

一类单侧碰撞悬臂振动系统的擦边分岔分析¹⁾

皇甫玉高^{*,†} 李群宏^{*,2)}

^{*}(广西大学数学与信息科学学院, 南宁 530004)

[†](河南理工大学数学与信息科学学院, 焦作 454000)

摘要 与光滑动力系统不同, 擦边分岔是非光滑动力系统的一种特殊分岔行为. 局部不连续映射是研究非光滑动力系统擦边分岔的一种有力工具. 对一类单侧弹性碰撞悬臂振动系统进行了擦边分岔分析. 首先建立了系统对应的局部不连续映射 (ZDM) 和全局 Poincaré 映射, 进而在其他参数固定, 碰撞间隙 g 为分岔参数时利用数值仿真的方法分别对原系统和对应的 Poincaré 映射进行擦边分岔分析, 得到了该系统的两种不同类型的擦边分岔行为: 周期 1 到周期 2 运动和周期 1 到混沌, 这两种擦边分岔与刚性碰撞系统的情况是不相同的. 由分析可知, 对于含高阶非线性项的非光滑动力系统的擦边分岔, 同样可以利用局部不连续映射的方法进行研究.

关键词 悬臂振动系统, 碰撞, 擦边分岔, 局部不连续映射, 数值仿真

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2008)06-0812-08

引 言

非光滑动力系统的研究由于其复杂性, 通常需要利用定性分析、试验测定及数值仿真相结合的方法进行研究. 非光滑系统有极其复杂的动力学行为, 即使最简单的分段线性系统也是如此, 因此必须深入分析非光滑系统的复杂运动形式和分岔行为, 以及通向混沌途径的多样性. 罗冠炜和谢建华^[1]研究了两自由度碰撞振动系统在非共振和弱共振条件下的 Hopf 分岔, 金俐和陆启韶^[2]引入局部映射, 利用 Poincaré 映射分析方法得到了 n 维非光滑动力系统 Lyapunov 指数谱的计算方法, 曹庆杰等^[3]对一类系统研究了从光滑到非连续动力学的转迁, 丁旺才和谢建华^[4]对近年来碰撞振动系统的研究作了较详细的总结. 擦边分岔是非光滑动力系统分岔现象中的一类特殊分岔^[5], 由于其重要性, 近十几年来很多学者对擦边分岔进行了研究. 文献 [6~11] 通过引入局部不连续映射 (PDM 和 ZDM) 的方法对非光滑动力系统的擦边分岔进行了分析, 并得到了相应的局部不连续映射的范式. Chin 等^[12]对一类刚性碰撞系统的擦边分岔进行了分析, 得到了 3 种不同类型的擦边分岔; 胡海岩^[13]研究了分段线性系统的擦边行为和擦边轨道的确定等问题; Casas 等^[14]

对一类碰撞系统的全局擦边分岔进行了分析; Zhao 和 Dankowicz^[15,16]研究了一类碰撞系统的余维 1 和余维 2 擦边分岔. 张思进等^[17]分析了 n 维线性碰撞系统的擦边分岔现象.

梁是机械设计时最常用到的, 对于横梁已有大量丰富的理论成果. Emans 等^[18]通过对一类悬臂系统建模, 引入了一类带高次项的非线性弹性碰撞动力系统模型, 进而利用数值仿真的方法对自由振动和具有单侧碰撞悬臂梁系统的混沌现象进行了研究. Wang 等^[19]对该悬臂系统对应的单侧弹性碰撞及双侧弹性碰撞情形的全局分岔和混沌现象进行了数值仿真研究. 但他们都是对原系统直接进行数值仿真来分析系统所具有的非线性行为, 且没有对擦边分岔现象作深入研究.

本文对 Emans 等^[18]提出的一类单侧弹性碰撞悬臂振子深入分析了擦边分岔行为. 首先建立了该系统的局部不连续映射, 进而利用数值仿真的方法, 得到了在两种不同情形时系统关于碰撞间隙出现的两类不同的擦边分岔行为: 周期 1 到周期 2 运动和周期 1 到混沌, 进而验证了局部不连续映射在对含高阶非线性项的非光滑动力系统进行擦边分岔分析时, 同样是有用的.

2007-10-29 收到第 1 稿, 2008-07-14 收到修改稿.

1) 广西自然科学基金 (0640002), 广西青年科学基金 (0832014) 和广西研究生教育创新计划 (2006105930701M16) 资助项目.

2) E-mail: liqh@gxu.edu.cn

1 力学模型

考虑如图 1 所示的单侧碰撞悬臂振动系统, 系统由质块 M , 连接质块的两个弹性模量为 EI , 长度为 L 的弹性梁, 以及一个弹性系数为 k 的弹簧组成. 质块与弹簧之间的间隔为 g , 作用在质块上的周期激励力为 $F_0 \cos \Omega \tau$. 根据文献 [18] 的推导, 质块的运动微分方程是

