

多柔体系统响应计算的子循环计算方法研究¹⁾

缪建成^{*,†} 朱 平^{*} 陈关龙^{*,2)} 朱大炜^{*}

^{*}(上海交通大学机械与动力工程学院, 上海 200240)

[†](沙洲工学院机电工程系, 张家港 215600)

摘要 过去近 30 年中, 柔性多体系统动力学研究取得了巨大的进展, 人们的兴趣集中在柔性多体系统建模、计算及实验研究等 3 个方面. Belytschko 等于 1979 年提出的子循环算法已经成功地应用于结构动力响应的有限元计算中, 然而有关柔性多体动力学的子循环算法研究尚未见报道. 该文提出了一种适合于柔性多体系统响应计算的子循环算法, 在将非线性微分-代数混合方程组 (DAEs) 缩并为纯微分方程组 (ODE) 的基础上, 推导出快、慢变分量的同步更新公式和子步更新公式; 在变量的数值积分过程中, 采用能量平衡计算检查算法的稳定性; 算例结果表明该算法可以在保持合适的精度要求下, 有效地提高响应的计算效率; 对积分步长进行摄动修正可以保持算法的稳定性.

关键词 柔性多体系统动力学, DAEs 方程, 中心差分法, 子循环算法, 能量平衡, 稳定性分析

中图分类号: O345 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2008)04-0511-09

引 言

近 30 年来, 研究人员在柔性多体系统动力学 (FMD) 方面进行了大量的工作, 研究成果主要集中在 3 个方面^[1]: (1) FMD 建模基本原理和方法; (2) FMD 计算方法及相应的软、硬件开发; (3) FMD 实物模型试验及计算校验.

有关 FMD 建模方法的研究较为深入, 一般而言, 其基本方程形式是一组非线性微分代数混合方程组 (DAEs), 由于方程的强烈耦合和高度非线性, 很难进行解析求解, 数值计算中主要存在两个问题, 首先, 大范围运动变量与高频弹性变形变量同时存在, 难以确定适当的积分步长, 造成数值积分的病态 (stiff or ill condition). 另外, 由于多体系统动力学方程的系数矩阵为高度非线性, 其初始条件或参数的微小变化或因计算误差积累, 都可能导致仿真结果的较大偏差甚至发散.

目前, 针对上述问题的理论研究进展不大, 在仿真时大多是采用传统的数值积分方法, 如普遍应用于多体系统动力学软件中的 Newmark 算法、Runge-Kutta 算法以及 Gear 算法, 在这方面, Iowa 大学的 Haug 和 Negrut 等^[2~4]进行了大量的工作.

为了提高多柔体响应计算效率的技术, 人们也尝试了多种相关技术的研究, 包括单向递推集建模计算^[5~10], 计算机符号运算^[11~14], 自适应网格技术^[15]以及并行计算方法等. 虽然上述技术均能有效提高多柔体响应的计算效率, 但是除单向递推集建模技术外, 其它几类方法主要是应用先进的软、硬件技术, 并未深入触及多柔体系统方程的本质特点.

1979 年, Belytschko 等^[16]首先提出子循环算法 (Sub-cycling), 这一做法带来的直接好处就是能够在保证计算精度的前提下有效提高计算效率. Neal 等^[17]采用该算法进行冲击问题的仿真计算, 计算时间只有原算法的 15%; 高晖等^[18]将该方法用于汽车白车身的碰撞过程的有限元分析, 计算耗时只有原算法的 39.3%, 实践证明该算法能大幅度提高常微分方程尤其是刚性微分方程的计算效率.

Wasfy 等^[19]指出, 在计算方法的研究中, 如果能将子循环方法成功地应用到 FMD 中, 将可能大幅度提高其计算效率, 然而迄今为止, 该类算法尚未见应用于 FMD 中.

本文第 1 节在中心差分法基础上, 提出一种适合于多柔体系统响应计算的子循环算法,

2006-10-19 收到第 1 稿, 2008-06-05 收到修改稿.

1) 中国电子科技集团总公司第十四研究所预研项目.

2) E-mail: glchen@sjtu.edu.cn

给出了快、慢变分量的同步更新公式和子步更新公式;第2节通过几个算例,同时采用能量平衡计算,对算法的稳定性进行了校核,并对计算结果进行了对比分析,说明该算法可以在保持合适的精度要求下,有效地提高响应的计算效率.

1 多柔体系统响应子循环算法

子循环算法的基本原理是根据结构有限单元的网格大小或单元刚度进行分区,对不同的区域采用不同的时间步长.子循环算法分为主循环和子循环,单元节点信息的更新涉及到两种计算:同步更新计算和子步更新计算.算法成功实现的关键在于恰当地处理界面节点间相互作用,通常的方法是假设长时域节点数据在子循环过程中为常速度或常加速度变化,一般认为常速度法比常加速度法稳定,但计算精度较低, Daniel^[20]提出的平均常加速度方法具有与常速度法相似的稳定性,而精度比常速度法高.

子循环算法一般在传统的显式或隐式算法基础上进行修正, Belytschko 等^[16]首先基于中心差分法提出子循环算法.随着子循环算法研究的深入,人们尝试将不同的算法修正为相应的子循环算法,纽马克 (Newmark) 算法^[21,22]是采用最多的算法原型之一.

FMD 方程变量具有适合子循环的特点,刚性运动分量适合以较大时间步进行数据更新,而弹性变形分量适合以小时间步进行数据更新.

1.1 多柔体系统动力学模型

空间任意柔性体可以采用有限元法进行离散,其上任意点的位置和变形情况如图 1 所示,其动力学方程建立过程如下所述.

