

有限液体负载下压电平板声板波理论分析

阳明益¹⁾ 陈继超

(台湾大学机械工程系, 台北, 中国台湾省)

摘要 主要推导平板声板波受有限液体负载后能量衰减与波速改变情形, 以部分波理论分析该受液体负载的压电平板波传行为, 并以一 128°Y 向切角的铌酸锂芯片为例, 分析前 20 个声板波受水与甘油负载下的能量衰减, 并固定某一平板板波, 针对不同甘油厚度负载下, 计算其相速度与衰减变化, 该理论分析对于液体负载下的平板板波传感器应用具有极大的参考价值.

关键词 压电平板, 声板波, 部分波理论, 黏滞性传感器, 有限厚度液体

中图分类号: O347.4+1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2008)04-0479-06

引 言

直至目前为止, 采用平板声板波来做感测应用的例子越来越多, 尤其是在液体负载下的感测应用^[1~11]. 采用平板声板波做传感器, 可将传感器制作在平板下方, 而把上方当做感测区域, 由此可避免被液体侵蚀的可能, 该液体的质量负载与黏滞性效应导致该平板声板波的波速改变与能量损耗, 藉由量测该些变化, 即可得该液体的性质, 而在液相感测方面最大问题便是能量损耗过大. 文献[4~8]简单地计算较低频的平板声板波, 该声板波由于具有较低的相速度, 表面具有较小的垂直位移分量, 故可得到较低的能量衰减. Anisimkin 等^[9,11]以实验方法研究较高频的声板波, 发现仍有某些高频声板波具有低能量衰减, 并可用来感测不同的液体黏滞系数.

然而, 实际应用上感测液体通常只有少量, 也就是说液体负载为有限域, 却鲜有此一理论提出, 故本文将理论推导并研究压电平板受有限液体负载下的波传行为, 并探讨在不同液体厚度负载下, 平板板波波速与衰减的变化.

1 理论分析

考虑一压电晶体平板, 其下表面为真空接触、上表面为一有限厚度的液体负载, 如图 1 所示. 假设该压电平板厚度为 h , 液体厚度为 d . 根据文献[12]的表示, 对于一无损耗且无源, 并在准静态假设下

的压电晶体内的支配方程为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (C^E : \nabla_s \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{e}^T \cdot \nabla \phi) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla \cdot (\mathbf{e} : \nabla_s \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\epsilon^s \cdot \nabla \phi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 ϕ 与 $\mathbf{u}$ 分别为电场与位移场, C^E , $\mathbf{e}$, ϵ^s 和 ρ 则分别为定电场下的弹性常数、压电系数、定应变下的介电系数与密度.

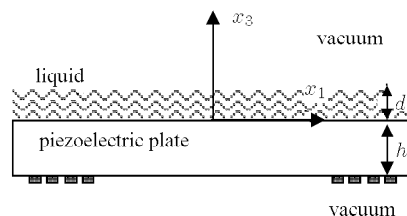


图 1 压电晶体平板结构示意图

Fig.1 Schematic diagram

在一般情况下, 该压电平板的板波可假设为一平面波形式, 即 $A \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_3 x_3)]$, 其中 A 可代表 u_i 或 ϕ 的震幅大小, 且 ω , k_1 与 k_2 分别为频率、1 方向波数与 2 方向波数. 将此假设的场形式代回方程 (1), 可得一特征值与特征向量问题, 该问题具有 8 个特征值与相对应的特征向量, 经由该些特征值与特征向量的线性组合, 可得存在于该压电平板板波的解

$$\begin{Bmatrix} u_i(\mathbf{x}) \\ \phi(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = e^{-ik_1 x_1} \sum_{r=1}^8 \alpha_r \begin{Bmatrix} U_i \\ \Phi \end{Bmatrix}^{(r)} e^{-ik_3^{(r)} x_3} \quad (2)$$

2007-06-21 收到第 1 稿, 2008-03-20 收到修改稿.

1) E-mail: f89522815@ntu.edu.tw

其中 α_r 为此线性组合中待定系数, 并经由边界条件决定, 而 $\{U_i \Phi\}^{T(r)}$ 和 $k_3^{(r)}$ 为第 r 个特征向量与其相对应的特征值.

