

半空间饱和土内置点载荷作用下的热弹性波动¹⁾

郑荣跃^{*,**} 刘干斌^{*,2)} 栢 松^{*}

^{*}(宁波大学建筑工程与环境学院, 宁波 315211)

^{**}(国防科技大学航天与材料工程学院, 长沙 410073)

摘要 基于 Biot 波动理论及热弹性动力理论, 利用已建立的饱和多孔弹性介质热流固耦合控制方程, 研究半无限地基在内置点热力源作用下的动力响应问题. 求解过程引用 Hankel 变换技术, 得到了热力源作用下土体中温度增量、应力、位移和孔隙水压力的积分形式解答. 利用 Hankel 数值逆变换得到计算结果, 分析了热流固耦合条件下激振频率对竖向位移和孔隙水压力响应的影响. 对热流固耦合、热弹性和多孔弹性模型计算结果进行了比较.

关键词 半空间饱和土, 多孔弹性, 热流固耦合, 动力响应, Hankel 变换

中图分类号: TU471.3 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2008)03-0413-08

引 言

弹性及饱和多孔弹性介质在外载荷作用下的动力响应问题是土动力学领域的一个重要课题, Biot 早在 20 世纪 60 年代就提出了热弹性波动理论以及多孔弹性介质中波的传播理论^[1,2]. 此后许多学者发展和完善了 Biot 理论, Zienkiewicz^[3], 陈胜立^[4,5], 王建华等^[6] 基于 Biot 波动理论研究了饱和多孔弹性半空间内置点载荷的动力响应问题.

近年来, 众多学者又开始关注温度效应对岩土体物理力学特性的影响. 白冰等^[7] 分析了温度效应对黏性土介质力学特性的影响. Campanella^[8] 利用各向等压压力室进行了类似的试验, 对土体组成成分的热膨胀问题进行了详细的研究. 理论上, 热弹性介质的波动理论研究已取得了较多成果, Lord 和 Shulman^[9] 1967 年引入修正的 Fourier 热传导定律替代传统的 Fourier 定律, 建立了热弹性耦合波动理论, 并消除了 Biot 热弹性波动理论及非耦合理论仅能分析无限大速热波传播的缺陷. 此后, Green 和 Lindsay^[10] 利用两个松弛时间参数建立了另一个热弹性耦合波动理论. 基于这两个热弹性耦合波动理论, Sherief 等人^[11] 分析了无限弹体中球形孔洞表面作用有突变温度的热弹性动力响应问题. Kundu 等^[12] 研究无限介质中球形孔洞表面受热力源条件

下的热黏弹性动力响应. Lykotrafitis 等^[13] 研究了内置点源作用下的三维热弹性波动问题. Rakshit 和 Mukhopadhyay^[14] 利用 L-F 变换技术, 研究了瞬时点热源作用下的二维热黏弹性动力响应问题. 此外, Verma^[15], Sharma 等^[16], Singh^[17] 研究了热弹性介质中波的传播问题.

对于饱和多孔介质, 考虑热流固耦合作用来研究显然更为合理. Booker 和 Savvidou^[18,19], Berchenko^[20] 研究了非耦合条件下热固结问题. 在考虑热流固耦合条件下, Cheng 等^[21] 针对平面应变多孔热弹性问题发展了一种边界单元法并在 Laplace 变换域上进行数值求解. Smith 等^[22] 提出了一个在 Laplace 变换域上考虑热弹性固结问题的边界单元法, 对多孔热弹性材料在有热源存在条件下的平面应变问题进行了分析. Blond 等^[23] 从无量纲形式的控制方程出发, 给出了半无限饱和多孔介质在其自由表面作用循环温度载荷时的解析解. 白冰^[24] 利用热源函数基本方程发展一种瞬时线热源非稳态变化温度场、应力场和位移场的解析求解方法, 给出有初始温度场分布以及有分布内热源存在且热源强度随时间变化条件下的热固结问题计算方法. 对于热流固耦合波动问题, 目前只有少数研究成果涉及, 如 Singh 和 Tomar^[25] 研究了横波在两种不同多

2007-04-09 收到第 1 稿, 2008-02-19 收到修改稿.

1) 浙江省自然科学基金(Y107637), 宁波市自然科学基金(2007A610062) 资助项目.

2) E-mail: liugb76@163.com

孔弹性介质界面的反射和传播问题. 刘干斌等^[26]考虑热 - 水 - 力耦合效应, 研究了条形均布载荷作用下饱和多孔弹性地基的动力响应问题.

为了揭示热流固耦合效应对岩土动力问题的影响, 需对热流固耦合波动问题开展进一步研究. 为此, 本文直接利用文献 [26] 的热流固耦合波动方程来研究半无限饱和多孔弹性地基内置点热 / 力源作用下的动力响应问题. 利用 Hankel 积分变换理论得到了简谐载荷作用下地基的应力、位移和孔隙水压力积分形式的解答, 利用数值方法进行 Hankel 逆变换, 分析了热流固耦合条件下竖向位移和孔隙水压力响应的分布特征, 并与多孔弹性地基模型的计算结果进行了比较. 在不考虑热或流相的作用条件下, 本文解可以退化为内置点源的多孔弹性或热弹性解答.