根据图 1,定义柔性体广义坐标如下

$$\mathbf{q} = [\mathbf{R}_o \quad \boldsymbol{\theta} \quad \mathbf{q}_f]^T \quad (1)$$

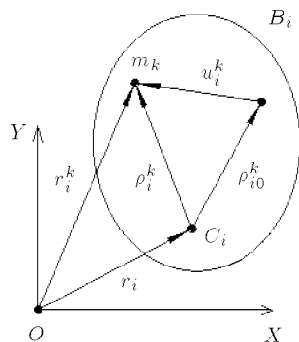


图 1 柔性体变形描述

Fig.1 An arbitrary flexible body

其中

$$\mathbf{R}_o = [R_x \quad R_y \quad R_z]^T \quad (2)$$

为柔性体连体坐标系的原点位置向量.

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]^T \quad (3)$$

为柔性体连体坐标系姿态角向量.

$$\mathbf{q}_f = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_m]^T \quad (4)$$

是柔性体的变形模态坐标,下标 m 表示变形模态取前 m 阶.

柔性体上任意点变形的物理坐标描述为

$$\mathbf{u}_i^k = \boldsymbol{\phi}_i^k \mathbf{q}_f \quad (5)$$

其中

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_m]^T$$

为柔性体模态向量矩阵,在保持一定计算精度的前提下取前 m 阶固有模态.

根据以上的坐标系定义及变量定义,采用 Lagrange 第二方程可以建立出柔性体运动方程,其矩阵格式描述为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{RR} & \mathbf{M}_{R\theta} & \mathbf{M}_{Rf} \\ \mathbf{M}_{\theta R} & \mathbf{M}_{\theta\theta} & \mathbf{M}_{\theta f} \\ \mathbf{M}_{fR} & \mathbf{M}_{f\theta} & \mathbf{M}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_o \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_o \\ \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{q}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R \\ \mathbf{Q}_\theta \\ \mathbf{Q}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{vR} \\ \mathbf{Q}_{v\theta} \\ \mathbf{Q}_{vf} \end{bmatrix} \quad (6)$$

方程的右边由广义外载荷和广义速度二次项组成.

柔性体的约束方程为

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (7)$$

最后得到广义坐标描述的多柔体系统微分-代数混合方程

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_F + \mathbf{Q}_v \quad (8)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (9)$$

通过对约束方程的两次求导,可以得到以下扩展形式的动力学控制方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_\gamma & \mathbf{C}_q \\ \mathbf{C}_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_F^* \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中 C_q 为约束的雅可比方程

$$\gamma = C_q \ddot{q} = -C_{tt} - 2C_{qt} - (C_q \dot{q})_q \dot{q}$$

$$Q_F^* = Q_F + Q_v - Kq$$

由于约束的存在, FMD 方程中的变量并非完全独立, 为此在式 (10) 基础上将未知量 q 分解为非独立变量 q_d 和独立变量 q_i , 消去非独立变量 q_d 和 Lagrange 乘子 λ 可得到缩并型多柔体动力学方程组^[23]

$$\hat{M}_i(q_i, q_d, t) \ddot{q}_i = \hat{Q}_i(\dot{q}_i, q_i, \dot{q}_d, q_d, t) \quad (11)$$

其中

$$\hat{M}_i = M_{ii} - M_{id} C_{qd}^{-1} C_{qi} - C_{qd}^T (C_{qd}^{-1})^T.$$

$$[M_{di} - M_{dd} C_{qd}^{-1} C_{qi}]$$

$$\hat{Q}_i = Q_{Fi}^* - M_{id} C_{qd}^{-1} \gamma - C_{qi}^T (C_{qd}^{-1})^T.$$

$$[Q_{Fd}^* - M_{dd} C_{qd}^{-1} \gamma]$$

该方程为纯微分方程, 可以先数值积分求解各离散时刻的 q_i , 再根据约束关系求得对应的非独立坐标. 该方程组所需求解的未知量最少, 但是其系统矩阵为密集阵, 变量的分离需要进行矩阵分解计算^[24].

1.2 多柔体系统子循环算法

为简单起见, 可以考虑对刚性运动分量设置长时间步长 Δt_L , 弹性变形分量设置短时间步长为 Δt_S , 变量区域分割和耦合原理如图 2 所示.

按照这一分割形式, 方程 (11) 可以处理为如下分块格式

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_{LL}^t & \hat{M}_{LS}^t \\ \hat{M}_{SL}^t & \hat{M}_{SS}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_L \\ \ddot{q}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_L^t \\ \hat{Q}_S^t \end{bmatrix} \quad (12)$$

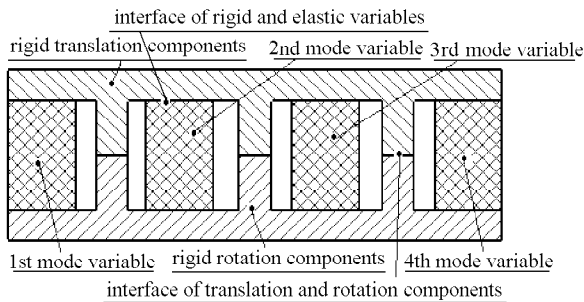


图 2 多柔体方程运动变量区域分割与耦合原理
Fig.2 Principle of region partitioning and coupling

between variables

设变量 q_L, q_S 分别遵循以下差分格式

$$\ddot{q}_L^t = \frac{1}{\Delta t_L^2} [q_L^{t-\Delta t_L} - 2q_L^t + q_L^{t+\Delta t_L}] \quad (13)$$

$$\dot{q}_L^t = \frac{1}{2\Delta t_L} [-q_L^{t-\Delta t_L} + q_L^{t+\Delta t_L}] \quad (14)$$

$$\ddot{q}_S^t = \frac{1}{\Delta t_S^2} [q_S^{t-\Delta t_S} - 2q_S^t + q_S^{t+\Delta t_S}] \quad (15)$$

$$\dot{q}_S^t = \frac{1}{2\Delta t_S} [-q_S^{t-\Delta t_S} + q_S^{t+\Delta t_S}] \quad (16)$$

其中 Δt_L 为慢变变量 q_L 的积分步长, Δt_S 为快变分量 q_S 的积分步长, $\Delta t_L = m\Delta t_S$.