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{12EI}{L^3}y + \frac{432EI}{35L^5}y^3 + kH(y)(y - g) = F_0 \cos(\Omega \tau) \quad (1)$$

$$\text{其中 } H(y) = \begin{cases} 1, & y \geq g, \\ 0, & y < g. \end{cases}$$

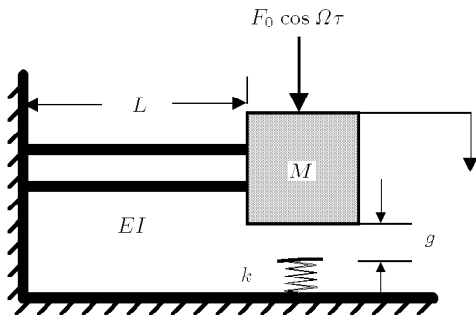


图 1 单侧碰撞悬臂振动系统示意图

Fig.1 Cantilever beam system with impacts

运动微分方程的无量纲形式是

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\xi\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} + \frac{36}{35}\tilde{x}^3 + \alpha H(\tilde{x})(\tilde{x} - \tilde{g}) = \beta \cos(\omega t) \quad (2)$$

$$\text{其中 } \tilde{x} = \frac{y}{L}, t = \Omega_0 \tau, \xi = \frac{c}{2\Omega_0 M}, \beta = \frac{F_0}{\Omega_0^2 ML}, \\ \omega = \frac{\Omega}{\Omega_0}, \alpha = \frac{kL^3}{12EI}, \tilde{g} = \frac{g}{L}, \Omega_0 = \sqrt{\frac{12EI}{ML^3}}, \\ H(\tilde{x}) = \begin{cases} 0, & \tilde{x} < \tilde{g}, \\ 1, & \tilde{x} \geq \tilde{g}. \end{cases}$$

令 $x = \tilde{x} - \tilde{g}$, 原方程可转化为

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \left(1 + \frac{108}{35}g^2\right)x + \frac{108}{35}gx^2 + \frac{36}{35}x^3 + g + \frac{36}{35}g^3 + \alpha H(x+g)x = \beta \cos(\omega t) \quad (3)$$

其中 $H(x+g) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ (为了方便, 仍然记 $\tilde{g}$ 为 g .)

方程 (3) 是非自治方程, 为便于讨论, 首先将其转化为自治系统. 为此, 令 $x_1 = x, \dot{x}_1 = x_2, x_3 = \omega t$,

$\dot{x}_3 = \omega$, 则原非自治方程可化为自治系统

$$\dot{x} = \begin{cases} F_1(x) = A_1 x + B_1, & H(x) = Cx < 0 \\ F_2(x) = A_2 x + B_2, & H(x) = Cx \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 - \frac{108}{35}g^2 & -2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 - \alpha - \frac{108}{35}g^2 & -2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \cos x_3 - \frac{108}{35}gx_1^2 - \frac{36}{35}x_1^3 - g - \frac{36}{35}g^3 \\ \omega \end{pmatrix} \\ B_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \cos x_3 - \frac{108}{35}gx_1^2 - \frac{36}{35}x_1^3 - g - \frac{36}{35}g^3 \\ \omega \end{pmatrix} \\ C &= (1, 0, 0), \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

且有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= A_1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = A_2, \\ F_1(0) = F_2(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \beta - g - \frac{36}{35}g^3 \\ \omega \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

切换流形为

$$\Sigma = \{x \in \mathbf{R}^3 | H(x) = Cx = 0\} \quad (7)$$

记

$$\Sigma^+ = \{x \in \mathbf{R}^3 | Cx > 0\}, \quad \Sigma^- = \{x \in \mathbf{R}^3 | Cx < 0\} \quad (8)$$

2 局部映射

由于弹性碰撞系统在交换面两侧系统的向量场不同, 其轨线与分界面的关系有以下几种典型形式:

(1) 轨线与分界面不相交, 此时系统退化为光滑动力系统; (2) 轨线与分界面相交且穿过, 此时系统轨

线由不同子空间中的多段构成; (3) 轨线与分界面临界相交, 即相交而不穿过. 当系统处于临界相交时, 若对系统施加一个很小的扰动, 就会改变系统的动力学行为, 使得系统的运动形式改变. 若扰动是由系统参数引起, 就是非光滑动力系统所特有的分岔——擦边分岔. 系统轨线在穿越交换面时系统的向量场是非连续变化的, 因此在擦边轨道附近, 弹性碰撞系统的动力学行为与光滑动力系统不同, 是由多个不同向量场决定的. 为了描述当系统轨线穿越交换面时, 另一侧向量场对系统动力学行为的影响, Dankowicz 等^[7] 首先引入了局部不连续映射的方法, 而后 Bernardo 等^[10] 又对这种方法进行了进一步的完善. 局部不连续映射的提出是基于在系统相空间中存在切换流形时, 对系统轨线进行的修正 (其几何描述可见图 2). 假定系统某一穿过切换流形的轨线在时刻 $t_s < 0$ 与位于 Σ^- 一侧的任一 Poincaré 截面 Σ_1 相交, 在时刻 $t_f > 0$ 与第 2 个 Poincaré 截面 Σ_2 相交. 为了计算这条从 Σ_1 到 Σ_2 的轨线, 就要计算 3 个部分, 第 1 部分: 使用 Σ^- 一侧的向量场计算从 Σ_1 到点 $\bar{x}$ ($\bar{x}$ 是轨线与 Σ 的交点) 的轨线; 第 2 部分: 使用 Σ^+ 一侧的向量场计算从 $\bar{x}$ 到点 $\hat{x}$ ($\hat{x}$ 是轨线与 Σ 的第 2 个交点) 的轨线; 第 3 部分: 使用 Σ^- 一侧的向量场计算从 $\hat{x}$ 到点 Σ_2 的轨线. 引入局部不连续映射后, 计算系统轨线时, 可以首先使用 Σ^- 一侧的向量场计算直到到达取定的 Poincaré 截面 (如图 2 中的 Poincaré 截面 Π), 在交点处, 应用局部不连续映射来考虑 Σ^+ 一侧的向量场对系统的影响, 然后再利用 Σ^- 一侧的向量场计算到取定的 Poincaré 截面 Σ_2 . 由于 Poincaré 截面 Π 的取法不同, 可以将得到的局部不连续映射分为两种情况: 其一, 若取定的 Poincaré 截面 Π 是定相位面, 这时得到的不连续映射称为零时间不连续映射, 即 ZDM; 其二, 若取定的 Poincaré 截面 Π 是其它情况的 Poincaré 截面, 这时得到的不连续映射称为 Poincaré 不连续映射, 即 PDM. 对于不同的非光滑动力系统, 对应的局部不连续映射有两种不同的类型: (1) 若系统的向量场是连续非光滑的, 则局部不连续映射具有最低阶次为 1/2 型的奇点; (2) 若系统的向量场是非连续非光滑的, 则局部不连续映射具有最低阶次为 3/2 型的奇点. 利用局部不连续映射可以建立起在擦边轨线附近反映系统动力学行为的 Poincaré 映射, 下面将通过这种方法来研究该悬臂碰撞系统对应的擦边分岔.