1 热流固耦合波动模型

半空间饱和多孔弹性介质的热流固耦合模型如图 1 所示, 在初始时刻 ($t = 0$), 半空间弹性介质内的温度为 T_0 . 在半空间体内 ($z > 0$), 内置点热源作用在半空间内部 H 处 ($x = 0, y = 0, z = H$), 热 / 力源大小为 $q_0\delta(r)$ (热源为 $Q\delta(r)$). 由此可以将半空间地基模型分为上下两层, 上层的厚度为 H , 下层为一半无限空间体.

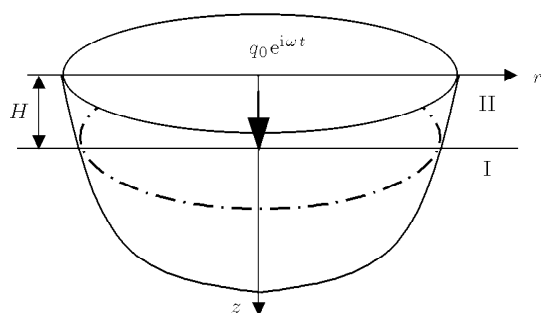


图 1 问题的模型

Fig.1 Model of the problem

考虑图 1 所示的半空间体系, 为了建立问题分析所需的边界条件, 可以将饱和半空间地基沿载荷作用平面割分成两个区域, 以区域 I 表示 $z > H$, 区域 II 表示 $0 < z < H$. 由波的辐射条件可知, 对应于区域 II 为有限域. 若假定地基表面透水, 则饱和地基半空间的位移与应力连续条件可建立为:

在地基的表面 ($z = 0$) 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^{\text{II}}(r, 0) &= 0, & \tau_{rz}^{\text{II}}(r, 0) &= 0 \\ p^{\text{II}}(r, 0) &= 0, & \frac{\partial \theta^{\text{II}}(r, 0)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

在 $z = H$ 处温度、应力、孔隙水压力和位移连续, 则可以建立其连续条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^{\text{I}}(r, H) - \sigma_z^{\text{II}}(r, H) &= q_0\delta(r) \\ \tau_{rz}^{\text{I}}(r, H) - \tau_{rz}^{\text{II}}(r, H) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r^{\text{I}}(r, H) - u_r^{\text{II}}(r, H) &= 0 \\ u_z^{\text{I}}(r, H) - u_z^{\text{II}}(r, H) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1c)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta^{\text{I}}(r, H) - \theta^{\text{II}}(r, H) &= Q\delta(r) \\ p^{\text{I}}(r, H) - p^{\text{II}}(r, H) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1d)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta^{\text{I}}}{\partial z}(r, H) - \frac{\partial \theta^{\text{II}}}{\partial z}(r, H) &= 0 \\ \frac{\partial p^{\text{I}}}{\partial z}(r, H) - \frac{\partial p^{\text{II}}}{\partial z}(r, H) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1e)$$

2 热流固耦合控制方程

在分析饱和多孔弹性介质的热流固耦合动力响应问题时, 需建立控制方程. 根据 Zienkiewicz 的研究, 对于一般土动力学问题, 在频率不高的条件下可忽略流相的惯性, 可由 Biot 波动方程得到多孔弹性介质的运动方程和应变关系

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

式中 b_i 和 u_i 分别表示 i ($i = x, y, z$) 方向的体力和位移, ρ 为土体密度.

假设土体为各向同性线弹性材料, 流相和固相处于热平衡, 变形为小变形. 采用有效应力 σ'_{ij} , 应变 ε_{ij} , 温度变化 θ 条件下, 饱和多孔弹性介质的本构关系可以表示为^[12]

$$\sigma'_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) - \lambda'\theta\delta_{ij} \quad (4)$$

式中 $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$, σ_{ij} 为总应力 (拉为正), δ_{ij} 为 Kronecker 符号, p 为超孔隙水压力, ν 为排水泊松比, $\theta = T - T_0$, T 为绝对温度, T_0 为初始温度 ($^{\circ}\text{C}$); λ' 为热模量, $\lambda' = (\lambda + 2G/3)a_c$, a_c 为土体的热膨胀系数 ($^{\circ}\text{C}^{-1}$); G 为多孔弹性介质的 Lamé 常数.