将式 (13)~(16) 代入式 (12) 中, 得到如下格式

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{M}_{LL}^t}{\Delta t_L^2} [q_L^{t-\Delta t_L} - 2q_L^t + q_L^{t+\Delta t_L}] + \\ & \frac{\hat{M}_{LS}^t}{\Delta t_S^2} [q_S^{t-\Delta t_S} - 2q_S^t + q_S^{t+\Delta t_S}] = \hat{Q}_L^t \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{M}_{SL}^t}{\Delta t_L^2} [q_L^{t-\Delta t_L} - 2q_L^t + q_L^{t+\Delta t_L}] + \\ & \frac{\hat{M}_{SS}^t}{\Delta t_S^2} [q_S^{t-\Delta t_S} - 2q_S^t + q_S^{t+\Delta t_S}] = \hat{Q}_S^t \end{aligned} \quad (18)$$

其中, 广义质量阵是惯性耦合阵, 式 (17) 和 (18) 中都含有待求未知量 $q_L^{t+\Delta t_L}$ 和 $q_S^{t+\Delta t_S}$, 采用牛顿-辛普森法进行隐式求解. 取前一时刻的变量值为初始估值

$$^{(1)}q_L^{t+\Delta t_L} = q_L^t \quad (19)$$

$$^{(1)}q_S^{t+\Delta t_S} = q_S^t \quad (20)$$

因此式 (17), (18) 的隐式迭代求解公式如下

$$\frac{\hat{M}_{LL}^t}{\Delta t_L^2} \{^{(k+1)}q_L^{t+\Delta t_L}\} = ^{(k)}\hat{Q}_L^t - \frac{\hat{M}_{LS}^t}{\Delta t_S^2} \{^{(k)}q_S^{t+\Delta t_S}\} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\hat{M}_{LS}^t}{\Delta t_S^2} \{q_S^{t-\Delta t_S} - 2q_S^t\} - \frac{\hat{M}_{LL}^t}{\Delta t_L^2} \{q_L^{t-\Delta t_L} - 2q_L^t\}. \\ & \frac{\hat{M}_{SS}^t}{\Delta t_S^2} \{^{(k+1)}q_S^{t+\Delta t_S}\} = ^{(k)}\hat{Q}_S^t - \frac{\hat{M}_{SL}^t}{\Delta t_L^2} \{^{(k)}q_L^{t+\Delta t_L}\} - \\ & \frac{\hat{M}_{SL}^t}{\Delta t_L^2} \{q_L^{t-\Delta t_L} - 2q_L^t\} - \frac{\hat{M}_{SS}^t}{\Delta t_S^2} \{q_S^{t-\Delta t_S} - 2q_S^t\} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\Delta^{(k+1)}q_L^{t+\Delta t_L} = ^{(k+1)}q_L^{t+\Delta t_L} - ^{(k)}q_L^{t+\Delta t_L} \quad (23)$$

$$\Delta^{(k+1)}q_S^{t+\Delta t_S} = ^{(k+1)}q_S^{t+\Delta t_S} - ^{(k)}q_S^{t+\Delta t_S} \quad (24)$$

迭代终止条件如下

$$|(k+1)q_L^{t+\Delta t_L} - (k)q_L^{t+\Delta t_L}| \leq \varepsilon_L \quad (25)$$

$$|(k+1)q_S^{t+\Delta t_S} - (k)q_S^{t+\Delta t_S}| \leq \varepsilon_S \quad (26)$$

随后进入快变分量 q_S 子步更新计算, 其差分格式仍如式 (22) 和 (24), 因此

$$\begin{aligned} \frac{\hat{M}_{SS}^{t+\Delta t_S}}{\Delta t_S^2} q_S^{t+2\Delta t_S} &= Q_S^{t+\Delta t_S} - \frac{\hat{M}_{SL}^{t+\Delta t_S}}{\Delta t_L^2} [q_L^{t-\Delta t_L} - 2q_L^t + q_L^{t+\Delta t_L}] - \\ &\frac{\hat{M}_{SS}^{t+\Delta t_S}}{\Delta t_S^2} [q_S^t - 2q_S^{t+\Delta t_S}] \end{aligned} \quad (27)$$

式 (27) 中, 广义质量阵的值与变量 $q_S^{t+\Delta t_S}$ 和 $q_L^{t+\Delta t_S}$ 及相关的导数有关, $q_S^{t+\Delta t_S}$ 在同步更新中计算得到, 而 $q_L^{t+\Delta t_S}$ 及其导数则为未知变量, 为了方便地求得 $q_L^{t+\Delta t_S}$ 及其导数, 可根据已求得的 q_L^t 和 $q_L^{t+\Delta t_L}$ 及其相应导数, 采用类似于 Belytschko 等 [17] 提出的常加速度法, 按照梯形法则, 假设

$$\ddot{q}_L^{t+\Delta t_S} = \ddot{q}_L^t \quad (28)$$

$$\dot{q}_L^{t+\Delta t_S} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \dot{q}_L^t + \frac{1}{m} \dot{q}_L^{t+\Delta t_L} \quad (29)$$

得到

$$q_L^{t+\Delta t_S} = q_L^t + \Delta t_S \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) \dot{q}_L^t + \frac{1}{m} \dot{q}_L^{t+\Delta t_L} \right] \quad (30)$$