液体中支配方程与式 (1) 相同, 唯一不同之处为液体的压电系数为零, 故电性的支配方程变为拉普拉斯方程, 即 $\nabla^2 \phi = 0$. 假设该液体具等向性, 且为一牛顿流体, 则该液体独立的弹性系数数目为 2, 并可由容积模数 κ 与黏滞系数 μ 表示, 即

$$C_{11}^L = \kappa + \frac{4}{3}i\omega\mu, C_{12}^L = \kappa - \frac{2}{3}i\omega\mu, C_{44}^L = i\omega\mu \quad (3)$$

经由同压电晶体内的处理程序, 该液体内的位移场即为

$$u_i^L(\mathbf{x}) = e^{-ik_1 x_1} \sum_{s=1}^6 \beta_s U_i^{L(s)} e^{-ik_3^{L(s)} x_3} \quad (4)$$

其中 β_s 为此线性组合中的待定系数, 并经由边界条件决定, 上标 L 代表在液体中的参数.

该液体内满足拉普拉斯方程的电场为

$$\phi^L(\mathbf{x}) = e^{-ik_1 x_1} (\beta_7 e^{k_1 x_3} + \beta_8 e^{-k_1 x_3}) \quad (5)$$

其中 β_7 与 β_8 为此线性组合中的待定系数. 而在真空中的电场则为

$$\left. \begin{aligned} \phi^{Vu}(\mathbf{x}) &= e^{-ik_1 x_1} \gamma_1 e^{-k_1(x_3-d)} \\ \phi^{Vl}(\mathbf{x}) &= e^{-ik_1 x_1} \gamma_2 e^{k_1(x_3+h)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中上标 Vu 和 Vl 分别表示上真空层与下真空层, 且 γ_1 和 γ_2 则分别为对应的待定系数.

为了求得相对应的待定系数, 各个场形必须满足各自的边界条件. 在 $x_3 = 0$ 的面, 正向应力场、位移场、电位场与正向电位移场必须满足连续条件, 即

$$\left. \begin{aligned} T_{3j} &= T_{3j}^L, u_j = u_j^L, \phi = \phi^L, D_3 = D_3^L \\ x_3 &= 0, j = 1 \sim 3 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在液体的表面, $x_3 = d$ 的面, 正向应力场需为零, 电位场与正向电位移场必须满足连续条件, 则

$$T_{3j}^L = 0, \phi^L = \phi^{Vu}, D_3^L = D_3^{Vu}, x_3 = d, j = 1 \sim 3 \quad (8)$$

在压电平板下表面, $x_3 = -h$ 的面, 则需满足正向应力场为零, 电位场与正向电位移场连续条件, 即

$$T_{3j} = 0, \phi = \phi^{Vl}, D_3 = D_3^{Vl}, x_3 = -h, j = 1 \sim 3 \quad (9)$$

因此, 总共有 18 条边界条件, 正好可解该 18 个待定系数. 并可将这些边界条件写成一矩阵形式

$$M_{18 \times 18} \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta_s \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix}_{18 \times 1} = \mathbf{0} \quad (10)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} W_1(r, 0) & L_1(s, 0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_1(r, -h) & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_2(r, 0) & L_2(s, 0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_2(r, -h) & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_3(r, 0) & L_3(s, 0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_3(r, -h) & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_4(r, 0) & L_4(s, 0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_5(r, 0) & L_5(s, 0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_6(r, 0) & L_6(s, 0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_7(r, 0) & \mathbf{0} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ W_7(r, -h) & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ W_8(r, 0) & \mathbf{0} & \varepsilon_{33}^L k_1 & -\varepsilon_{33}^L k_1 & 0 & 0 \\ W_8(r, -h) & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_0 k_1 \\ \mathbf{0} & L_1(s, d) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & L_2(s, d) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & L_3(s, d) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & e^{k_1 d} & e^{-k_1 d} & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\varepsilon_{33}^L k_1 e^{k_1 d} & \varepsilon_{33}^L k_1 e^{-k_1 d} & -\varepsilon_0 k_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11a)$$