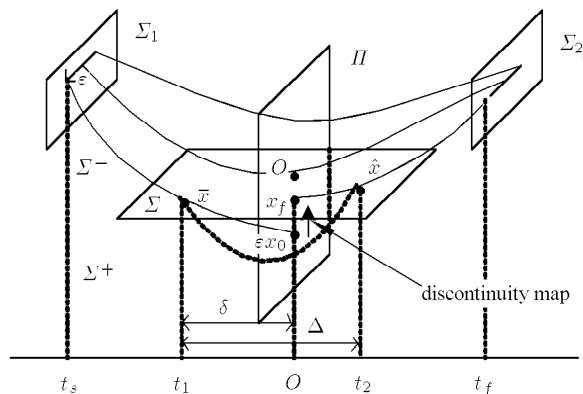


图 2 局部不连续映射示意图

Fig.2 Schematic of the local discontinuity mapping

2.1 擦边条件

系统轨线发生擦边的解析条件, 若在点 $x^* = (0, 0, 0)^T$ 处有

$$(1) H(x^*) = (1, 0, 0)(0, 0, 0)^T = 0 \quad (9)$$

$$(2) \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x^*} = (1, 0, 0) \neq 0 \quad (10)$$

$$(3) \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x^*} F_1(x^*) = (1, 0, 0)(0, \beta - g - \frac{36}{35}g^3, \omega)^T = 0 \quad (11)$$

$$(4) \left(\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_1 \right) F_1 + \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right) \right) \Big|_{x^*} = \beta - g - \frac{36}{35}g^3 \quad (12)$$

则当 $\beta < g + \frac{36}{35}g^3$ 时, 有 $\left(\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} F_1 \right) F_1 + \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} F_1 \right) \right) \Big|_{x^*} < 0$, 根据文献 [10] 知, 此时在 Σ^- 一侧发生擦边. 记擦边点为 O .

2.2 局部映射的建立

假设向量场 F_1 和 F_2 分别在相空间中切换流形两侧都有意义, 即在 Σ 两侧都有定义. 且 $\Phi_i(x, t)$, $i = 1, 2$ 表示向量场 F_i 对应的流, 即有

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_i(x, t) = F_i(\Phi_i(x, t)), \quad \Phi_i(x, 0) = x \quad (13)$$

由于向量场的光滑性, 可以将系统流 $\Phi_i(x, t)$ 在擦边点 O 处展开成泰勒 (Taylor) 级数

$$\Phi_i(x, t) = \Phi_i^0 + \frac{\partial \Phi_i^0}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi_i^0}{\partial t} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_i^0}{\partial t^2} t^2 + \frac{\partial^2 \Phi_i^0}{\partial x \partial t} xt + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \Phi_i^0}{\partial x^3} x^3 + \frac{\partial^3 \Phi_i^0}{\partial t^3} t^3 + \right.$$

$$3 \frac{\partial^3 \Phi_i^0}{\partial x \partial t^2} x t^2 + 3 \frac{\partial^3 \Phi_i^0}{\partial x^2 \partial t} x^2 t) + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial^4 \Phi_i^0}{\partial x^4} x^4 + \frac{\partial^4 \Phi_i^0}{\partial t^4} t^4 + 4 \frac{\partial^4 \Phi_i^0}{\partial x^3 \partial t} x^3 t + 6 \frac{\partial^4 \Phi_i^0}{\partial x^2 \partial t^2} x^2 t^2 + 4 \frac{\partial^4 \Phi_i^0}{\partial x \partial t^3} x t^3 \right) + \dots \quad (14)$$