对于 $2 \leq j \leq m$ 中的任意子步, 则可设

$$q_L^{t+(j-1)\Delta t_S} = q_L^t + \sum_{i=1}^{j-1} \Delta t_S \left[\left(1 - \frac{i}{m}\right) \dot{q}_L^t + \frac{i}{m} \dot{q}_L^{t+\Delta t_L} \right] \quad (31)$$

式 (27) 修正为

$$\begin{aligned} \frac{\hat{M}_{SS}^{t+(j-1)\Delta t_S}}{\Delta t_S^2} q_S^{t+j\Delta t_S} &= Q_S^{t+(j-1)\Delta t_S} - \\ &\frac{\hat{M}_{SL}^{t+(j-1)\Delta t_S}}{\Delta t_L^2} [q_L^{t-\Delta t_L} - 2q_L^t + q_L^{t+\Delta t_L}] - \\ &\frac{\hat{M}_{SS}^{t+(j-1)\Delta t_S}}{\Delta t_S^2} [q_S^{t+(j-2)\Delta t_S} - 2q_S^{t+(j-1)\Delta t_S}] \end{aligned} \quad (32)$$

式 (32) 即为求取变量 q_S 的子步更新公式. 式 (21) ~ (24) 及 (32) 联立组成了变量 q_L 和 q_S 的同步更新和子步更新格式.

中心差分算法的启动需要 $-\Delta t$ 时刻的相关数据, 子循环算法的启动方法如下.

由 $\hat{M}_i \ddot{q}_i^t = \hat{Q}_i^t$ 得

$$\ddot{q}_i^t = [\hat{M}_i^t]^{-1} \hat{Q}_i^t \quad (33)$$

根据中心差分假设可得

$$q_i^{t-\Delta t} = q_i^t - \dot{q}_i^t \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_i^t \quad (34)$$

因此子循环启动公式为

$$q_L^{t-\Delta t_L} = q_L^t - \dot{q}_L^t \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_L^t \quad (35)$$

$$q_S^{t-\Delta t_S} = q_S^t - \dot{q}_S^t \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{q}_S^t \quad (36)$$

2 算例及结果验证

本节通过几个算例验证上述子循环算法, 并采用能量平衡计算对算法进行稳定性校验.

图 3 所示为一旋转杆滑块系统, 滑块通过弹簧与旋转杆一端相连并始终在杆轴线方向上运动, XOY 为系统惯性坐标系, 原点取为杆的端点. $O^i x^i y^i$ 为连体坐标系. 杆在转矩 T 作用下旋转, 滑块在杆旋转过程中沿杆振动.

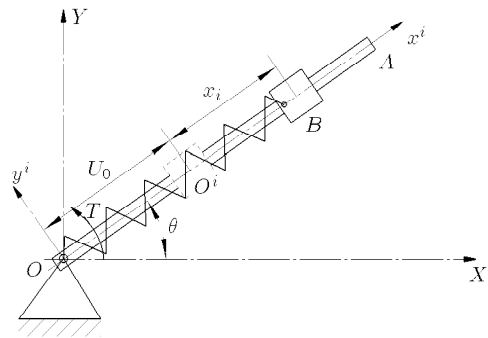


图 3 旋转杆-滑块系统

Fig.3 Rotational rod-spring-sliding block system

定义系统的广义坐标为

$$q = [R_x^o \ R_y^o \ \theta \ x_i]^T$$

其中 θ 为旋转杆的转角, x_i 为滑块振幅, $[R_x^o \ R_y^o]$ 为铰点位置. 采用 MATLAB 符号计算技术建立系统的缩并型动力学方程

$$\hat{M}_i(q_i, q_d, t) \ddot{q}_i = \hat{Q}_i(q_i, q_i, \dot{q}_d, q_d, t) \quad (37)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{M}_i &= M_{ii} - M_{id} C_{qd}^{-1} C_{qi} - C_{qd}^T (C_{qd}^{-1})^T. \\ &[M_{di} - M_{dd} C_{qd}^{-1} C_{qi}] \end{aligned}$$

$$\hat{Q}_i = Q_{Fi}^* - M_{id} C_{qd}^{-1} \gamma - C_{qi}^T (C_{qd}^{-1})^T.$$

$$[Q_{Fd}^* - M_{dd} C_{qd}^{-1} \gamma]$$

$$M_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_a l^2 + m_b (x + u_0)^2 & 0 \\ 0 & m_B \end{bmatrix}$$

$$M_{id} = \begin{bmatrix} -\left[\frac{1}{2} m_a l + m_b (x + u_0)\right] \sin \theta \\ m_b \cos \theta \\ \left[\frac{1}{2} m_a l + m_b (x + u_0)\right] \cos \theta \\ m_b \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$M_{di} = M_{id}^T$$

$$M_{dd} = \begin{bmatrix} m_a + m_b & 0 \\ 0 & m_a + m_b \end{bmatrix}$$

$$C_{qi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{qd} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{Fi}^* = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ kx_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2m_B \dot{x} \dot{\theta} (x + u_0) \\ m_B \dot{\theta}^2 (x + u_0) \end{bmatrix}$$

$$Q_{Fd}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_a l \dot{\theta}^2 \sin \theta + 2m_b \dot{x} \dot{\theta}^2 \sin \theta + \\ m_b \dot{\theta}^2 (x + u_0) \cos \theta \\ \frac{1}{2} m_a l \dot{\theta}^2 \cos \theta - 2m_b \dot{x} \dot{\theta}^2 \cos \theta + \\ m_b \dot{\theta}^2 (x + u_0) \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

利用保守系统能量守恒的原理, 在对系统变量进行数值积分的同时, 对系统能量平衡状态时间历程进行校核计算, 并摄动改变积分步长, 使能量平衡误差不超过允许阈值, 能量平衡计算基本公式为 [17]

$$|W_n^{\text{kin}} + W_n^{\text{int}} - W_n^{\text{ext}}| \leq \delta \|W\| \quad (38)$$