由方程 (2)~(4) 可以得到考虑热水力耦合条件下多孔弹性介质的控制方程如下

$$G\nabla^2 u_i + (\lambda + G)u_{j,ji} - p_{,i} - \lambda'\theta_{,i} = \rho\ddot{u}_i \quad (5)$$

若忽略热扩散效应, 孔隙水在土体中的流体平衡方程满足达西定律, 流体平衡方程和渗流连续方程可表示为

$$q_w = -\kappa(\nabla p + \rho_w \ddot{u}) \quad (6a)$$

$$\dot{e} = \dot{\zeta} + a_u \dot{\theta} \quad (6b)$$

式中 q_w 为渗流速度; $\kappa = k_l/\rho_w g$, k_l 为土体的渗透系数 (m/s); ρ_w 为流体密度 (kg/m³); e 为土体的应变, $e = \varepsilon_{kk}$; ζ 为流体相对于土体的应变, $a_u = na_w + (1-n)a_s$, n 为孔隙率, a_w 为孔隙水热膨胀系数.

由式 (6a) 和式 (6b) 可以得到

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\kappa}(\dot{e} - a_u \dot{\theta}) - \rho_w \ddot{e} \quad (7)$$

利用 Fourier 热传导定律, 热流平衡方程可以表示为

$$k\nabla^2 \theta = m\dot{\theta} + \lambda'T_0\dot{e} \quad (8)$$

式中 k 为热传导系数; $m = n\rho_w c_w + (1-n)\rho_s c_s$, c_w , c_s 分别为孔隙流体和土骨架的比热.

3 热流固耦合波动方程求解

考虑热流固耦合作用, 饱和多孔弹性介质动力响应的控制方程为式 (5), 式 (7) 和式 (8), 该组方程适用于任意坐标体系. 对于内置点载荷作用下的热弹性波动问题, 可将其视为轴对称问题, 则可在柱坐标系 (r, z) 中进行分析, 方程 (5) 可进一步表示为

$$G\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)u_r + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} - \lambda'\frac{\partial \theta}{\partial r} = \rho\ddot{u}_r \quad (9a)$$

$$G\nabla^2 u_z + (\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} - \lambda'\frac{\partial \theta}{\partial z} = \rho\ddot{u}_z \quad (9b)$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

对方程 (9) 进行 $\frac{\partial}{\partial r}(9a) + \frac{1}{r}(9a) + \frac{\partial}{\partial z}(9b)$ 运算得到

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 e - \nabla^2 p - \lambda'\nabla^2 \theta = \rho\ddot{e} \quad (10)$$

为了便于分析, 引入无量纲量对控制方程进行简化

$$z^* = V\eta z, \quad r^* = V\eta r, \quad u^* = V\eta u, \quad t^* = V^2\eta t$$

$$\eta = \frac{m}{k}, \quad \theta^* = \frac{\lambda'\theta}{\lambda + 2G}, \quad p^* = \frac{p}{\lambda + 2G}$$

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2G}, \quad V = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

利用上述无量纲因子, 控制方程 (7), (8) 和 (10) 可表示为无量纲形式 (为书写方便省去星号)

$$\nabla^2 e - \nabla^2 p - \nabla^2 \theta = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (11a)$$

$$\nabla^2 p = \phi_1 \frac{\partial e}{\partial t} + \phi_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \phi_3 \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (11b)$$

$$\nabla^2 \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \phi_0 \frac{\partial e}{\partial t} \quad (11c)$$

$$\sigma_{ij} = \phi_4 e \delta_{ij} + \phi_5 \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} p - \theta \delta_{ij} \quad (11d)$$

式中, $\phi_1 = \frac{\rho_w g}{k_l \eta} \frac{1}{(\lambda + 2G)}$, $\phi_2 = -\frac{\rho_w g}{k_l} \frac{a_u}{\lambda' \eta}$, $\phi_3 = \frac{\rho_w}{\rho}$, $\phi_0 = \frac{T_0 \lambda'^2}{m(\lambda + 2G)}$, $\phi_4 = \frac{\lambda}{\lambda + 2G}$, $\phi_5 = \frac{2G}{\lambda + 2G}$.

假设土体内部点载荷为简谐载荷, 控制方程中各变量可以表示为 $f(r, z, t) = \bar{f}(r, z)e^{i\omega t}$ 的形式, 则在频域中方程 (11) 可以表示如下形式

$$\nabla^2 \bar{e} - \nabla^2 \bar{p} - \nabla^2 \bar{\theta} + \omega^2 \bar{e} = 0 \quad (12a)$$

$$\nabla^2 \bar{p} + (\phi_3 \omega^2 - \phi_1 i\omega) \bar{e} - \phi_2 i\omega \bar{\theta} = 0 \quad (12b)$$

$$\nabla^2 \bar{\theta} = i\omega \bar{\theta} + \phi_0 i\omega \bar{e} \quad (12c)$$

对方程 (12) 进行处理得到

$$(\nabla^2 - k_1^2)(\nabla^2 - k_2^2)\bar{\theta} = 0 \quad (13a)$$

$$k_{1,2}^2 = \frac{\Theta_1 \pm \sqrt{\Theta_1^2 - 4\Theta_2}}{2} \quad (13b)$$

式中

$$\Theta_1 = i\omega - \phi_3 \omega^2 + \phi_1 i\omega + \phi_0 i\omega - \omega^2$$

$$\Theta_2 = \phi_2 \phi_0 \omega^2 - (\phi_3 \omega^2 - \phi_1 i\omega)i\omega - \omega^2 i\omega$$