且

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1(r, x_3) = & [C_{13}k_1U_1^{(r)} + C_{33}k_3^{(r)}U_3^{(r)} + C_{34}k_3^{(r)}U_2^{(r)} + \\ & C_{35}(k_3^{(r)}U_1^{(r)} + k_1U_3^{(r)}) + C_{36}k_1U_2^{(r)} + \\ & e_{13}k_1\Phi^{(r)} + e_{33}k_3^{(r)}\Phi^{(r)}]e^{-ik_3^{(r)}x_3} \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2(r, x_3) = & [C_{14}k_1U_1^{(r)} + C_{34}k_3^{(r)}U_3^{(r)} + C_{44}k_3^{(r)}U_2^{(r)} + \\ & C_{45}(k_3^{(r)}U_1^{(r)} + k_1U_3^{(r)}) + C_{46}k_1U_2^{(r)} + \\ & e_{14}k_1\Phi^{(r)} + e_{34}k_3^{(r)}\Phi^{(r)}]e^{-ik_3^{(r)}x_3} \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_3(r, x_3) = & [C_{15}k_1U_1^{(r)} + C_{35}k_3^{(r)}U_3^{(r)} + C_{45}k_3^{(r)}U_2^{(r)} + \\ & C_{55}(k_3^{(r)}U_1^{(r)} + k_1U_3^{(r)}) + C_{56}k_1U_2^{(r)} + \\ & e_{15}k_1\Phi^{(r)} + e_{35}k_3^{(r)}\Phi^{(r)}]e^{-ik_3^{(r)}x_3} \end{aligned} \quad (11d)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W}_4(r, x_3) = & U_1^{(r)}e^{-ik_3^{(r)}x_3} \\ \mathbf{W}_5(r, x_3) = & U_2^{(r)}e^{-ik_3^{(r)}x_3} \\ \mathbf{W}_6(r, x_3) = & U_3^{(r)}e^{-ik_3^{(r)}x_3} \end{aligned} \right\} \quad (11e)$$

$$\mathbf{W}_7(r, x_3) = \Phi^{(r)}e^{-ik_3^{(r)}x_3} \quad (11f)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_8(r, x_3) = & -i[e_{31}k_1U_1^{(r)} + e_{33}k_3^{(r)}U_3^{(r)} + \\ & e_{34}k_3^{(r)}U_2^{(r)} + e_{35}(k_3^{(r)}U_1^{(r)} + k_1U_3^{(r)}) + e_{36}k_1U_2^{(r)} - \\ & \varepsilon_{13}k_1\Phi^{(r)} - \varepsilon_{33}k_3^{(r)}\Phi^{(r)}]e^{-ik_3^{(r)}x_3} \end{aligned} \quad (11g)$$

$$\mathbf{L}_1(s, x_3) = -[C_{13}^Lk_1U_1^{L(s)} + C_{33}^Lk_3^{(s)}U_3^{L(s)}]e^{-ik_3^{(s)}x_3} \quad (11h)$$

$$\mathbf{L}_2(s, x_3) = -[C_{44}^Lk_3^{(s)}U_2^{L(s)}]e^{-ik_3^{(s)}x_3} \quad (11i)$$

$$\mathbf{L}_3(s, x_3) = -[C_{44}^Lk_3^{(s)}U_1^{L(s)} + C_{44}^Lk_1U_3^{L(s)}]e^{-ik_3^{(s)}x_3} \quad (11j)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}_4(s, x_3) = & -U_1^{L(s)}e^{-ik_3^{(s)}x_3} \\ \mathbf{L}_5(s, x_3) = & -U_2^{L(s)}e^{-ik_3^{(s)}x_3} \\ \mathbf{L}_6(s, x_3) = & -U_3^{L(s)}e^{-ik_3^{(s)}x_3} \end{aligned} \right\} \quad (11k)$$

为了求解方程 (10) 的非零解, 该矩阵 $\mathbf{M}$ 的行列式值需为零, 由此关系式即可决定该压电平板声板波受有限液体负载的波传行为。

2 数值分析

在此, 以一 $128^\circ Y$ 向切角的铌酸锂 (LiNbO_3) 压电芯片、且波传方向往 $X + 90^\circ$ 方向传的板波为一算例。当该压电平板没有受液体负载且两面为真空负载的情况下, 该运动系统可分解成两个独立的