其中 W_n^{ext} 为 $(n)\Delta t$ 时外载荷作用于系统的功, W_n^{int} 为 $(n)\Delta t$ 时系统势能, W_n^{kin} 为 $(n)\Delta t$ 时系统动能, δ 为系统能量平衡许可误差。

设杆长 2 m, 重 2 kg, 滑块重 5 kg, 弹簧刚度 1000 N/m, 驱动力矩 100 Nm, 忽略各部分的摩擦。仿真结果如图 4~图 7 所示, 其中, 图 4, 图 5 为每一主步包含 5 步子循环的计算结果, 图 6, 图 7 为每一主步包含 10 步子循环的计算结果, 各图内还给出

了相应的原始算法计算结果。图 8 和图 9 则分别为两种子循环积分过程的能量平衡计算结果。

比较图 4 和图 6 的旋转角计算结果, 可以看出 10:1 的子循环计算误差稍大于 5:1 的子循环过程, 但是所得结果趋势非常相似。滑块振幅计算结果对比 (图 5 和图 7) 也能得到相同的结论, 同样, 10:1 的子循环过程计算误差稍大于 5:1 的子循环过程。但是二者的计算误差与原始结果比较都吻合得不错, 并与文献 [25] 得到了基本一致的结论。其中, 5:1 的子循环过程耗时 35.7 s, 原始算法循环过程耗时 79.8 s, 二者的比例为 44.7%; 10:1 的子循环过程耗时 28.9 s, 只有原始算法耗时的 36.2%。稳定性分析的结果说明在子循环积分过程中, 只要各子域的积分步长不超过其极限步长, 积分过程就是稳定的, 该结论和 Belytschko 等 [16] 提出的子循环算法稳定性准则是一致的。

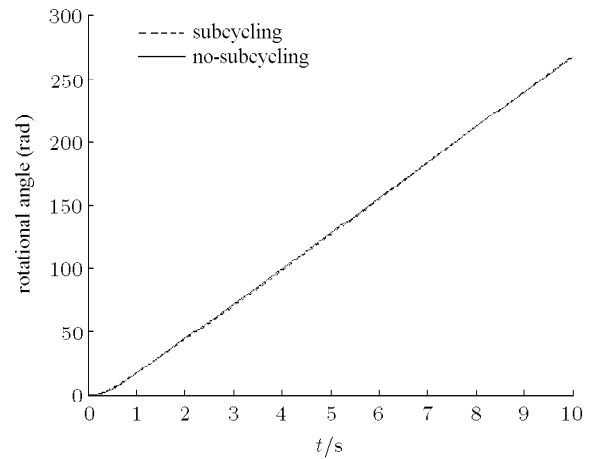


图 4 旋转角度 θ 计算结果 (5:1)

Fig.4 Results of θ (5:1)

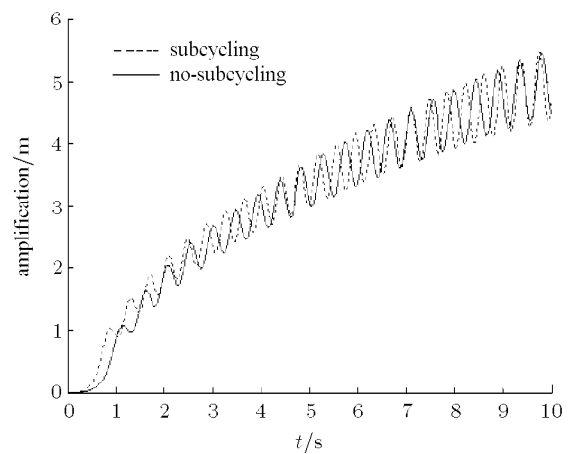


图 5 滑块振动幅度 x_i 计算结果 (5:1)

Fig.5 Results of x_i (5:1)

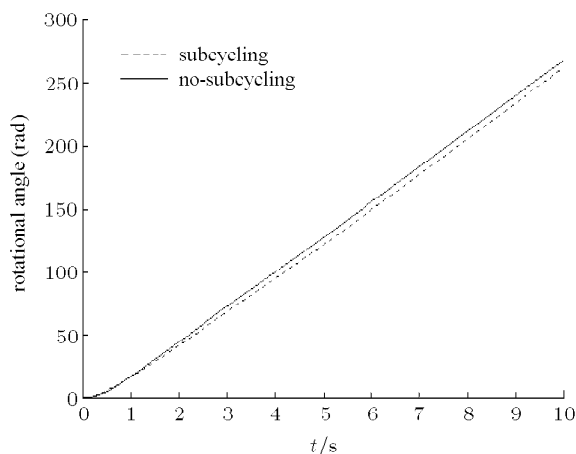
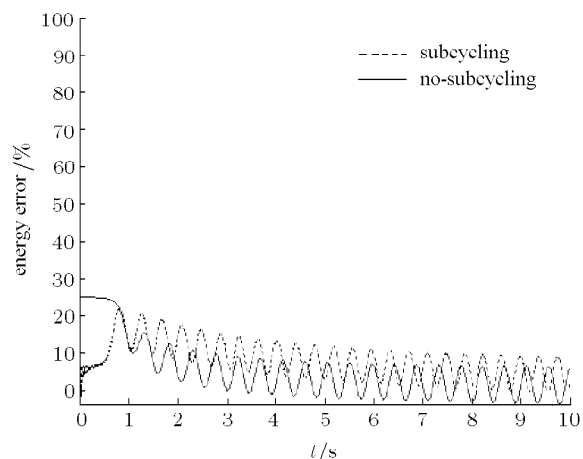
图 6 旋转角度 θ 计算结果 (10:1)Fig.6 Results of θ (10:1)