为便于对方程进行求解, 考察方程 (12), (13a) 的形式, 可以引入 Hankel 积分变换. 对方程 (12b), (12c) 和式 (13a) 进行零阶 Hankel 变换, 可以得到

$$\bar{\theta}^0 = A_1 e^{-\beta_1 z} + A_2 e^{\beta_1 z} + A_3 e^{-\beta_2 z} + A_4 e^{\beta_2 z} \quad (14a)$$

$$\bar{e}^0 = \alpha_1 (A_1 e^{-\beta_1 z} + A_2 e^{\beta_1 z}) + \alpha_2 (A_3 e^{-\beta_2 z} + A_4 e^{\beta_2 z}) \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}^0 = & \alpha_3(A_1 e^{-\beta_1 z} + A_2 e^{\beta_1 z}) + \alpha_4(A_3 e^{-\beta_2 z} + A_4 e^{\beta_2 z}) + \\ & A_5 e^{-\xi z} + A_6 e^{\xi z} \end{aligned} \quad (14c)$$

式中 ξ 为变换参数,

$$\begin{aligned} \beta_1^2 = & \xi^2 + k_1^2, \quad \beta_2^2 = \xi^2 + k_2^2, \quad \text{Re}(\beta_{1,2}) > 0 \\ \alpha_1 = & \frac{\beta_1^2 - \xi^2 - i\omega}{\phi_0 i\omega}, \quad \alpha_3 = \frac{\phi_2 i\omega - (\phi_3 \omega^2 - \phi_1 i\omega)\alpha_1}{\beta_1^2 - \xi^2} \\ \alpha_2 = & \frac{\beta_2^2 - \xi^2 - i\omega}{\phi_0 i\omega}, \quad \alpha_4 = \frac{\phi_2 i\omega - (\phi_3 \omega^2 - \phi_1 i\omega)\alpha_2}{\beta_2^2 - \xi^2} \end{aligned}$$

对方程 (9b) 无量纲化并进行零阶 Hankel 变换, 利用算子法得到变换域中竖向位移 $\tilde{u}_z^0$ 的表达式

$$\begin{aligned} \tilde{u}_z^0 = & \chi_{11}(A_1 e^{-\beta_1 z} - A_2 e^{\beta_1 z}) + \chi_{12}(A_3 e^{-\beta_2 z} - A_4 e^{\beta_2 z}) + \\ & \chi_{13}(A_5 e^{-\xi z} - A_6 e^{\xi z}) + A_7 e^{-\zeta z} + A_8 e^{\zeta z} \end{aligned} \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} \chi_{11} = & \frac{(\lambda + G)\alpha_1 - (\lambda + 2G)(\alpha_3 + 1)}{G(\beta_1^2 - \zeta^2)}\beta_1 \\ \chi_{12} = & \frac{(\lambda + G)\alpha_2 - (\lambda + 2G)(\alpha_4 + 1)}{G(\beta_2^2 - \zeta^2)}\beta_2 \\ \chi_{13} = & -\frac{\lambda + 2G}{G(\xi^2 - \zeta^2)}\xi, \quad \zeta^2 = \xi^2 - \frac{\lambda + 2G}{G}\omega^2 \end{aligned}$$

在变换域中, 体应变 e 和竖向位移、径向位移的关系为 $\tilde{e}^0 = \xi \tilde{u}_r^1 + \frac{\partial \tilde{u}_z^0}{\partial z}$, 则由此式可以得到径向位移 $\tilde{u}_r^1$ 的表达式

$$\begin{aligned} \xi \tilde{u}_r^1 = & \chi_{21}(A_1 e^{-\beta_1 z} + A_2 e^{\beta_1 z}) + \\ & \chi_{22}(A_3 e^{-\beta_2 z} + A_4 e^{\beta_2 z}) + \chi_{23}(A_5 e^{-\xi z} + A_6 e^{\xi z}) + \\ & \zeta(A_7 e^{-\zeta z} - A_8 e^{\zeta z}) \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $\chi_{21} = \alpha_1 + \chi_{11}\beta_1$, $\chi_{22} = \alpha_2 + \chi_{12}\beta_2$, $\chi_{23} = \chi_{13}\xi$.

