$, 再令 $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = 1$, 式 (8) 退化为 Hill 于 1948 年提出的关于正交各向异性材料的屈服函数.

为满足假设 (4), 对屈服函数无量纲化, 比较 Mises 屈服准则, 选取常系数

$$\left. \begin{aligned} K_{12} &= \frac{1}{2\Sigma_{11}^2}, K_{23} = \frac{1}{2\Sigma_{22}^2}, K_{31} = \frac{1}{2\Sigma_{33}^2} \\ K_{44} &= \frac{1}{2\Sigma_{44}^2}, K_{55} = \frac{1}{2\Sigma_{55}^2}, K_{66} = \frac{1}{2\Sigma_{66}^2} \\ \mu_{12} &= \frac{\Sigma_{11}}{\alpha_{12}\Sigma_{22}}, \mu_{23} = \frac{\Sigma_{22}}{\alpha_{23}\Sigma_{33}}, \mu_{31} = \frac{\Sigma_{33}}{\alpha_{31}\Sigma_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中, $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}$ 分别为正交各向异性材料主轴 x, y, z 方向的屈服应力; $\Sigma_{44}, \Sigma_{55}, \Sigma_{66}$ 分别对应于坐标平面 $(y, z), (z, x), (x, y)$ 上的纯剪切屈服应力. 则屈服函数式 (8) 可写为如下的无量纲形式

$$\begin{aligned} \bar{f} = & \frac{1}{2}[(\bar{\sigma}'_{11} - \bar{\sigma}'_{22})^2 + (\bar{\sigma}'_{22} - \bar{\sigma}'_{33})^2 + \\ & (\bar{\sigma}'_{33} - \bar{\sigma}'_{11})^2] + \bar{\sigma}'_{44}{}^2 + \bar{\sigma}'_{55}{}^2 + \bar{\sigma}'_{66}{}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\tilde{\sigma}'_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}/\Sigma_{ij}$ (i, j 不求和). 根据式 (10), 定义等效主动应力为

$$\bar{\sigma} = \frac{K}{\sqrt{2}} [(\tilde{\sigma}'_{11} - \tilde{\sigma}'_{22})^2 + (\tilde{\sigma}'_{22} - \tilde{\sigma}'_{33})^2 + (\tilde{\sigma}'_{33} - \tilde{\sigma}'_{11})^2 + 2(\tilde{\sigma}'_{44}^2 + \tilde{\sigma}'_{55}^2 + \tilde{\sigma}'_{66}^2)]^{1/2} \quad (11)$$

式中具应力量纲的常数 K 待定, 它可由简单应力状态下的试验来确定. 若通过 x 方向的单向拉伸试验, 不计损伤, 由于 $\bar{\sigma} = \sigma_x$, 则可确定 $K = \Sigma_{11}$.

将屈服函数 f 取为

$$f = \frac{K^2}{2} [(\tilde{\sigma}'_{11} - \tilde{\sigma}'_{22})^2 + (\tilde{\sigma}'_{22} - \tilde{\sigma}'_{33})^2 + (\tilde{\sigma}'_{33} - \tilde{\sigma}'_{11})^2 + 2(\tilde{\sigma}'_{44}^2 + \tilde{\sigma}'_{55}^2 + \tilde{\sigma}'_{66}^2)] \quad (12)$$

根据式 (6) 和 (12), 则混合硬化屈服函数可取为

$$\begin{aligned} & \frac{K^2}{2} [(\tilde{\sigma}'_{11} - \tilde{\sigma}'_{22})^2 + (\tilde{\sigma}'_{22} - \tilde{\sigma}'_{33})^2 + (\tilde{\sigma}'_{33} - \tilde{\sigma}'_{11})^2 + 2(\tilde{\sigma}'_{44}^2 + \tilde{\sigma}'_{55}^2 + \tilde{\sigma}'_{66}^2)] - \\ & [\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon}^p)]^2 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\bar{\sigma}$ 是等效应力, 它是等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 的函数, 可通过单向拉伸试验曲线 σ - ε 得到.

根据式 (2), 以及 $\tilde{\sigma}'_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - b_{ij}$ 和 $\tilde{\sigma}'_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}/\Sigma_{ij}$, 有

$$\sigma_{ij} = m_{ij}(\Sigma_{ij}\tilde{\sigma}'_{ij} + b_{ij}) \quad (i, j \text{ 不求和}) \quad (14)$$

记 $a_{ij} = \frac{1}{\Sigma_{ij}m_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}'_{ij}} (i, j \text{ 不求和})$, 则相关流动法则为

$$d\varepsilon^p_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda a_{ij} \quad (15)$$