运动系统, 即 u_1, u_3 和 ϕ 与 u_2 系统, 在此算例中, 以 u_1, u_3 和 ϕ 运动系统来作说明。根据方程 (10), 此真空负载的运动系统的边界条件化简成 8 条, 而当有液体负载时, 边界条件则为 14 条。

由文献 [14] 中所得的铌酸锂材料参数, 可计算得真空负载时 $128^\circ YX + 90^\circ$ 铌酸锂压电平板的频散曲线图, 如图 2 所示。其中波数 k_1 以板厚 h 无因次化、频率 ω 以波速 V_t 无因次化, 其中 V_t 等于 $(C_{44}/\rho)^{1/2}$, 图中并有两渐近线 L_1 与 L_2 , L_1 的斜率为该压电晶体内的纵波波速, L_2 的斜率为该压电晶体内的横波波速, 除了表面波外, 板波的频散曲线随 k_1 变大后将收敛到 L_2 ; 图中电性短路代表在压电平板 $x_3 = -h$ 面的电位为零。经由电性开路 and 短路的波速差别, 可得到机电耦合系数 K^2 , 即

$$K^2 = 2(v_o - v_m)/v_o \quad (12)$$

其中 v_o 代表电性开路下波速, v_m 代表电性短路下波速。图 3 即为该压电平板前 9 个声板波所相对应的 K^2 值, K^2 值越大即代表该板波越容易被激发出来, 图中显示越高声板波所显示出的 K^2 值越小, 且随着波数 k_1 变大, K^2 值到达一峰值后随即趋近于定值, 根据图 2 可知, 各个声板波在电性开路与短路最大差别处为在刚经过渐近线 L_1 的地方, 故 K^2 的峰值皆发生在此附近。图 3 显示第 2 平板声板波在 $hk_1/(2\pi) = 0.083$ 具有最大的 K^2 值 0.21。

再者, 固定 $hk_1/(2\pi) = 1.75$, 即 $h/\lambda = 1.75$ 且液体厚度与压电基板厚度比为 0.1, 压电基板厚度为 $500\mu\text{m}$, 计算前 20 个声板波在水与甘油液体负载下

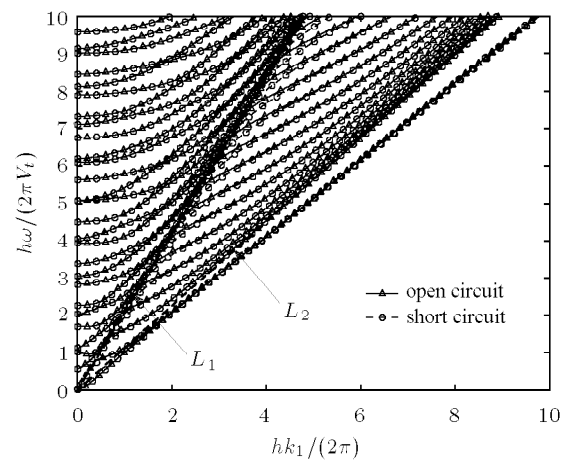


图 2 $128^\circ YX + 90^\circ$ 铌酸锂平板频散曲线

Fig.2 Dispersion curve of $128^\circ YX + 90^\circ$ LiNbO₃ plate

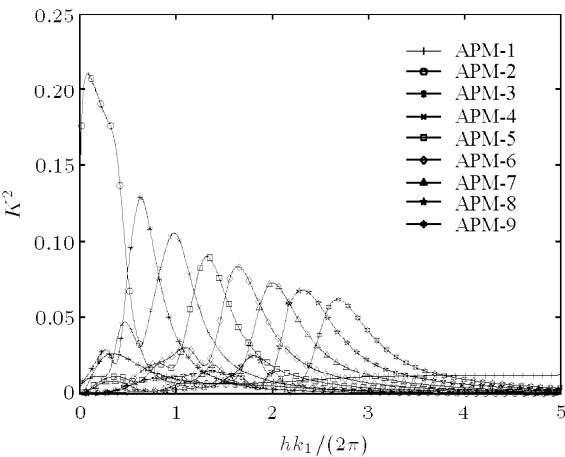


图 3 128°YX + 90° 铌酸锂板前 9 个声板波的 K^2
Fig.3 The K^2 of the first 9 APMs in 128°YX + 90°
LiNbO₃ plate

的波传现象变化, 其中在 25°C 下水与甘油的各个参数如表 1 所示, 且容积模数 κ 等于密度与纵向波速平方的乘积.