对方程 (4) 无量纲化, 并进行 Hankel 变换, 在频域中可以得到应力 $\tilde{\sigma}_z^0$ 和 $\tilde{\tau}_{xz}^1$ 的解答

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_z^0 = & \chi_{31}(A_1 e^{-\beta_1 z} + A_2 e^{\beta_1 z}) + \chi_{32}(A_3 e^{-\beta_2 z} + A_4 e^{\beta_2 z}) + \\ & \chi_{33}(A_5 e^{-\xi z} + A_6 e^{\xi z}) + \chi_{34}(A_7 e^{-\zeta z} - A_8 e^{\zeta z}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \xi \tilde{\tau}_{xz}^1 = & \chi_{41}(A_1 e^{-\beta_1 z} - A_2 e^{\beta_1 z}) + \\ & \chi_{42}(A_3 e^{-\beta_2 z} - A_4 e^{\beta_2 z}) + \chi_{43}(A_5 e^{-\xi z} - A_6 e^{\xi z}) + \\ & \chi_{44}(A_7 e^{-\zeta z} + A_8 e^{\zeta z}) \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} \chi_{31} = & \phi_4 \alpha_1 - \phi_5 \chi_{11} \beta_1 - 1 - \alpha_3, \quad \chi_{33} = -\phi_5 \chi_{13} \xi - 1 \\ \chi_{32} = & \phi_4 \alpha_2 - \phi_5 \chi_{12} \beta_2 - 1 - \alpha_4, \quad \chi_{34} = -\phi_5 \zeta \\ \chi_{41} = & -\frac{\phi_5}{2}(\xi^2 \chi_{11} + \chi_{21} \beta_1) \\ \chi_{42} = & -\frac{\phi_5}{2}(\xi^2 \chi_{12} + \chi_{22} \beta_2) \\ \chi_{43} = & -\frac{\phi_5}{2}(\xi^2 \chi_{13} + \xi \chi_{23}), \quad \chi_{44} = -\frac{\phi_5}{2}(\xi^2 + \zeta^2) \end{aligned}$$

对式 (1) 进行 Hankel 变换, 并将式 (14)~(18) 代入, 则线性方程组可以用矩阵表示

$$\mathbf{M} \times \mathbf{A} = \mathbf{F} \quad (19)$$

式中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1,11} & m_{1,12} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2,11} & m_{2,12} \\ m_{31} & m_{32} & \cdots & m_{3,11} & m_{3,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{12,1} & m_{12,2} & \cdots & m_{12,11} & m_{12,12} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}$ 中各元素略.

$$\mathbf{A} = [A_1^{\text{II}} \quad A_2^{\text{II}} \quad \cdots \quad A_8^{\text{II}} \quad A_1^{\text{I}} \quad A_3^{\text{I}} \quad A_5^{\text{I}} \quad A_7^{\text{I}}]^{\text{T}}$$

$$\mathbf{F} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \tilde{q}^0(\xi) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \tilde{\theta}^0(\xi) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\text{T}}$$

$$\tilde{\theta}^0(\xi) = \frac{Q}{2\pi}, \quad \tilde{q}^0(\xi) = \frac{q_0}{2\pi}$$

由式 (19) 可求得 12 个未知量, 对式 (14)~(18) 进行 Hankel 逆变换, 则可以得到应力、位移、孔隙水压力及温度增量的积分形式解答

$$\theta(r, z, t) = \int_0^\infty \xi \tilde{\theta}^0 J_0(\xi r) d\xi e^{i\omega t} \quad (20a)$$

$$u_z(r, z, t) = \int_0^\infty \xi \tilde{u}_z^0 J_0(\xi r) d\xi e^{i\omega t} \quad (20b)$$

$$p(r, z, t) = \int_0^\infty \xi \tilde{p}^0 J_0(\xi r) d\xi e^{i\omega t} \quad (20c)$$

$$\sigma_z(r, z, t) = \int_0^\infty \xi \tilde{\sigma}_z^0 J_0(\xi r) d\xi e^{i\omega t} \quad (20d)$$

在不考虑热或流相的作用条件下, 本文解可以退化为内置点源的多孔弹性或热弹性解答.

4 数值算例分析

半空间饱和和多孔弹性介质在内置点源作用下的热流固耦合动力响应的积分形式解答为式 (20). 由于积分解中被积函数含有 Bessel 函数, 且式 (20) 属于广义振荡型积分, 要直接对其进行求逆 Hankel 变换较为困难. 为此, 可以采用数值计算, 按被积函数的零点将积分区间分成各子区间, 通过加速积分技术来完成. 本文考虑一半空间饱和多孔弹性地基, 其物理力学参数如表 1 所示. 计算过程中, 定义位移、超孔隙流体压力和应力幅值为 $f = \sqrt{[\text{Re}(f)]^2 + [\text{Im}(f)]^2}$.

4.1 热流固、热弹性和多孔弹性模型结果比较

为了验证本文结果的正确性以及分析按热流固耦合、热弹性和饱和多孔弹性地基模型计算结果的差异, 可令 $\rho_w = 0$, $n = 0$, 即不考虑渗流作用, 则热流固耦合解 (THM) 可以退化为热弹性解 (TM), 计算参数中土体密度取 $1966 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 土体比热取 $2200 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, 其余参数同表 1. 若不考虑热传导作用, 可以得到多孔弹性解 (HM), 计算参数同表 1. 本节对竖向位移、孔隙水压力进行数值计算, 并与热弹性介质以及饱和多孔弹性介质在内置点源作用下的动力响应结果进行比较 (公式推导过程采用相同的无量纲处理方法, 结果从略), ξ 取 5%, 计算结果如图 2~ 图 4 所示.