将式 (12) 代入上式, 得

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon^p_{11} &= d\lambda \frac{K^2}{m_{11}\Sigma_{11}} (2\tilde{\sigma}'_{11} - \tilde{\sigma}'_{22} - \tilde{\sigma}'_{33}) \\ d\varepsilon^p_{44} &= 2d\lambda \frac{K^2}{m_{23}\Sigma_{44}} \tilde{\sigma}'_{44} \\ d\varepsilon^p_{22} &= d\lambda \frac{K^2}{m_{22}\Sigma_{22}} (2\tilde{\sigma}'_{22} - \tilde{\sigma}'_{33} - \tilde{\sigma}'_{11}) \\ d\varepsilon^p_{55} &= 2d\lambda \frac{K^2}{m_{31}\Sigma_{55}} \tilde{\sigma}'_{55} \\ d\varepsilon^p_{33} &= d\lambda \frac{K^2}{m_{33}\Sigma_{33}} (2\tilde{\sigma}'_{33} - \tilde{\sigma}'_{11} - \tilde{\sigma}'_{22}) \\ d\varepsilon^p_{66} &= 2d\lambda \frac{K^2}{m_{12}\Sigma_{66}} \tilde{\sigma}'_{66} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将式 (16) 代入式 (11), 得

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{3\sqrt{2}Kd\lambda} \{ (m_{11}\Sigma_{11}d\varepsilon^p_{11} - m_{22}\Sigma_{22}d\varepsilon^p_{22})^2 + \\ & (m_{22}\Sigma_{22}d\varepsilon^p_{22} - m_{33}\Sigma_{33}d\varepsilon^p_{33})^2 + \\ & (m_{33}\Sigma_{33}d\varepsilon^p_{33} - m_{11}\Sigma_{11}d\varepsilon^p_{11})^2 + \\ & \frac{9}{2} [(m_{23}\Sigma_{44}d\varepsilon^p_{44})^2 + (m_{31}\Sigma_{55}d\varepsilon^p_{55})^2 + \\ & (m_{12}\Sigma_{66}d\varepsilon^p_{66})^2] \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (17)$$

定义等效塑性应变增量为

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}^p &= \frac{\sqrt{2}}{3K} \{ (m_{11}\Sigma_{11}d\varepsilon^p_{11} - m_{22}\Sigma_{22}d\varepsilon^p_{22})^2 + \\ & (m_{22}\Sigma_{22}d\varepsilon^p_{22} - m_{33}\Sigma_{33}d\varepsilon^p_{33})^2 + \\ & (m_{33}\Sigma_{33}d\varepsilon^p_{33} - m_{11}\Sigma_{11}d\varepsilon^p_{11})^2 + \\ & \frac{9}{2} [(m_{23}\Sigma_{44}d\varepsilon^p_{44})^2 + (m_{31}\Sigma_{55}d\varepsilon^p_{55})^2 + \\ & (m_{12}\Sigma_{66}d\varepsilon^p_{66})^2] \}^{1/2} \end{aligned} \quad (18)$$

由式 (17) 和 (18) 有

$$d\bar{\varepsilon}^p = 2\bar{\sigma}d\lambda \quad (19)$$

塑性应变可分解为

$$d\varepsilon^p_{ij} = d\varepsilon^{p(i)}_{ij} + d\varepsilon^{p(j)}_{ij} \quad (20)$$

其中, $d\varepsilon^{p(i)}_{ij}$ 为各向同性强化塑性应变增量, $d\varepsilon^{p(j)}_{ij}$ 为随动强化塑性应变增量, 它们可分别表示为

$$d\varepsilon^{p(i)}_{ij} = \alpha d\varepsilon^p_{ij}, \quad d\varepsilon^{p(j)}_{ij} = (1 - \alpha) d\varepsilon^p_{ij} \quad (21)$$

式中, α 为混合强化参数, 可通过试验测定, 其取值范围为 $(-1, 1)$. 当 $\alpha = 1$ 时表示等向强化, $\alpha = 0$ 时为随动强化, α 取负值时表示屈服曲面收缩, α 取其它值时为混合强化. 背应力张量可以表示为塑性应变张量的线性函数, 即

$$db_{ij} = c d\varepsilon^{p(j)}_{ij} \quad (22)$$

其中 c 为材料常数. 根据式 (15) 和 (21), 上式可写为

$$db_{ij} = c(1 - \alpha)a_{ij}d\lambda \quad (23)$$

1.3 弹塑性损伤本构方程

假定总应变增量由弹性与塑性应变增量两部分构成

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^e_{ij} + d\varepsilon^p_{ij} \quad (24)$$

则式 (5) 可表示为

$$d\sigma_{ij} = \bar{C}_{ijkl}^e(d\varepsilon_{kl} - a_{kl}d\lambda) \quad (25)$$

根据一致性条件, 且令 $H' = d\bar{\sigma}/d\varepsilon^p$, 由式 (13) 有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} d\bar{\sigma}_{ij}' - 2\bar{\sigma}H'd\varepsilon^p = 0 \quad (26)$$

将式 (12), (14), (19) 和 (23) 代入上式, 得

$$a_{ij}\bar{C}_{ijkl}^e(d\varepsilon_{kl} - a_{kl}d\lambda) - a_{ij}h_{ij}c(1-\alpha)d\lambda - 4\bar{\sigma}^2H'd\lambda = 0 \quad (27)$$

式中, $h_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}(i, j \text{ 不求和})$, 且令

$$\left. \begin{aligned} X_{kl} &= a_{ij}\bar{C}_{ijkl}^e \\ S &= a_{ij}\bar{C}_{ijkl}^e a_{kl} + a_{ij}h_{ij}c(1-\alpha) + 4\bar{\sigma}^2H' \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

则由式 (27), 有

$$d\lambda = \frac{X_{ij}d\varepsilon_{ij}}{S} \quad (29)$$

将式 (29) 代入式 (25), 得增量型弹塑性损伤本构方程为

$$d\sigma_{ij} = (\bar{C}_{ijkl}^e - \bar{C}_{ijkl}^p)d\varepsilon_{kl} = \bar{C}_{ijkl}^{ep}d\varepsilon_{kl} \quad (30)$$

式中, $\bar{C}_{ijkl}^p = \frac{X_{ij}X_{kl}}{S}$.