表 1 液体的材料参数

Table 1 Material properties of liquids

	Density/ (kg·m ⁻³)	Longitudinal velocity/(m·s ⁻¹)	Viscosity (cp)	Permittivity (1/ε ₀)
DI water	1 000	1 500	0.9	80
glycerol	1 260	1 923	934	46.5

图 4 与图 5 分别为前 20 个声板波在水负载与甘油负载下的损耗, 在有限厚度下水负载的衰减量皆很小, 约小于 0.04 dB/mm, 而在甘油负载下, 除了第 19 声板波衰减量较大外, 其余皆小于 2 dB/mm, 由于衰减主要起因于液体之黏滞性, 由此可知, 第 19 声板波较易受液体黏滞性所影响, 因而可用来侦

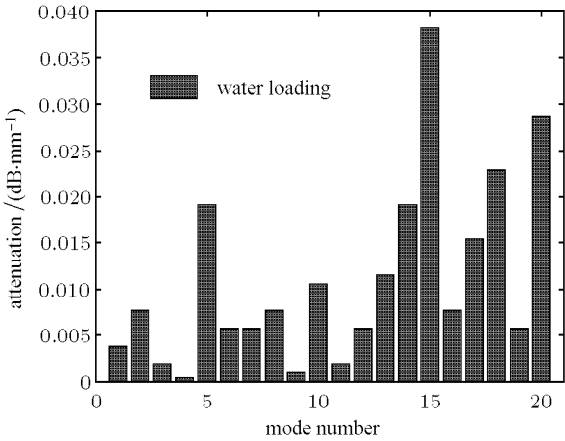


图 4 水负载下, 前 20 个声板波的衰减量
Fig.4 The attenuations of first 20 APMs for water loading

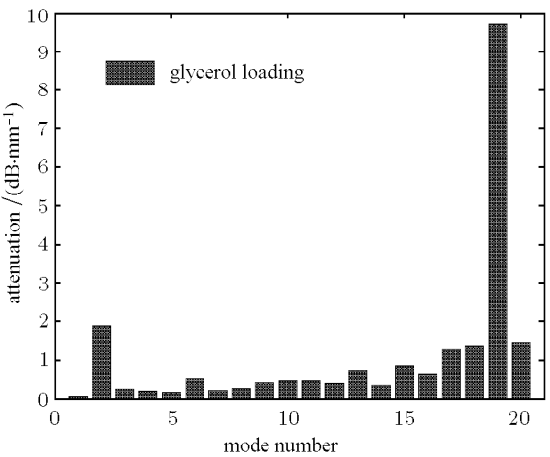


图 5 甘油负载下, 前 20 个声板波的衰减量
Fig.5 The attenuations of first 20 APMs for glycerol loading

测黏滞系数小且较微量的变化, 而其它声板波则可用来侦测黏滞系数较大的液体.

固定第 5 声板波且 $h/\lambda = 1.75$, 计算随甘油液体厚度变化的波速与衰减变化, 见图 6 与图 7. 图 6 中的黑虚线为该声板波无液体负载时的波速, 且图中的计算点间隔 d/h 为 0.01, 即图中标示圆圈的点. 图中显示波速与衰减随液体厚度而呈现周期震荡变化, 此原因在于随着不同的液体厚度, 液体内的波传会呈现不同的声阻抗状态, 当呈现声阻抗匹配时, 液体内的位移场大于压电平板内的位移场, 能量集中在液体内部并消耗, 故使得此时的衰减最大, 反之, 当呈现声阻抗不匹配时, 液体内的能量较小, 故而使得衰减变小, 见图 8 的位移场图. 图 8(a) 与图 8(b) 分别显示在 $d/h = 0.1$ 和 $d/h = 0.14$ 时的位移场形, 其中 $x_3/h > 0$ 区域为液体, $x_3/h < 0$ 区域为压电平板; 由图 7 可知在 $d/h = 0.14$ 时衰减最大,