图 2 为点载荷 (热源强度 $Q = 0$) 埋深分别为 $H = 1$ 和 2 时, 地表竖向位移沿径向变化曲线, 图中分别给出了按 THM, TM 和 HM 3 种模型的计算结果. 由图中可以看出: 按 3 种模型计算得到的竖向位移变化趋势相同. 在内置点载荷作用下 (热源 $Q = 0$), 采用热流固耦合模型 (THM) 和 HM 模型计算得到的竖向位移曲线重合, 结果相同. 在不考虑流相条件下, 热弹性模型计算结果较热流固耦合模型结果大. 图 3 为内置点热源作用下 (点载荷 $q_0 = 0$), 按 THM 和 TM 种模型计算得到的地表竖向位移沿径向变化曲线, 图中也反映了 TM 模型计算得到的竖向位移要大于 THM 模型的规律, 且随着点源埋深增大, 竖向位移衰减速率变缓. 与图 2 相比较可知: 点热源作用下无量纲竖向位移在数值上较点载荷结果小, 且沿径向衰减速度较点载荷情况快.

图 4 在点载荷作用下, 按 THM 和 HM 模型计算得到的孔隙水压力沿径向衰减结果, 考虑热流固耦合条件下孔隙水压力计算结果较多孔弹性情况小.

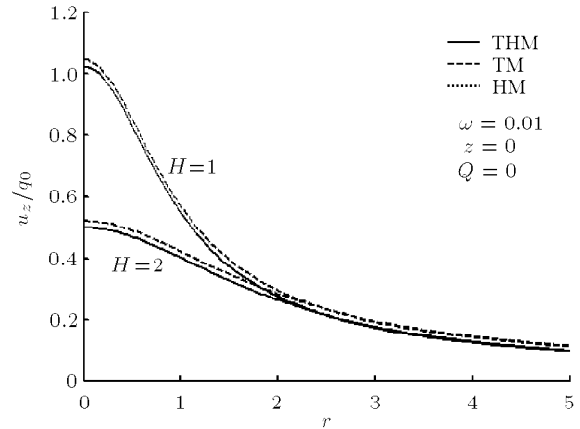


图 2 THM, TM 和 HM 地表竖向位移比较结果 (点载荷)

Fig.2 Curve of vertical displacement at the surface of the ground for model of THM, TM and HM

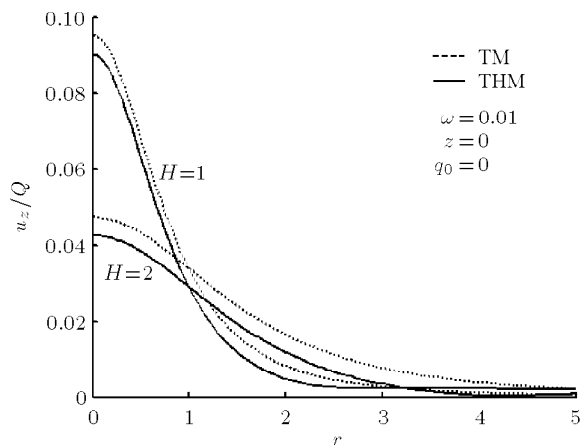


图 3 THM 和 TM 模型竖向位移比较结果 (点热源)

Fig.3 Curve of vertical displacement along the depth for model of THM and TM

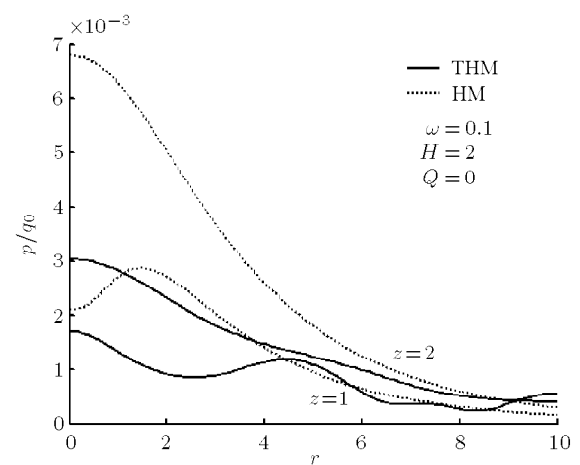


图 4 THM 和 HM 孔隙水压力沿径向变化结果 (点载荷)

Fig.4 Curve of pore pressure along the radius for model of THM and TM (point loading)

表 1 计算参数
Table 1 The computational parameters

Variable	Value	Variable	Value
lame constant G	1×10^6 Pa	expansion of soil a_c	$2.5 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
lame constant λ	4×10^6 Pa	expansion of soil grains a_s	$2.5 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
density of soil grains ρ_s	2610 kg/m^3	expansion of water a_w	$1.2 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
density of soil ρ	1966 kg/m^3	thermal conductivity k	$386 \text{ J/sm}^\circ\text{C}$
density of water ρ_w	1000 kg/m^3	specific heat of soil grain C_s	$1000 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
permeability k_l	$1.0 \times 10^{-8} \text{ m/s}$	specific heat of water C_w	$4000 \text{ m}^2\text{s}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
porosity n	0.4	initial temperature T_0	293 K