2 具损伤正交各向异性矩形薄板的弹塑性

屈曲分析

考虑图 1 所示四边简支矩形薄板, 其长为 a , 宽为 b , 厚为 h . 取坐标系 oxy , 其参考平面 ($z=0$) 位于未变形板的中面. 在 x, y 方向的边界上分别施

加均布载荷 P_x, P_y , 且定义 $k = P_y/P_x$. 假定板内损伤区域的形状为矩形 ($a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2$), 其中心位置为 (c, d) , 损伤面积与总面积之比为 S_d , 损伤主变量 D_1, D_2 分别与坐标轴 x, y 的方向一致, 忽略 z 方向损伤, 即 $D_3 = 0$, 而损伤区域内各点的损伤程度都相同. 根据薄板理论的 Kirchhoff 假设, 中面内各点平行于中面的位移为零, 板处于平面应力状态. 则板屈曲前的应力状态为

$$\sigma_x = \sigma_{11}, \quad \sigma_y = \sigma_{22}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (31)$$

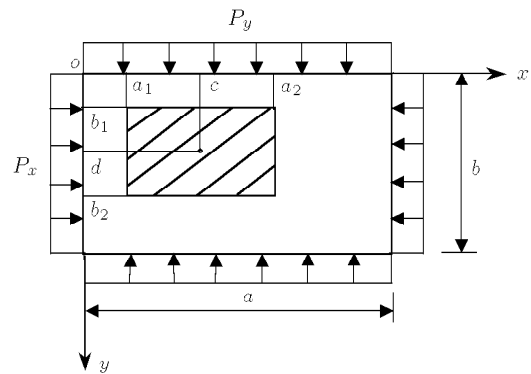


图 1 含损伤矩形薄板示意图

Fig.1 Schematic diagram of a rectangular thin plate

根据 Shanley 理论, 假设薄板在发生分岔屈曲的瞬时, 板内无卸载, 忽略“运动硬化”的影响, $b_{ij} = 0$. 则由式 (30) 和 (31), 得薄板的增量型弹塑性本构关系为

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1 m_{11}^2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - \frac{1}{S \Sigma_{11}^4 \Sigma_{22}^2 m_{22}^2 (1 - \nu_{12}\nu_{21})^2} \left\{ E_1 K^4 \left[\Sigma_{22} m_{22} (2E_1 \Sigma_{22} - E_2 \Sigma_{11} \nu_{12}) \sigma_{11} + \Sigma_{11} m_{11} (-E_1 \Sigma_{22} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2E_2 \Sigma_{11} \nu_{12}) \sigma_{22} \right] \left[\Sigma_{22} m_{22} (2\Sigma_{22} - \Sigma_{11} \nu_{21}) \sigma_{11} + \Sigma_{11} m_{11} (-\Sigma_{22} + 2\Sigma_{11} \nu_{21}) \sigma_{22} \right] \right\} \\ Q_{12} &= \frac{E_1 m_{11} m_{22} \nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - \frac{1}{S \Sigma_{11}^4 \Sigma_{22}^4 m_{11} m_{22} (1 - \nu_{12}\nu_{21})^2} \left\{ E_1 K^4 \left[\Sigma_{22} m_{22} (2\Sigma_{22} - \Sigma_{11} \nu_{21}) \sigma_{11} + \Sigma_{11} m_{11} (-\Sigma_{22} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2\Sigma_{11} \nu_{21}) \sigma_{22} \right] \left[\Sigma_{22} m_{22} (-E_2 \Sigma_{11} + 2E_1 \Sigma_{22} \nu_{21}) \sigma_{11} + \Sigma_{11} m_{11} (2E_2 \Sigma_{11} - E_1 \Sigma_{22} \nu_{21}) \sigma_{22} \right] \right\} \\ Q_{21} &= \frac{E_2 m_{11} m_{22} \nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} - \frac{1}{S \Sigma_{11}^4 \Sigma_{22}^4 m_{11} m_{22} (1 - \nu_{12}\nu_{21})^2} \left\{ E_2 K^4 \left[\Sigma_{22} m_{22} (-\Sigma_{11} + 2\Sigma_{22} \nu_{12}) \sigma_{11} + \Sigma_{11} m_{11} (2\Sigma_{11} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \Sigma_{22} \nu_{12}) \sigma_{22} \right] \left[\Sigma_{22} m_{22} (-E_2 \Sigma_{11} + 2E_1 \Sigma_{22} \nu_{21}) \sigma_{11} + \Sigma_{11} m_{11} (2E_2 \Sigma_{11} - E_1 \Sigma_{22} \nu_{21}) \sigma_{22} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
Q_{22} &= \frac{E_2 m_{22}^2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} - \frac{1}{S \Sigma_{11}^4 \Sigma_{22}^2 m_{11}^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})^2} \left\{ E_2 K^4 \left[\Sigma_{22} m_{22} (-\Sigma_{11} + 2 \Sigma_{22} \nu_{12}) \sigma_{11} + \Sigma_{11} m_{11} (2 \Sigma_{11} - \right. \right. \\
&\quad \left. \Sigma_{22} \nu_{12}) \sigma_{22} \right] \left[\Sigma_{22} m_{22} (-E_2 \Sigma_{11} + 2 E_1 \Sigma_{22} \nu_{21}) \sigma_{11} + \Sigma_{11} m_{11} (2 E_2 \Sigma_{11} - E_1 \Sigma_{22} \nu_{21}) \sigma_{22} \right] \Big\} \\
Q_{66} &= G_{12} m_{12}^2 \\
S &= \frac{1}{\Sigma_{11}^4 \Sigma_{22}^4 m_{11}^2 m_{22}^2 (-1 + \nu_{12} \nu_{21})} \left\{ E_2 \Sigma_{11} K^4 (\Sigma_{22} m_{22} \sigma_{11} - 2 \Sigma_{11} m_{11} \sigma_{22}) [\Sigma_{22} m_{22} (-\Sigma_{11} + 2 \Sigma_{22} \nu_{12}) \sigma_{11} + \right. \\
&\quad \Sigma_{11} m_{11} (2 \Sigma_{11} - \Sigma_{22} \nu_{12}) \sigma_{22}] - E_1 \Sigma_{22} K^4 (2 \Sigma_{22} m_{22} \sigma_{11} - \Sigma_{11} m_{11} \sigma_{22}) (\Sigma_{22} m_{22} (2 \Sigma_{22} - \Sigma_{11} \nu_{21}) \sigma_{11} + \\
&\quad \left. \Sigma_{11} m_{11} (-\Sigma_{22} + 2 \Sigma_{11} \nu_{21}) \sigma_{22}) \right\} + 4 H' \Sigma_{11}^4 \Sigma_{22}^4 m_{11}^2 m_{22}^2 (-1 + \nu_{12} \nu_{21}) \bar{\sigma}^2
\end{aligned} \quad (33')$$