图 9 系统能量平衡计算 (10:1)

Fig.9 The energy balance calculations (10:1)

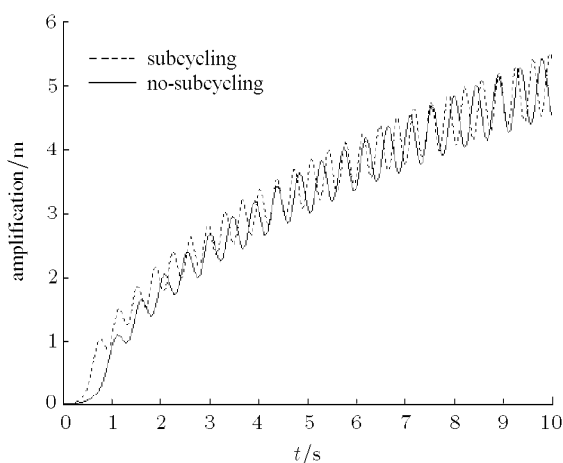
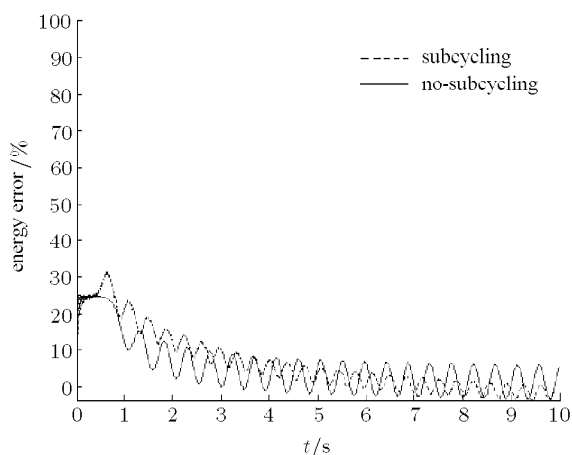
图 7 滑块振动幅度 x_i 计算结果 (10:1)Fig.7 Results of x_i (10:1)

图 8 系统能量平衡计算 (5:1)

Fig.8 The energy balance calculations (5:1)

图 10 所示为一柔性欧拉 - 伯努利梁, 一端铰接于坐标原点, 在转矩 T 驱动下旋转, 其基本参数如下: 弹性模量 $EX = 7.22 \times 10^2$, 泊松比 $PRXY = 0.34$, 密度 $DENS = 2 \times 10^{-9}$, 几何尺寸 $L \times W \times H = 300 \times 10 \times 25$, 驱动转矩 $T = 100 \text{ Nm}$.

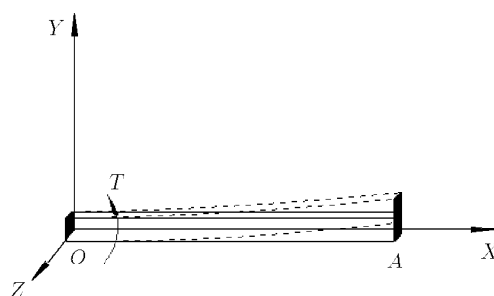


图 10 一端铰接于原点的欧拉 - 伯努利梁

Fig.10 An Euler-Bernoulli beam with a top point mounted on the origin

以模态坐标作为梁变形的广义坐标, 建立柔性梁的动力学方程, 分别采用子循环法和原始算法对该梁的运动历程进行了数值仿真, 仿真结果如图 11, 图 12 所示, 对比结果显示了子循环算法的良好精度和稳定性.

图 13 所示为一螺旋桨叶的有限元模型, 经验表明, 桨叶根部与叶轮轴连接处是疲劳断裂的危险点, 为了提高该部分的计算精度, 在桨叶根部进行了网格细分, 其基本参数如下 (采用 tonne/N/mm/s 单位):