4.2 点热源作用下热流固耦合结果分析

由于现有研究对点热源（热冲击）作用下饱和多孔弹性介质（THM）的动力响应结果分析较少，本节仅就简谐热冲击频率对竖向位移和孔隙水压力的影响展开分析，限于篇幅其它各参数的影响就不再赘述。

图 5 为不同频率条件下地表竖向位移的变化曲线，热源的埋深为 $H = 1$ 。由图中可知：竖向位移随激振频率的增大而减小。在热流固耦合条件下，孔隙水压力随激振频率的增大而增大（图 6），且孔隙水

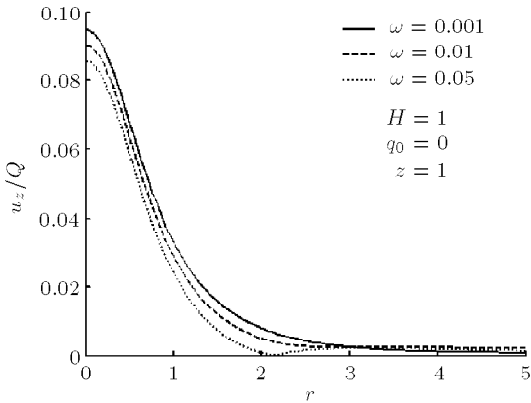


图 5 点热源作用下地表竖向位移沿径向变化曲线 (THM)
Fig.5 Distribution of vertical displacement at the surface of the ground acted by point heat shock (THM)

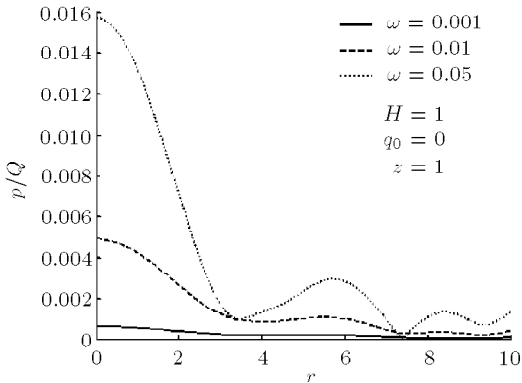


图 6 点热源作用下孔隙水压力沿径向变化曲线 (THM)
Fig.6 Distribution of pore pressure along the radius acted by point heat shock (THM)

压力曲线振荡现象更为显著，这和文献 [5] 的分析结果一致。与点载荷作用相比，孔隙水压力衰减更快。

5 结 语

本文从已建立的饱和多孔弹性介质热流固耦合控制方程出发，利用 Hankel 积分变换，推导了内置点热力源作用下饱和多孔弹性地基热流固耦合动力响应问题的积分形式解。利用 Hankel 逆变换，进行了数值分析，并与热弹性、多孔弹性模型计算结果进行了比较，得到以下结论：

- (1) 采用 THM, TM 和 HM 模型计算得到的内置点载荷作用下（热源 $Q = 0$ ）动力响应结果变化规律是一致的，从而验证了本文结果的正确性。
- (2) 在点热力源作用下，按热弹性模型（TM）计算得到的竖向位移响应结果比热流固耦合模型（THM）计算结果大，热流固耦合模型计算结果与多孔弹性模型（HM）基本相同。
- (3) 在点热源作用下，采用 THM 耦合模型计算得到无量纲竖向位移和孔隙水压力响应的衰减速度较点载荷快。
- (4) 热冲击的激振频率对竖向位移和孔隙水压力有较大影响，竖向位移响应随频率的增大而减小，孔隙水压力随频率的增大而增大，且波动性亦愈强。

参 考 文 献

1 Biot MA. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous medium. *Journal of Applied Physics*, 1962, 33(4): 1482~1498
2 Biot MA. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous medium. *Journal of Applied Physics*, 1962, 33(4): 1482~1498
3 Zienkiewicz OC, et al. Drained, undrained consolidating and dynamic behavior assumptions in soil. *Geotechnique*, 1980, 30(4): 385~395
4 陈胜立, 陈龙珠. 饱和地基上含刚核地弹性圆板的竖向振动. *力学学报*, 2002, 34(1): 77~86 (Chen Shengli, Chen Longzhu.