若 w 为板内任一点沿 z 方向上的位移, 则板内任一点的应变为

$$\varepsilon_x = z \chi_x, \quad \varepsilon_y = z \chi_y, \quad \gamma_{xy} = z \chi_{xy} \quad (34)$$

其中 $\chi_x = -w_{,xx}$, $\chi_y = -w_{,yy}$, $\chi_{xy} = -2w_{,xy}$, $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ 分别表示曲率及扭率. 根据式 (34), 得板内任一点的应变增量为

$$d\varepsilon_x = z d\chi_x, \quad d\varepsilon_y = z d\chi_y, \quad d\gamma_{xy} = z d\chi_{xy} \quad (35)$$

定义 M_x, M_y, M_{xy} 为板内应力的合力偶, 则有

$$\begin{aligned}
[dM_x \quad dM_y \quad dM_{xy}] &= \\
&\int_{-h/2}^{h/2} [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\sigma_{xy}] z dz
\end{aligned} \quad (36)$$

将式 (32) 和式 (34) 代入上式, 得

$$\begin{Bmatrix} dM_x \\ dM_y \\ dM_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\chi_x \\ d\chi_y \\ d\chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

板内任一微元增量形式的平衡方程为

$$\begin{aligned}
dM_{x,xx} + 2dM_{xy,xy} + dM_{y,yy} + \\
(N_x d\chi_x + 2N_{xy} d\chi_{xy} + N_y d\chi_y) = 0
\end{aligned} \quad (38)$$

将式 (37) 代入上式, 由于 $N_x = -P_x = -h\sigma_{11}$, $N_y = -P_y = -k \cdot h\sigma_{11}$, $N_{xy} = -P_{xy} = 0$, 得板的屈曲平衡方程为

$$\begin{aligned}
\frac{h^3}{12} [Q_{11} dw_{,xxxx} + (Q_{12} + Q_{21} + 4Q_{66}) dw_{,xxyy} + \\
Q_{22} dw_{,yyyy}] + h\sigma_{11} (dw_{,xx} + k dw_{,yy}) = 0
\end{aligned} \quad (39)$$

引入如下无量纲参数

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \lambda_1, \quad \frac{b}{h} = \lambda_2, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \\
W &= \frac{w}{h}, \quad \sigma_{cr} = \frac{\sigma_{11}}{\Sigma_{11}}, \quad \bar{Q}_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\Sigma_{11}} \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
\bar{a}_i &= \frac{a_i}{a}, \quad \bar{b}_i = \frac{b_i}{a} \quad (i = 1, 2) \\
\bar{c} &= \frac{c}{a}, \quad \bar{d} = \frac{d}{b}
\end{aligned} \quad (40)$$