在擦边点 O 处取 Poincaré 截面 Π (如图 2 所示). 在 Σ^+ 的一侧, 在 Poincaré 截面 Π 上建立的从 εx_0 到 x_f 的映射 (其中 ε 是引入的小扰动, $\varepsilon < 0$ 时系统轨线与交换面不相交, $\varepsilon = 0$ 时对应系统的擦边轨线, $\varepsilon > 0$ 时系统的轨线穿过交换面), 即是局部不连续映射. 为了得到此映射, 令 $x_g(t) = \Phi_1(0, t)$ 是当 $\varepsilon = 0$ 时的擦边轨线, 考虑轨线 x_g 在参数 ε 下的扰动

$$x(t) = \Phi_1(\varepsilon x_0, t) \quad (15)$$

其中 $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})^T$, $x_{10} > 0$, 且有 $\langle \nabla H, x_0 \rangle = x_{10} > 0$. 对系统局部不连续映射的推导可分为下面的 3 个步骤.

第 1 步 计算从 εx_0 到 $\bar{x}$ 的时间 $-\delta$:

当 $\varepsilon > 0$ 时, 在某一时刻 $t_1 = -\delta$, 扰动轨线 $x(t)$ 将在 $x = \bar{x}$ 穿过切换流形

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \Phi_1(\varepsilon x_0, -\delta) = \varepsilon x_0 - \delta F_1 + \delta^2 a_1 - \\ &\varepsilon \delta b_1 x_0 - \delta^3 c_1 - \varepsilon^2 \delta d_1 x_0^2 + \varepsilon \delta^2 e_1 x_0 + \\ &\delta^4 f_1 - \varepsilon^3 \delta g_1 x_0^3 + \varepsilon^2 \delta^2 h_1 x_0^2 - \\ &\varepsilon \delta^3 j_1 x_0 + O(5) \end{aligned} \quad (16)$$

因计算及表达式繁冗, 此处和下文中间变量的表达式从略. 要使 $\bar{x}$ 在流形 Σ 上, 须有 $H(\bar{x}) = 0$. 根据文献 [10], 由 H 的方程, 可知满足以下条件

$$\langle \nabla H, \bar{x} \rangle = O(|\bar{x}|^5) \quad (17)$$

利用上面两式, 可得

$$\begin{aligned} &\varepsilon x_{0H} - \delta F_{1H} + \delta^2 a_{1H} - \varepsilon \delta (b_1 x_0)_H - \delta^3 c_{1H} - \\ &\varepsilon^2 \delta (d_1 x_0^2)_H + \varepsilon \delta^2 (e_1 x_0)_H + \delta^4 f_{1H} - \\ &\varepsilon^3 \delta (g_1 x_0^3)_H + \varepsilon^2 \delta^2 (h_1 x_0^2)_H - \\ &\varepsilon \delta^3 (j_1 x_0)_H + O(5) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

其中下标 H 表示该向量与 ∇H 的内积, 即

$$y_H \triangleq \langle \nabla H, y \rangle \quad (19)$$

从式 (18) 再利用隐函数存在定理可知

$$\delta = \gamma_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^2) \quad (20)$$

将上式代入式 (16), 因此有

$$\bar{x} = \chi_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \chi_2 \varepsilon + \chi_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^2) \quad (21)$$

第 2 步 计算从 $\bar{x}$ 到 $\hat{x}$ 的时间 Δ :

考虑从 $\bar{x}$ 沿流 F_2 运动到时间 $\tau_2 = \tau_1 + \Delta$ 再次与 Σ 相交于 $\hat{x}$

$$H(\hat{x} \triangleq \Phi_2(\bar{x}, \Delta)) = 0 \quad (22)$$

从上式中可以解出 Δ

$$\Delta = v_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + v_2 \varepsilon + v_3 \varepsilon^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^2) \quad (23)$$

第 3 步 在保证运动时间不变的条件下, 从 $\hat{x}$ 到 x_f 的时间为 $\delta - \Delta$:

由向量场在交换面处是连续的, 即 $F_1 = F_2$ 可得

$$x_f = \Phi_1(\hat{x}, \delta - \Delta) = \hat{x} + F_1(\delta - \Delta) + a_1(\delta - \Delta)^2 +$$

$$b_1 \hat{x}(\delta - \Delta) + c_1(\delta - \Delta)^3 + d_1 \hat{x}^2(\delta - \Delta) +$$

$$e_1 \hat{x}(\delta - \Delta)^2 + O(4) =$$

$$\bar{x} + [(8c_2 - c_1 + (e_1 - 4e_2)F_1 +$$

$$(2d_2 - d_1)F_1^2)\gamma_1^3 + ((2b_2 - b_1)\chi_2 +$$

$$2(a_2 - a_1)v_2)\gamma_1 + F_1\gamma_3 + \chi_3]\varepsilon^{3/2} + O\left(\frac{3}{2}\right)$$

因而系统在擦边点处的局部不连续映射为

$$x_f = \begin{cases} \varepsilon x_0 + \sqrt{\frac{-2x_{10}}{\beta - g - \frac{36}{35}g^3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3}\alpha x_{10} \\ 0 \end{pmatrix} \varepsilon^{\frac{3}{2}} + \\ o(\varepsilon^2), & \text{若 } x_{10} > 0 \\ \varepsilon x_0, & \text{若 } x_{10} < 0 \end{cases} \quad (24)$$