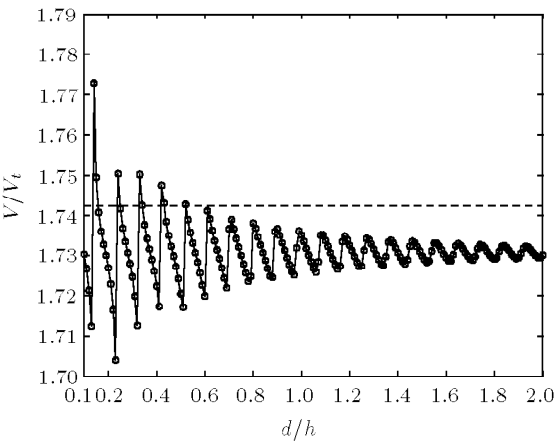


图 6 第 5 声板波随甘油厚度改变的波速变化
Fig.6 The variations of phase velocity along with the
thickness of glycerol for APM-5

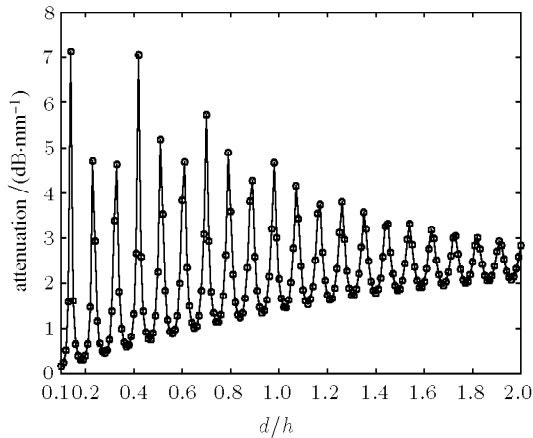


图 7 第 5 声板波随甘油厚度改变的衰减变化

Fig.7 The variations of attenuation along with the thickness of glycerol for APM-5

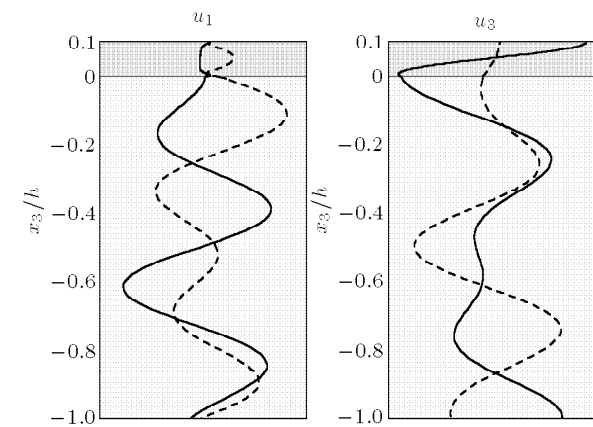
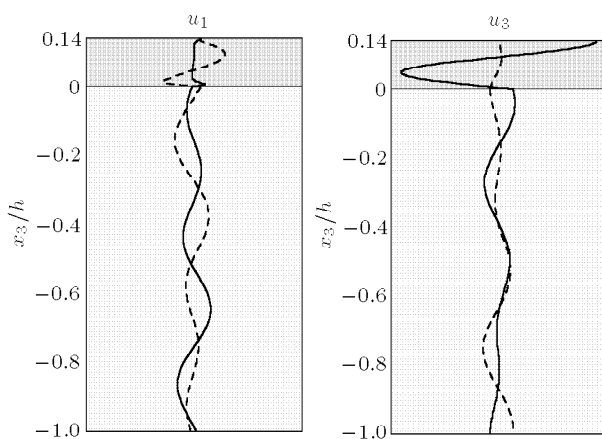
(a) $d/h = 0.1$ 的声板波位移(a) The displacement mode-shape for $d/h = 0.1$ (b) $d/h = 0.14$ 的声板波位移(b) The displacement mode-shape for $d/h = 0.14$

图 8 不同甘油厚度的第 5 声板波位移

Fig.8 The displacement mode-shape of APM-5 with different thickness of glycerol

而图 8(b) 的位移场形也说明此时在液体内的位移场大于压电材料内部的位移场, 证明前述说法. 同样地, 在其它平板声板波也皆显示相同的情况.