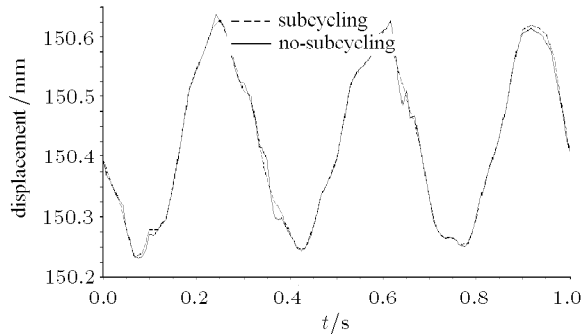


图 11 旋转过程中的梁质心位移

Fig.11 Displacements of center of mass of the elastic beam during the rotation

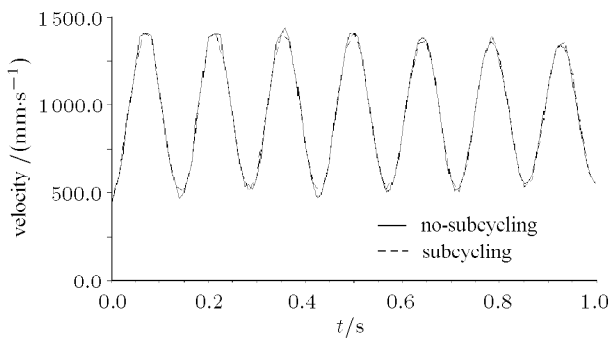


图 12 旋转过程中的梁质心速度

Fig.12 Velocity of center of mass of the elastic beam during the rotation

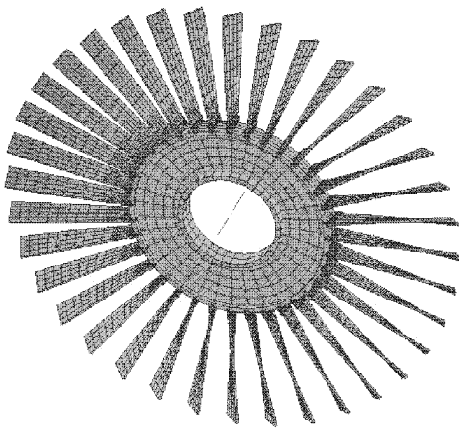


图 13 螺旋桨叶的有限元模型

Fig.13 FEM model of the rotor blades

螺旋桨材料为铝合金,材料弹性模量 $EX = 7 \times 10^4$,材料泊松比 $PRXY = 0.3$,材料密度 $DENS = 2.78 \times 10^{-6}$,螺旋桨外径 $D = 900$ mm,转速为 800 rpm. 结构总体划分单元数为 4140,其中叶根连接部的单元数为 1152,叶轮单元数为 684,叶片部分的单元数为 2304.

为建立基于广义模态坐标的多体动力学方程,首先通过有限元模态分析获得螺旋桨结构的自由模态信息,以其为系统的模态坐标基,建立螺旋桨的动力学方程,分别采用中心差分类子循环算法及其原始算法对该螺旋桨的运动历程进行数值仿真,得到桨叶根部在旋转过程中的动态应力情况和叶片顶端节点 Z 向变形如图 14,图 15 所示.较大的模型单元数量使子循环计算误差有一定程度的增大,但是二者动态变化趋势仍然是基本一致的.其中,中心差分法计算耗时 2380 s,而子循环计算耗时 1550 s,二者比较,计算效率提高近 35%.

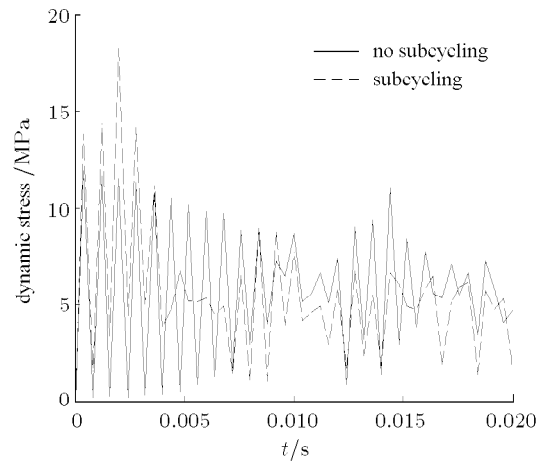
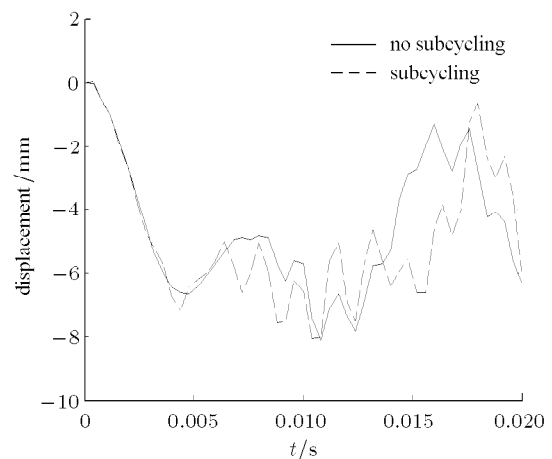


图 14 螺旋桨旋转过程中叶片根部单元动应力计算

Fig.14 Dynamic stress result of one element at the joint during rotation

图 15 叶片顶端节点 Z 向变形Fig.15 Z -direction deformation of the blade top point

3 结 论

本文首次提出了一种基于中心差分原理的适用于多柔体系统仿真分析的子循环计算方法,通过将

待求变量分解为长周期变量域及短周期变量域, 对不同域内的变量采用不同的积分步长, 可以大幅度提高系统仿真的计算效率。

柔性多体系统动力学方程固有的长周期变量(刚体位移变量)、短周期变量(弹性变形变量)使系统方程成为所谓的刚性方程, 其积分过程存在易发散、收敛慢的特点, 由于子循环计算过程中的同步更新中采用了隐式迭代计算, 使得系统的数值积分稳定性得到了改善。

在子循环积分过程中, 每一主步内进行的子循环步数的不同会对系统积分的精度产生一定的影响, 但是在一定范围内, 该影响与积分效率的提高相比并不明显, 总体来说, 积分效率的提高比较显著。

通过在积分过程中实时地检查系统的能量平衡状态, 并在必要的时候摄动地修正积分步长, 可以使子循环积分过程保持良好的稳定性, 并得到合理的数值计算结果。

中心差分法普遍应用于结构有限元动力分析中, 由于其积分步长受到严格的控制, 因此在多体动力学分析中较少应用, 但是作为子循环计算的原始算法, 具有概念清晰、计算简单和程序编制方便的特点。在此基础上, 可以考虑以更加适用于多体系统动力学分析的纽马克算法、龙格-库塔算法作为基础算法, 得到相应的子循环算法, 该部分的工作有待于进一步深入。