则无量纲的屈曲平衡方程为

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} dW_{,\xi\xi\xi\xi} / \lambda_1^2 + (\bar{Q}_{12} + \bar{Q}_{21} + 4\bar{Q}_{66}) dW_{,\xi\xi\eta\eta} + \\
\bar{Q}_{22} \lambda_1^2 dW_{,\eta\eta\eta\eta} + 12\lambda_2^2 \sigma_{cr} (dW_{,\xi\xi} + k \lambda_1^2 dW_{,\eta\eta}) = 0
\end{aligned} \quad (41)$$

对于四边简支薄板, 其边界条件为

$$\begin{aligned}
\xi = 0, 1: \quad W = 0, \quad W_{,\xi\xi} = 0 \\
\eta = 0, 1: \quad W = 0, \quad W_{,\eta\eta} = 0
\end{aligned} \quad (42)$$

设薄板屈曲时挠曲面的形式函数为

$$W(\xi, \eta) = \bar{W} \sin \pi \xi \sin \pi \eta \quad (43)$$

显然上述形式函数满足式 (42) 中的全部边界条件. 式 (43) 相应的增量形式为

$$dW(\xi, \eta) = d\bar{W} \sin \pi \xi \sin \pi \eta \quad (44)$$

令在非受损区 $\bar{Q}_{ij} = r_{ij}$, 在受损区 $\bar{Q}_{ij} = s_{ij}$, 将式 (44) 代入式 (41), 并应用 Galerkin 法, 可得到方程

$$\begin{aligned}
d\bar{W} & \left[\int_0^{\bar{a}_1} \int_0^1 (r_{11}\pi^4/\lambda_1^2 + (r_{12} + r_{21} + 4r_{66})\pi^4 + r_{22}\lambda_1^2\pi^4) \sin^2 \pi\xi \sin^2 \pi\eta d\xi d\eta + \right. \\
& \int_{\bar{a}_1}^{\bar{a}_2} \int_0^{\bar{b}_1} (r_{11}\pi^4/\lambda_1^2 + (r_{12} + r_{21} + 4r_{66})\pi^4 + r_{22}\lambda_1^2\pi^4) \sin^2 \pi\xi \sin^2 \pi\eta d\xi d\eta + \\
& \int_{\bar{a}_1}^{\bar{a}_2} \int_{\bar{b}_1}^{\bar{b}_2} (s_{11}\pi^4/\lambda_1^2 + (s_{12} + s_{21} + 4s_{66})\pi^4 + s_{22}\lambda_1^2\pi^4) \sin^2 \pi\xi \sin^2 \pi\eta d\xi d\eta + \\
& \int_{\bar{a}_1}^{\bar{a}_2} \int_{\bar{b}_2}^1 (r_{11}\pi^4/\lambda_1^2 + (r_{12} + r_{21} + 4r_{66})\pi^4 + r_{22}\lambda_1^2\pi^4) \sin^2 \pi\xi \sin^2 \pi\eta d\xi d\eta + \\
& \left. \int_{\bar{a}_2}^1 \int_0^1 (r_{11}\pi^4/\lambda_1^2 + (r_{12} + r_{21} + 4r_{66})\pi^4 + r_{22}\lambda_1^2\pi^4) \sin^2 \pi\xi \sin^2 \pi\eta d\xi d\eta - \right. \\
& \left. \int_0^1 \int_0^1 (12\lambda_2^2\sigma_{cr}\pi^2(1 + k\lambda_1^2) \sin^2 \pi\xi \sin^2 \pi\eta d\xi d\eta) \right] = 0
\end{aligned}$$

这是关于 $d\bar{W}$ 的齐次线性方程, 为使 $dW(\xi, \eta)$ 有非零解, dW 前的系数必须为零, 从而可求得板屈曲时的临界应力 σ_{cr} .

在求解中, 需要判断正交各向异性薄板的屈曲性质, 首先按照弹性本构关系计算板的弹性屈曲临界应力 σ_{cr}^e ($\sigma_{cr}^e = \sigma_{cr}/\sigma_s^x$, σ_s^x 为在给定诱导载荷比 k 值时, 使板产生塑性屈服的 x 方向的应力), 若 $\sigma_{cr}^e < 1$, 则表示板在达到其塑性屈服极限以前已发生屈曲, 即发生弹性屈曲, 计算所得结果即为板的弹性屈曲临界应力 (在后面的算例中用虚线表示); 若 $\sigma_{cr}^e > 1$, 则表示板在超过其塑性屈服极限后才屈曲, 即发生了弹塑性屈曲, 此时, 要按照弹塑性本构关系计算板的屈曲临界应力. 由于弹塑性应力 - 应变关系与当前应力水平和变形的历史有关, 必须进行迭代运算, 以确定弹塑性屈曲临界应力. 本文将等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 作为内变量, 计算产生该等效塑性应变的外载荷和对应的弹塑性屈曲临界载荷, 若两者相等, 则当前外载荷的值所对应的应力即为所求的弹塑性屈曲临界应力 (在后面的算例中用实线表示).

3 算例与讨论

为验证本文理论与算法的正确性, 在不考虑损伤的情况下, 将本文各方程退化到各向同性板的弹塑性屈曲问题, 且取几何参数及材料参数与文献 [9] 的相同, 图 2 显示了仅在 x 方向有面内压力 P_x 作用时, 各向同性矩形板的弹塑性屈曲临界应力随跨厚比的变化规律, 且与文献 [9] 进行比较. 从图中可看出, 两者非常吻合, 可以说明本文方法的正确性.