2.3 Poincaré 映射的建立

为了得到在擦边点附近的 Poincaré 映射, 我们首先选取定相位面为 Poincaré 截面, 即

$$\Gamma = \{(x, y, t) | t = \text{mod}(2\pi/\omega)\} \quad (25)$$

根据原系统的分段光滑性, 若不考虑向量场 F_2 时, 由方程 $\dot{x} = F_1$ 确定 Poincaré 截面 Γ 上的 Poincaré 映射

$$x \mapsto Px \quad (26)$$

若考虑 Σ^+ 一侧的向量场 F_2 时, 利用局部不连续映射 (24), 即可得到在擦边点附近的 Poincaré 映射

$$x \mapsto (P \circ x_f)x \quad (27)$$

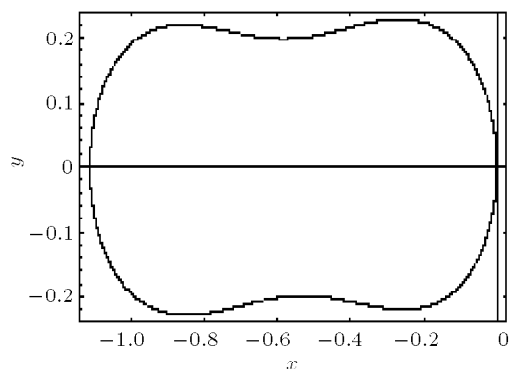
其中 $P \circ x_f$ 表示映射 P 和 x_f 的复合运算.

3 数值仿真

利用四阶 Runge-Kutta 法分别对原系统和对应的 Poincaré 映射 (27) 进行擦边分岔分析. 当取定其他参数不变, 碰撞间隙 g 为控制参数时, 该系统出现两种不同的擦边分岔, 分别是周期 1 到周期 2 运动和周期 1 到混沌两种形式.

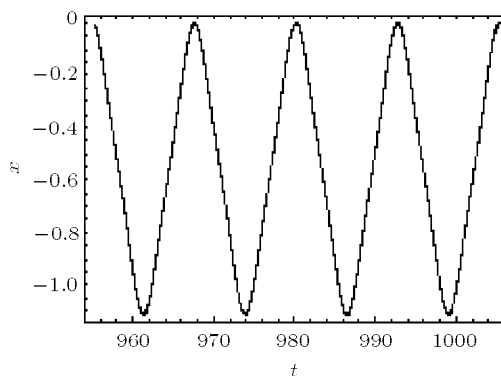
3.1 周期 1 到周期 2 运动的擦边分岔

当系统参数 $\xi = 0.0213$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.5$, $\omega = 0.5$ 固定不变, 取定碰撞间距参数 g 为控制参数时, 系统在 $g = 0.558$ 时有稳定的周期 1 擦边轨线 (如图 3 所示), 而当参数 $g > 0.558$ 时, 系统在 Σ^- 一侧出现稳定的周期 1 轨线, 当参数 $g < 0.558$ 时, 系统出现稳定的周期 2 运动. 图 4 给出了系统在其他参数 $\xi = 0.0213$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.5$, $\omega = 0.5$ 不变时系统位移 x 关于控制参数 g 的分岔图, 其中图 4(a) 是在参数 $0.45 \leq g \leq 0.6$ 时直接对系统 (3) 进行分岔分析时得到的擦边分岔图, 图 4(b) 是在参数 $0.5573 \leq g \leq 0.5575$ 时利用 Poincaré 映射 (27) 所得系统位移擦边分岔图. 由图 4 可知, 根据局部不连续映射同样可以得到系统在相应的参数条件时原系统发生的擦边分岔行为. 利用局部不连续映射进行擦边分岔分析时, 系统的擦边点是 $g = 0.5575$. 由此可知, 对于系统 (3) 和局部不连续映射分别进行分析时, 擦边点略有不同, 这主要是因为局部不连续映射本身就是一种近似 (忽略了高于 $3/2$ 次的高阶项) 造成的, 但这不会影响系统的分岔行为.



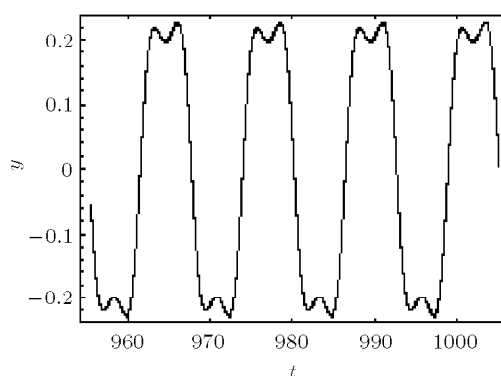
(a) 擦边轨线相图

(a) Phase portrait of grazing orbit



(b) 位移时间历程图

(b) Time history of the corresponding displacement



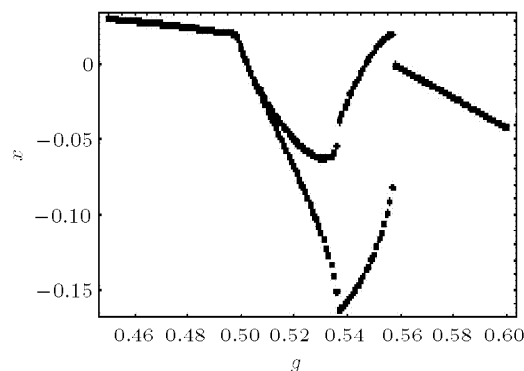
(c) 速度时间历程图

(c) Time history of the corresponding velocity

图 3 参数为 $\xi = 0.0213$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.5$, $\omega = 0.5$, $g = 0.558$ 时系统 (3) 的擦边轨线