参 考 文 献

- 1 黄文虎, 邵成勋. 多柔体系统动力学. 北京: 科学出版社, 1996 (Huang Wenhui, Shao Chengxun. Flexible Multi-body Dynamics. Beijing: Science Press, 1996 (in Chinese))
- 2 Negrut D, Ortiz JL. On an approach for the linearization of the differential algebraic equations of multibody dynamics. In: Proceedings of IDETC/MESA 2005, ASME/IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications. September 24~28, 2005, Long Beach, USA, DETC2005-85109
- 3 Negrut D, Ottarsson G. On an implementation of the hilber-hughes-taylor method in the context of index 3 differential-algebraic equations of multibody dynamics. In: Proceedings of IDETC/MESA 2005, ASME/IEEE International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications. September 24~28, 2005, Long Beach, USA, DETC2005-85096
- 4 Gavrea B, Negrut D, Potra FA. The newmark integration method for simulation of multibody Systems: analytical considerations. In: Proceedings of IMECE 2005, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition 2005. November 5~11, 2005, Orlando, USA, IMECE 2005-81770
- 5 Book WJ. Recursive lagrangian dynamics of flexible manipulator arms. *Int J Robot Res*, 1984, 3(3): 87~101
- 6 Changizi K, Shabana AA. A recursive formulation for the dynamics analysis of open loop deformable multibody systems. *J of Appl Acoust*, 1988, 55(3): 687~693
- 7 Bae DS, Hwang RS, Haug EJ. A recursive formulation for real-time dynamic simulation. *Adv in Des Automation ASME*, New York, 1988. 499~508
- 8 Amirouche FML, Xie M. Explicit matrix formulation of the dynamical equations for flexible multibody systems: a recursive approach. *Comput Struct*, 1993, 46(2): 311~321
- 9 Shabana AA, Hwang YL, Wehage RA. Projection methods in flexible multibody dynamics, Part I: Kinematics, Part II: Dynamics and recursive projection methods. *Int J Numer Methods Eng*, 1992, 35(10): 1927~1966
- 10 Hwang YL. Projection and recursive methods in flexible multibody dynamics. [Ph D Thesis]. Chicago: Dept of Mechanical Engineering, Univ of Illinois, 1992
- 11 Schaechter DB, Levinson DA. Interactive computerized symbolic dynamics for the dynamicist. *J Astronaut*, 1988, 36(4): 365~388
- 12 Cetinkunt S, Book WJ. Symbolic modeling of flexible manipulators. In: Proc of 1987 IEEE Int Conf on Robotics and Automation, 1987. 2074~2080
- 13 Fiset P, Samin JC, Willems PW. Contribution to symbolic analysis of deformable multibody systems. *Int J Numer Methods Eng*, 1991, 32(8): 1621~1635
- 14 Melzer E. Symbolic computations in flexible multibody systems. *Nonlinear Dyn*, 1996, 9(1-2): 147~163
- 15 Shi P, McPhee J, Heppler GR. A deformation field for Euler-Bernoulli beams with applications to flexible multibody dynamics. *Multibody Syst Dyn*, 2001, 5(1): 79~104
- 16 Belytschko T, Mullen R. Stability of explicitimplicit mesh partitions in time integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1978, 12(10): 1575~1586
- 17 Neal MO, Belytschko T. Explicit-explicit subcycling with non-integer time step ratios for structural dynamic systems. *Computers and Structures*, 1989, 31(6): 871~880
- 18 高晖, 李光耀, 钟志华等. 汽车碰撞计算机仿真中的子循环法分析. *机械工程学报*, 2005, 41(11): 98~101 (Gao Hui, Li Guangyao, Zhong Zhihua, et al. Analysis of subcycling algorithms for computer simulation of crashworthiness. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2005, 41(11): 98~101 (in Chinese))
- 19 Wasfy TM, Noor AK. Computational strategies for flexible multibody systems. *Applied Mechanics Reviews*, 2003, 56(6): 553~613
- 20 Daniel WJT. Analysis and implementation of a new constant acceleration subcycling algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40(15): 2841~2855
- 21 Daniel WJT. The subcycled Newmark algorithm. *Computational Mechanics*, 1997, 20(3): 272~281

- 22 Gravouil A, Combescure A. Multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *Int J Numer Methods Eng*, 2001, 50(1): 199~225
- 23 Haug EJ. Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989
- 24 潘振宽, 赵维加. 多体系统 Euler-Lagrange 方程的最小二乘法与违约修正. *力学学报*, 2002, 34(4): 594~603 (Pan Zhenkuan, Zhao Weijia. Least square algorithms and constraint stabilization for Euler-Lagrange equations of multibody system dynamics. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34(4): 594~603 (in Chinese))
- 25 陆佑方. 柔性多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1996 (Lu Youfang. Flexible Multi-body Dynamics. Beijing: Higher Education Press, 1996 (in Chinese))

STUDY ON SUB-CYCLING ALGORITHM FOR A FLEXIBLE MULTI-BODY SYSTEM¹⁾

Miao Jiancheng^{*,†} Zhu Ping^{*} Chen Guanlong^{*,2)} Zhu Dawei^{*}

^{*}(School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

[†](Department of Mechanical Engineering, Shazhou Institute of Technology, Zhangjiagang 215600, China)

Abstract Great developments have been made in the field of flexible multi-body system (FMS) with modeling, computational and experimental studies for nearly 30 years. The subcycling algorithms, which were firstly presented by Belytschko T. et al. in 1979, have been successfully applied in the structural dynamic analysis of FMS. However, subcycling algorithms for the FMS are still not presented up to now. This paper introduces a central difference method based sub-cycling algorithm for the FMS. First, common update formulae and sub-step update formulae for quickly changing variables and slowly changing variables of the FMS are established. Second, the nonlinear differential-algebraic equations are contracted to the original differential equations. Third, algorithm stability is validated with an energy balance computation during the integration procedure. Numerical results indicate that the sub-cycling algorithm is available to enhance the computational efficiency with appropriate computational accuracy. Furthermore, the algorithm stability can be determined by means of modifying the integral step sizes with the perturbation method.

Key words flexible multi-body dynamics, differential-algebraic equations, central difference method, subcycling algorithm, energy balance, stability analysis

Received 19 October 2006, revised 5 June 2008.

1) The project supported by the Pre-research Project from the 14th Academy of Electronic Science and Technology Corporation Group China.

2) E-mail: glchen@sjtu.edu.cn