下面讨论几何参数和局部损伤对正交各向异性矩形板屈曲临界应力的影响. 在以下所有算例中,

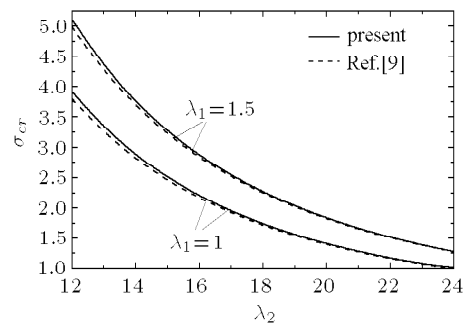


图 2 跨厚比对各向同性矩形板弹塑性屈曲临界应力的影响
Fig.2 Effect of width to thickness ratios on elasto-plastic critical buckling stress for isotropic rectangular plates

用到的材料参数和损伤主变量取为 $E_1 = 250$ GPa, $E_2 = 150$ GPa, $G_{12} = 50$ GPa, $\Sigma_{11} = 550$ MPa, $\Sigma_{22} = 400$ MPa, $\Sigma_{66} = 200$ MPa, $\nu_{12} = 0.3$, $D_1 = 0.4$, $D_2 = 0.3$.

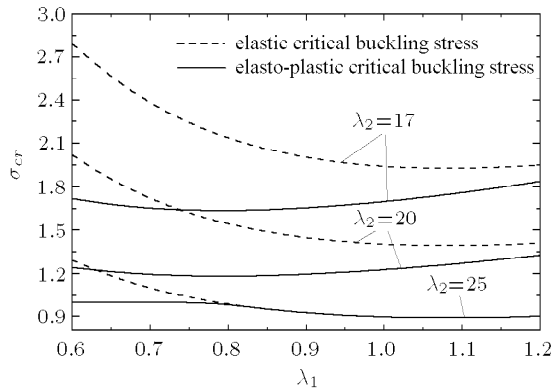
图 3 和图 4 中的损伤区域各参数为

$$(\bar{c}, \bar{d}) = (0.5, 0.5), S_d = 36\%, \bar{a}_1 = 0.2$$

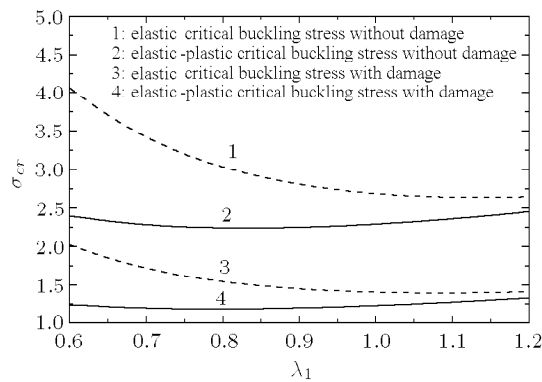
$$\bar{b}_1 = 0.2, \bar{a}_2 = 0.8, \bar{b}_2 = 0.8$$

图 3(a) 所示为单向受压 ($k = 0$) 下几何参数对具损伤正交各向异性矩形板屈曲临界应力的影响. 从图中可看出, 随着长宽比 λ_1 的增加, 板的弹性屈曲临界应力和弹塑性屈曲临界应力之差减小, 但弹塑性屈曲临界应力总是小于相应的弹性屈曲临界应力; 随着跨厚比 λ_2 的增加, 即板越薄, 其弹塑性屈曲临界应力和弹性屈曲临界应力越小, 板越容易失稳; 当 $\lambda_2 = 25$, $\lambda_1 \geq 0.8$ 时, 板的弹性屈曲临界应力曲线和弹塑性屈曲临界应力曲线重合, 表明此时板仅在弹性阶段失稳, 即发生弹性屈曲. 图 3(b) 显示了单向受压下损伤对板屈曲临界应力的影响, 图中取跨厚比 $\lambda_2 = 20$. 从图中可以看出, 在相同的几

何参数下, 考虑损伤时板的弹塑性屈曲临界应力小于弹性屈曲临界应力, 不考虑损伤时板的弹塑性屈曲临界应力也小于弹性屈曲临界应力, 且考虑损伤时的临界应力比不考虑损伤时明显减小.



(a)

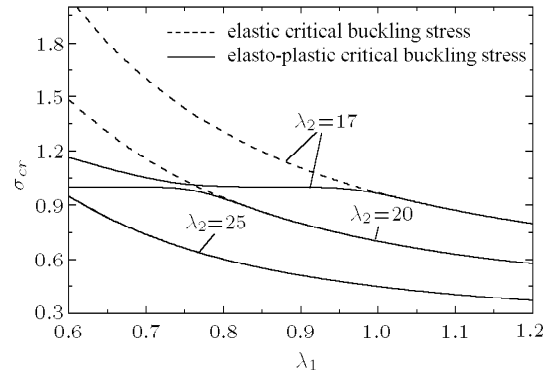


(b)