Fig.3 Grazing orbit of the system (3) with parameters

$\xi = 0.0213$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.5$, $\omega = 0.5$, $g = 0.558$



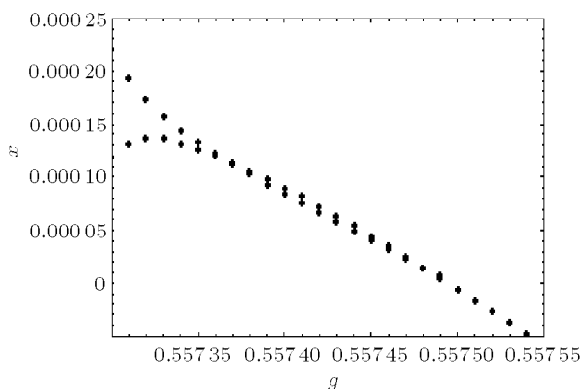
(a) 系统 (3) 的分岔图

(a) Bifurcation diagram of the system (3)

图 4 参数为 $\xi = 0.0213$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.5$, $\omega = 0.5$ 时系统位移 x 随参数 g 变化时的擦边分岔图

Fig.4 Bifurcation diagrams of the system as g changes with

parameters $\xi = 0.0213$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.5$, $\omega = 0.5$



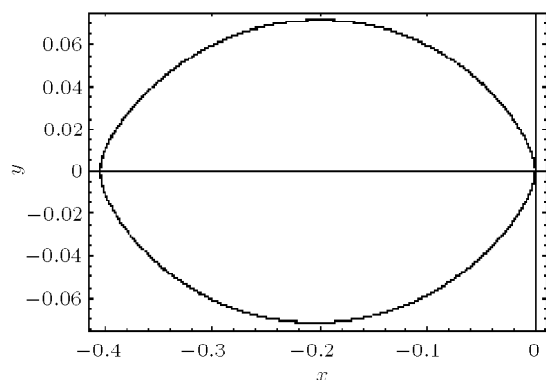
(b) Poincaré 映射的分岔图

(b) Bifurcation diagram of the Poincaré mapping

图 4 参数为 $\xi = 0.0213$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.5$, $\omega = 0.5$ 时系统位移 x 随参数 g 变化时的擦边分岔图 (续)Fig.4 Bifurcation diagrams of the system as g changes with parameters $\xi = 0.0213$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.5$, $\omega = 0.5$ (continued)

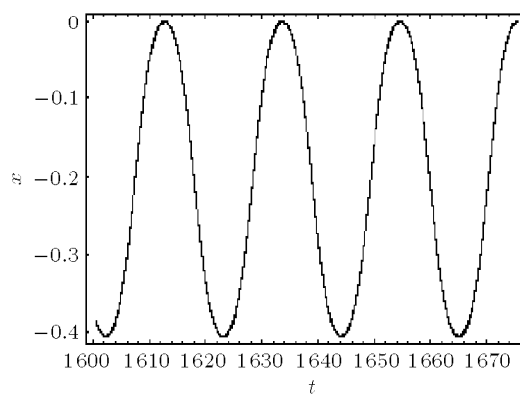
3.2 周期 1 到混沌的擦边分岔

当系统参数 $\xi = 0.01$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.2$, $\omega = 0.3$ 固定不变, 取定碰撞间距参数 g 为控制参数时, 系统在 $g = 0.202531$ 时有稳定的周期 1 擦边轨线 (如图 5 所示), 而当参数 $g > 0.202531$ 时, 系统在 Σ^- 一侧出现稳定的周期 1 轨线, 当参数 $g < 0.202531$ 时, 系统出现混沌运动. 图 6 给出了系统在其他参数 $\xi = 0.01$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.2$, $\omega = 0.3$ 不变时系统位移 x 关于控制参数 g 的分岔图, 其中图 6(a) 是在参数 $0.20252 \leq g \leq 0.20254$ 时直接对系统 (3) 进行分岔分析时得到的擦边分岔图, 图 6(b) 是在参数 $0.20239 \leq g \leq 0.20241$ 时利用建立的全局 Poincaré 映射 (27) 所得系统擦边分岔图. 图 7 (a) 是系统 (3) 在参数 $0.20252 \leq g \leq 0.20254$ 时的擦边分岔图 (图 6(a)) 对应的 Lyapunov 指数谱, 图 7(b) 给出了利用局部不连续映射得到的分岔图 (图 6(b)) 的 Lyapunov