3 结 论

本文探讨了在有限液体负载下压电平板声板波的改变, 经由完整的理论推导与数值分析, 可预测在一般液体负载下, 不同平板声板波的波速改变与衰减. 经由水与甘油液体负载理论计算, 可得不同平板声板波具有不同的衰减, 并可分别应用在高黏度与低黏度液体的传感器, 此一理论对于应用声板波在液体感测上有极大的帮助.

在不同液体厚度负载下, 本文也发现不同液体厚度对板波波速与衰减有极大的影响, 并呈现周期变化, 若无法有效控制液体厚度, 则在应用上必须考虑此一因素, 然而随着液体厚度变大, 板波波速与衰减的震荡量会变小, 相比之下, 若采用板厚较薄的平板或液体厚度变大, 则可降低此一影响因素.

参 考 文 献

- 1 Ricco A.J, Martin S.J. Acoustic wave viscosity sensor. *Applied Physical Letters*, 1987, 50(21): 1474~1476
- 2 Zhu ZM, Wu JR, Li J, et al. A general dispersion relation for Lamb-wave sensors with liquid-layer loading. *Sensors and Actuators A*, 1995, 49(1): 79~84
- 3 Teston F, Feuillard G, Tessier L, et al. Mass sensitivity of acoustic plate mode in liquids. *IEEE Ultrasonics Symposium*, 1996. 327~330
- 4 Zaitsev BD, Kuznetsova IE, Joshi SG. Propagation of acoustic waves in plates bordered with viscous liquid. *IEEE Ultrasonics Symposium*, 1997. 381~384
- 5 Teston F, Tessier L, Feuillard G, et al. The multi-layered effective permittivity function applied to the mass loading and viscous coupling in shear horizontal-acoustic plate modes. *Sensors and Actuators B*, 1999, 59(5): 171~176
- 6 Teston F, Feuillard G, Lethiecq M. Propagation of lamb waves in 1-3 piezocomposite bordered by liquids. *IEEE IFCS*, 1999: 1006~1069
- 7 Teston F, Feuillard G, Tessier L, et al. Analysis of the coupling between shear horizontal plate waves and liquids: Application to the measurement of the shear rigidity modulus of glycerol solutions. *Journal of Applied Physics*, 2000, 87(2): 689~694
- 8 Zaitsev BD, Kuznetsova IE, Joshi SG, et al. Acoustic waves in piezoelectric plates bordered with viscous and conductive liquid. *Ultrasonics*, 2001, 39(1): 45~50
- 9 Ivan V. Anisimkin. A novel lamb-mode liquid sensor array. *IEEE Ultrasonics Symposium*, 2003: 1326~1329

- 10 Glen McHale. Generalized concept of shear horizontal acoustic plate mode and love wave sensors. *Meas Sci Technol*, 2003, 14(11): 1847~1853
- 11 Ivan V. Anisimkin, Vladimir I. Anisimkin. Attenuation of acoustic normal modes in piezoelectric plates loaded by viscous liquids. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 2006, 53(8): 1487~1492
- 12 Auld BA. *Acoustic Fields and Waves in Solids I*. New York: Wiley, 1973. 299
- 13 Prokhorov AM, Kuzminov YS. *Physics and Chemistry of Crystalline Lithium Niobate*. New York: Adam Hilger, 1990. 165

THE THEORETICAL ANALYSIS OF ACOUSTIC PLATE WAVE IN PIEZOELECTRIC PLATE WITH FINITE FLUID LOADING

Yang Mingyi¹⁾ Chen Jichao

(Department of Mechanical Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, China)

Abstract This article presents the attenuations and phase shifts of the acoustic plate wave modes (APMs) with finite liquid loading in piezoelectric plates. The partial wave theory is applied to analyze a piezoelectric plate loading with liquid. The first 20 APMs in $128^\circ\text{YX}+90^\circ\text{LiNbO}_3$ plate with DI water and glycerol loading are theoretically calculated. The variation of phase velocity and attenuation of APMs with different thickness of glycerol also presented. The results shown in this paper are essential for using the APMs in the designs of liquid phase sensors.

Key words piezoelectric plate, acoustic plate modes, partial wave theory, viscous sensors, finite thickness fluid