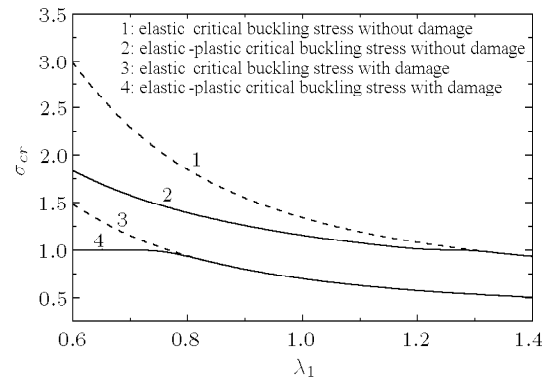
图 3 单向受压 ($k=0$) 下几何参数对正交各向异性矩形板临界应力的影响

Fig.3 Effect of geometric parameters on critical buckling stress of orthotropic rectangular plates under the acting of uniaxial load ($k=0$)

图 4(a) 所示为双向受压 ($k=1$) 下几何参数对具损伤正交各向异性矩形板屈曲临界应力的影响. 从图中可以看出, 随着跨厚比 λ_2 的增加, 板的弹性屈曲临界应力和弹塑性屈曲临界应力的重合范围增大, 当 $\lambda_2=25$ 时两者完全重合, 表示板越薄, 越容易在弹性阶段失稳, 仅发生弹性屈曲. 图 4(b) 显示了双向受压下损伤对板屈曲临界应力的影响, 图中取跨厚比 $\lambda_2=20$. 从图中可以看出, 当 $0.8 < \lambda_1 < 1.3$ 时, 不考虑损伤时板发生弹塑性屈曲, 而考虑损伤时仅发生弹性屈曲, 且考虑损伤时的屈曲临界应力小



(a)



(b)

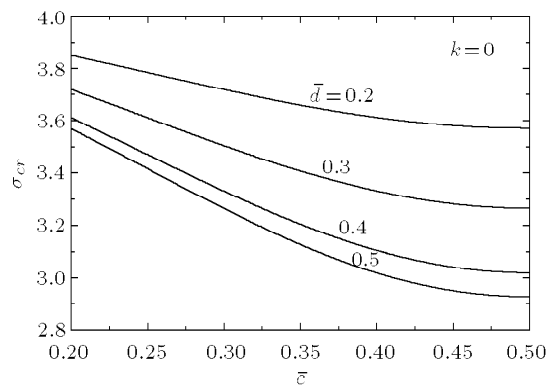
图 4 双向受压 ($k=1$) 下几何参数对正交各向异性矩形板临界应力的影响

Fig.4 Effect of geometric parameters on the critical buckling stress of orthotropic rectangular plates under the acting of equibiaxial load ($k=1$)

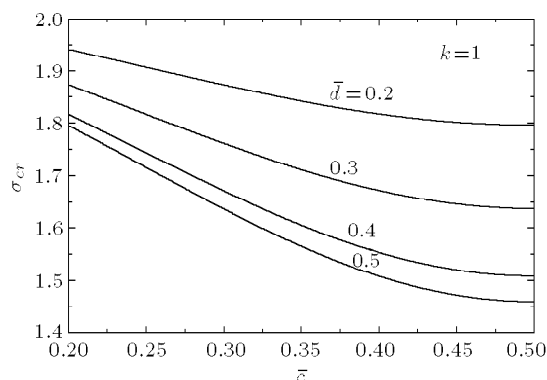
于不考虑损伤时的临界应力. 比较图 3 与图 4, 可以看出, 尺寸一定时, 双向受压下板的屈曲临界应力小于单向受压板, 说明双向受压板比单向受压板更容易失稳.

图 5 所示为损伤区域位置对正交各向异性矩形板屈曲临界应力的影响, 图中取 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=15$, $S_d=16\%$. 从图中可以看出, 单向受压和双向受压下损伤区域位置不同对板屈曲临界应力的影响规律相同, 当板受损情况一样时, 双向受压下板的屈曲临界应力大约只有单向受压下的一半; 损伤区域越靠近板中心, 板的屈曲临界应力越小, 当损伤中心与板中心重合, 即为 $(0.5, 0.5)$ 时, 屈曲临界应力最低, 此时板最容易发生失稳.

图 6 显示了单向受压和双向受压下, 损伤面积对正交各向异性矩形板弹性屈曲临界应力和弹塑性



(a)



(b)

图 5 损伤区域位置对正交各向异性矩形板临界应力的影响

Fig.5 Effect of the position of damage region on the critical buckling stress of orthotropic rectangular plates

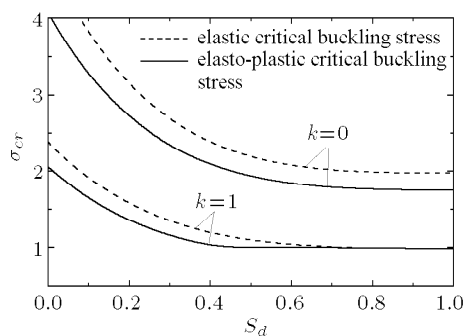


图 6 损伤面积对正交各向异性矩形板临界应力的影响

Fig.6 Effect of damage area on the critical buckling stress of orthotropic rectangular plates