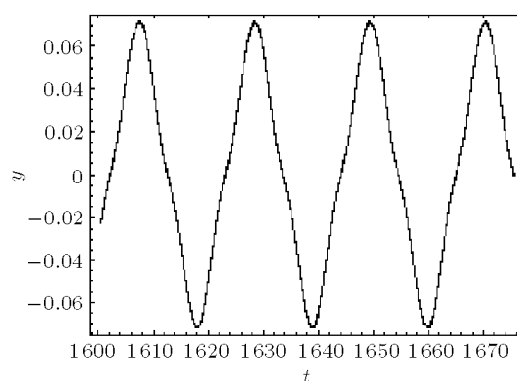
(a) 擦边轨线相图

(a) Phase portrait of grazing orbit



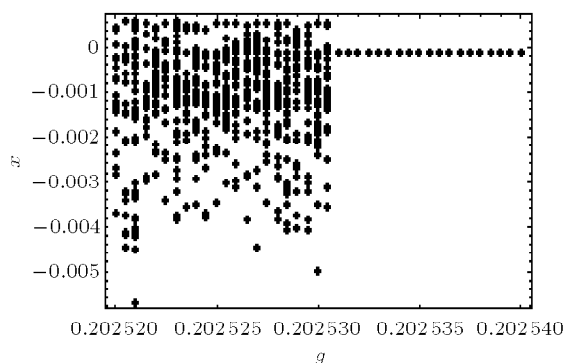
(b) 位移时间历程图

(b) Time history of the corresponding displacement



(c) 速度时间历程图

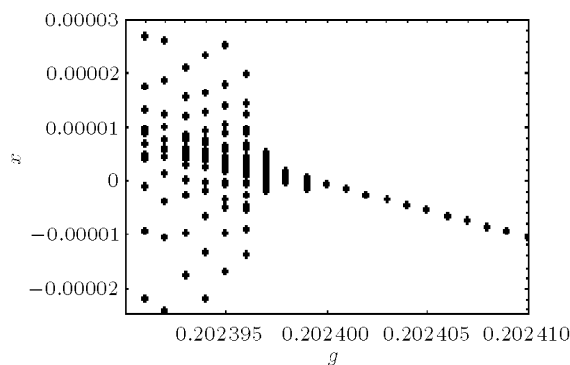
(c) Time history of the corresponding velocity

图 5 参数为 $\xi = 0.01$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.2$, $\omega = 0.3$, $g = 0.202531$ 时系统 (3) 的擦边轨线Fig.5 Grazing orbit of the system (3) with parameters $\xi = 0.01$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.2$, $\omega = 0.3$, $g = 0.202531$ 

(a) 系统 (3) 的分岔图

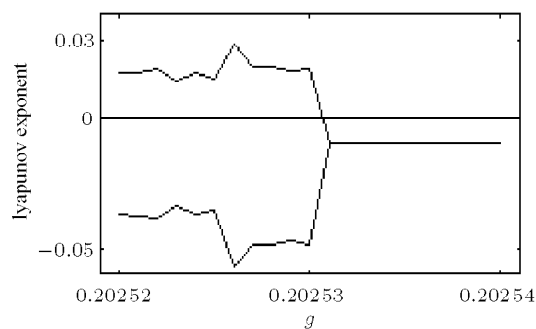
(a) Bifurcation diagram of the system (3)

图 6 参数为 $\xi = 0.01$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.2$, $\omega = 0.3$ 时系统位移 x 随参数 g 变化时的擦边分岔图Fig.6 Bifurcation diagrams of the system as g changes with parameters $\xi = 0.01$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.2$, $\omega = 0.3$



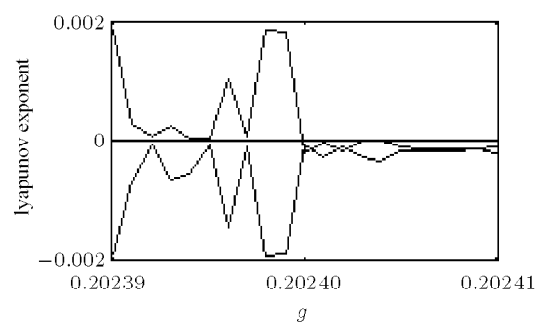
(b) Poincaré 映射的分岔图

(b) Bifurcation diagram of the Poincaré mapping

图 6 参数为 $\xi = 0.01$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.2$, $\omega = 0.3$ 时系统位移 x 随参数 g 变化时的擦边分岔图 (续)Fig.6 Bifurcation diagrams of the system as g changes with parameters $\xi = 0.01$, $\alpha = 20$, $\beta = 0.2$, $\omega = 0.3$ (continued)

(a) 图 6(a) 对应的 Lyapunov 指数谱

(a) Lyapunov exponents of the bifurcation diagram Fig.6(a)



(b) 图 6(b) 对应的 Lyapunov 指数谱

(b) Lyapunov exponents of the bifurcation diagram Fig.6(b)

图 7

Fig.7

指数谱 ($g = 0.2024$ 时 $\lambda_{\max} = -0.00008$, $g = 0.20239$ 时 $\lambda_{\max} = 0.0018$). 由图 6 得到, 根据局部不连续映射同样可以得到系统在相应的参数条

件时系统 (3) 发生的擦边分岔行为. 此时利用局部不连续映射进行擦边分岔分析时, 系统的擦边点是 $g = 0.2024$.

4 结 论

利用局部不连续映射的方法, 研究了一类分段非线性单侧碰撞悬臂振动系统的擦边分岔行为. 首先建立了系统对应的局部不连续映射 (ZDM) 和 Poincaré 映射, 进而在其他参数固定, 碰撞间隙 g 为分岔参数时利用数值仿真的方法分别对系统 (3) 及对应的 Poincaré 映射进行擦边分岔分析, 得到了该系统的两种不同类型的擦边分岔行为: 周期 1 到周期 2 运动和周期 1 到混沌, 而这两种擦边分岔与刚性碰撞系统的情况是不相同的. 但该系统是否还有其他类型的擦边分岔行为, 还需要作进一步研究. 结合系统 (3) 的分岔行为可知, 对于含高次非线性项的分段光滑碰撞系统进行擦边分岔分析时, 局部不连续映射是适用的.

致谢 在本文的写作过程中, 北京航空航天大学陆启韶教授给予了热情的帮助并提出宝贵的修改意见, 使文章的质量得到进一步提高, 在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- 1 Luo GW, Xie JH. Hopf bifurcation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 213(3): 391~408
- 2 Jin L, Lu QS, Twizell EH. A method for calculating the spectrum of lyapunov exponents by local maps in non-smooth impact-vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 298(4-5): 1019~1033
- 3 Cao QJ, Wiercigroch M, Pavlovskaja EE, et al. Archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics. *Physical Review E*, 2006, 74: 046218
- 4 丁旺才, 谢建华. 碰撞振动系统分岔和混沌的研究进展. *力学进展*, 2005, 35(4): 513~524 (Ding Wangchai, Xie Jianhua. Advances of research on bifurcations and chaos in vibro-impact system. *Advances in Mechanics*, 2005, 35(4): 513~524 (in Chinese))
- 5 Leine RI, van Campen DH. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2006, 25: 595~616
- 6 Fredriksson MH, Nordmark AB. Bifurcations caused by grazing incidence in many degrees of freedom impact oscillators. *Proc R Soc Lond A*, 1997, 453: 1261~1276
- 7 Dankowicz H, Nordmark AB. On the origin and bifurcations of stick-slip oscillations. *Physica D*, 2000, 136: 280~302

- 8 Fredriksson MH, Nordmark AB. On normal form calculations in impact oscillators. *Proc R Soc Lond A*, 2000, 456: 315~329
- 9 di Bernardo M, Budd CJ, Champneys AR. Grazing and border-collision in piecewise-smooth systems: A unified analytical framework. *Physical Review Letters*, 2001, 86: 2553~2556
- 10 di Bernardo M, Budd CJ, Champneys AR. Normal form maps for grazing bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems. *Physica D*, 2001, 160: 222~254
- 11 di Bernardo M, Feigin MI, Hogan SJ, et al. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems. *Chaos Solitons & Fractals*, 1999, 10: 1881~1908
- 12 Chin W, Ott E, Nusse HE, et al. Grazing bifurcations in impact oscillators. *Physical Review E*, 1994, 50: 4427~4444
- 13 Hu HY. Detection of grazing orbits and incident bifurcations of a forced continuous, piecewise-linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 187(3): 485~493
- 14 Casas F, Wai W, Grebogi C, et al. Universal grazing bifurcations in impact oscillators. *Physical Review E*, 1996, 53: 134~139
- 15 Dankowicz H, Zhao X. Local analysis of co-dimension-one and co-dimension-two grazing bifurcations in impact microactuators. *Physica D*, 2005, 202: 238~257
- 16 Zhao X, Dankowicz H. Unfolding degenerate grazing dynamics in impact actuators. *Nonlinearity*, 2006, 19: 399~418
- 17 张思进, 周利彪, 陆启韶. 线性碰振系统周期解擦边分岔的一类映射分析方法. *力学学报*, 2007, 39(1): 132~136 (Zhang Sijin, Zhou Libiao, Lu Qishao. A map method for grazing bifurcation in linear vibro-impact system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(1): 132~136 (in Chinese))
- 18 Emans J, Wiercigroch M, Krivtsov AM. Cumulative effect of structural nonlinearities: chaotic dynamics of cantilever beam system with impacts. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23: 1661~1670
- 19 Wang L, Ni Q, Huang Y. Bifurcations and chaos in a forced cantilever system with impacts. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 296: 1068~1078

GRAZING BIFURCATION OF A VIBRATING CANTILEVER SYSTEM WITH ONE-SIDED IMPACT¹⁾

Huangfu Yugao^{*,†} Li Qunhong^{*,2)}

^{*}(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)

[†](College of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)

Abstract Grazing bifurcation is a special bifurcation behavior of non-smooth dynamical systems. In the present paper, grazing bifurcations of a cantilever system with one-sided impact is investigated. Firstly, the local discontinuity mapping and Poincaré mapping of the vibrating system are developed. Secondly, numerical simulation with the impacting clearance as the bifurcation parameter are carried out to obtain two types of grazing bifurcations of the system, which are different from those of rigid impact systems. Finally, it is further shown that the local discontinuity mapping can be also used to investigate grazing bifurcation of non-smooth dynamical systems with high order nonlinear terms.

Key words cantilever system, impact, grazing bifurcation, local discontinuity mapping, numerical simulation

Received 29 October 2007, revised 14 July 2008.

1) The project supported by the Provincial Natural Science Foundation of Guangxi, China (0640002), the Provincial Youth Science Foundation of Guangxi, China (0832014) and Innovation Project of Guangxi Graduate Education (2006105930701M16).

2) E-mail: liqh@gxu.edu.cn