屈曲临界应力的影响, 图中设板受损区域的形状为正方形, 取 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 15, (\bar{c}, \bar{d}) = (0.5, 0.5)$. 从图中可以看出, 单向受压和双向受压下损伤面积对板屈曲临界应力的影响规律相同, 随着损伤面积比 S_d 的增大, 板屈曲临界应力显著减小, 但当 S_d 超过 50% 后, 临界应力仅有微小变化。

4 结 论

本文基于塑性应变可压缩、材料屈服与应力球张量有关、由主动应力引起的均匀体积扩张不影响塑性变形的假设, 建立了与应力球张量有关的正交各向异性损伤材料的混合硬化屈服准则, 在此基础上, 进而建立了混合硬化正交各向异性材料的增量型弹塑性损伤本构方程, 研究了具损伤正交各向异性薄板的弹塑性屈曲问题。由数值算例的结果可知, 当板的长宽比和跨厚比较大时, 发生弹性屈曲, 随着长宽比和跨厚比的减小, 板逐渐发生弹塑性屈曲, 且弹塑性屈曲临界应力小于弹性屈曲临界应力; 考虑局部损伤时板的屈曲临界应力比不考虑局部损伤时明显降低, 且损伤面积越大、损伤区域位置越靠近板中心, 板越容易丧失稳定, 但当损伤面积增大到一定程度时, 其屈曲临界应力却仅有小的变化。

参 考 文 献

- 1 袁祖培, 郑耀. 对于正交异性材料屈服与流动的探讨. 应用数学和力学, 1990, 11(3): 233~238(Yuan Zupei, Zheng Yao. A study on yield and flow of orthotropic materials. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, 11(3): 233~238(in Chinese))
- 2 Maewal A. A class of theories of plasticity of anisotropic and pressure sensitive materials. *Acta Mechanica*, 1999, 134(1): 109~114
- 3 万建松, 岳珠峰. 正交各向异性韧性材料应力-应变关系. 力学学报, 2003, 35(4): 493~497(Wan Jiansong, Yue Zhufeng. On the study of stress vs. strain of ductile orthotropic elastic-plastic material. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(4): 493~497(in Chinese))
- 4 梁立孚, 刘石泉. 一般加载规律的弹塑性本构关系. 固体力学学报, 2001, 22(4): 409~413(Liang Lifu, Liu Shiquan. Elastoplastic constitutive relation under general loading law. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2001, 22(4): 409~413(in Chinese))
- 5 Alexander V Idesman. Comparison of different isotropic elastoplastic models at finite strains used in numerical analysis. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2003, 192: 4659~4674
- 6 Zhou ZD, Zhao Shexu, Kuang Zhenbang. An integral elasto-plastic constitutive theory. *International Journal of Plasticity*, 2003, 19: 1377~1400
- 7 樊建平, 邓泽贤. 增量型各向异性损伤理论与数值分析. 固体力学学报, 2004, 25(3): 262~268(Fan Jianping, Deng Zexian. Incremental anisotropic damage theory and its numerical analysis. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2004, 25(3): 262~268(in Chinese))
- 8 陈铁云, 沈惠申. 结构的屈曲. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1993(Chen Tiejun, Shen Huishen. *Buckling of Structures*. Shanghai: Science and Technology Literature Press,

- 1993(in Chinese))
- 9 Wang CM, Xiang Y, Chakrabarty J. Elastic/plastic buckling of thick plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38: 8617~8640
 - 10 Chakrabarty J. Influence of anisotropy on the plastic buckling of rectangular plates. In: Proc. of 2nd Int. Conf. Struct, Stability and Dynamics, World Scientific, Singapore, 2002, 12. 448~452
 - 11 Khaled M El-Sang, Alys Nazmy, Mohammad ikbal Martini. Elasto-plastic buckling of perforated plates under uniaxial compression. *Thin-Walled Structures*, 2004, 42: 1083~1101
 - 12 Chow CL, Wang June. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics. *Engg Fract Mech*, 1987, 33: 3~10
 - 13 Sidoroff F. Description of anisotropic damage application to elasticity. In: Proceedings of IUTAM Colloquium. *Physical Nonlinearities in Structural Analysis*, Springer Verlag Berlin, 1981, 237~240

(责任编辑：陈杰)

THE ELASTO-PLASTIC DAMAGE CONSTITUTIVE RELATIONS OF ORTHOTROPIC MATERIALS ¹⁾

Fu Yiming Tian Yanping²⁾

(College of Mechanics and Aerospace, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract Based on the elasto-plastic mechanics and continuum damage theory, a yield criterion that relates to the spherical tensor of stress is proposed to describe the mixed hardening of damaged orthotropic materials, and the dimensionless form of which is isomorphic with the Mises criterion of isotropic materials. Furthermore, the incremental elasto-plastic damage constitutive equations are established. As an example of its application, the elasto-plastic buckling problem of the orthotropic rectangular thin plates with local damage are investigated by using the Galerkin method and iteration method, and the effects of geometric parameters and local damage on the critical buckling stress are discussed.

Key words elasto-plastic, orthotropic thin plates, damage, incremental theory, elasto-plastic buckling

Received 28 November 2006, revised 12 July 2007.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10872066).

2) E-mail: tianyanp@gmail.com