- Vertical vibrations of flexible plate with rigid core on saturated ground. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34(1): 77~86(in Chinese))
- 5 陈胜立, 张建民等. 饱和土埋置力源的三维动力 Lamb 问题解答. 固体力学学报, 2004, 25(2): 149~155 (Chen Shengli, Zhang Jianmin, et al. Three-dimensional Lamb's problem of saturated soils subjected to internal excitation. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2004, 25(2): 149~155 (in Chinese))
- 6 王建华, 陆建飞, 沈为平. 半空间饱和土在内部简谐垂直力作用下的 Green 函数. 水利学报, 2001, 3: 54~57 (Wang Jianhua, Lu Jianfei, Shen Weiping. The Green function of harmonic vertical load applied on the interior of the half space saturated soil. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2001, 3: 54~57 (in Chinese))
- 7 白冰, 赵成刚. 温度对黏性土介质力学特性的影响. 岩土力学, 2003, 23(4): 533~537 (Bai Bing; Zhao Chenggang. Temperature effects on mechanical characteristics of clay soils. *Rock and Soil Mechanics*, 2003, 23(4): 533~537 (in Chinese))
- 8 Campanella RG, Mitchell JK. Influence of temperature variation on soil behavior. *J Soil Mech and Found Engrg D v, ASCE*, 1968, 94(3): 709~734
- 9 Lord H, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J Mech Phys Solid*, 1967, 15: 299~309
- 10 Green AE, Lindsay K. Thermoelasticity. *J Elast*, 1972, 2: 1~7
- 11 Hany HS, Heba AS. A problem for an infinite thermoelastic body with a spherical cavity. *Int J Engng Sci*, 1998, 36(4): 473~487
- 12 Rakshit KM, Mukhopadyay B. A thermovisco-elastic problem of an infinite medium with a spherical cavity using generalized theory of thermoelasticity. *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, 41: 25~32
- 13 Lykotrafitis G, Georgiadis HG, Brock LM. Three-dimensional thermoelastic wave motions in a half-space under the action of a buried source. *Int J Solids Structures*, 2001, 38: 4857~4878
- 14 Rakshit M, Mukhopadhyay B. A two dimensional thermoviscoelastic problem due to instantaneous point heat source. *Mathematical and Computer Modelling*, 2007, 46: 1388~1397
- 15 Verma KL. On the propagation of waves in layered anisotropic media in generalized thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*, 2002, 40: 2077~2096
- 16 Sharma JN, Vijayata P, Gupta SK. Thermoelastic Lamb waves in a transversely isotropic plate bordered with layers of inviscid liquid. *International Journal of Engineering Science*, 2003, 41: 1219~1237
- 17 Baljeet Singh. Reflection of SV waves from the free surface of an elastic solid in generalized thermoelastic diffusion. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 1~14
- 18 Booker JR, Savvidou C. Consolidation around a spherical heat source. *International Journal of Solids Structure*, 1984, 20(5): 1079~1090
- 19 Savvidou C, Booker JR. Consolidation around a heat source buried deep in a porous thermoelastic medium with anisotropic flow properties. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1989, 13: 75~90
- 20 Berchenko I, Detournay E, Chandler N, et al. An in-situ thermo-hydraulic experiment in a saturated granite I: design and results. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2004, 41: 1377~1394
- 21 Cheng AHD, Detournay E. A direct boundary element method for plane strain poroelasticity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1988, 12(9): 551~522
- 22 Smith DW, Booker JR. Boundary element analysis of linear thermoelastic consolidation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1996, 20(4): 457~488
- 23 Blond E, Schmitt N, Hild F. Response of saturated porous media to cyclic thermal loading. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003, 27(11): 883~904
- 24 白冰. 岩土介质非稳态热固耦合问题的热源函数法. 力学学报, 2004, 36(4): 427~434 (Bai Bing. Heat source function method for coupling analysis of thermal consolidation in saturated soil. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(4): 427~434 (in Chinese))
- 25 Jaswant S, Tomar SK. Reflection and transmission of transverse waves at a plane interface between two different porous elastic solid half-spaces. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 176: 364~378
- 26 刘干斌, 姚海林等. 考虑热 - 水 - 力耦合效应多孔弹性地基的动力响应. 岩土力学, 2007, 28(9): 1784~1790 (Liu Ganbin, Yao Hailin, et al. Coupling thermo-hydro-mechanical dynamic response of a porous elastic medium. *Rock and Soil Mechanics*, 2007, 28(9): 1784~1790 (in Chinese))

COUPLING THERMO-HYDRO-MECHANICAL DYNAMIC RESPONSE OF SATURATED SOIL SUBJECTED TO INTERNAL EXCITATION¹⁾

Zheng Rongyue^{*,**} Liu Ganbin^{*,2)} Wu Song^{*}

^{*}(College of Civil, Construction and Environmental Engineering, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

^{**}(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract Dynamic response of saturated half-space foundation subject to an internal heat/mechanical excitation is investigated theoretically with Biot's wave theory and thermodynamic theory. The foundation is idealized to be uniform and poroelastic. The governing equations of the thermo-hydro-mechanical coupling are presented. The analytical solutions of temperature increment, stress, displacement and pore pressure are derived with the forward and the inverse Hankel transform. Numerical results are obtained to analyze the effect of the internal excitation frequency on the vertical displacement and the pore pressure. In addition, the cases of thermo-elastic and porous elastic models are compared in the numerical results.

Key words a half space saturated soil, porous medium, coupling thermo-hydro-mechanical, dynamic response, Hankel transform

Received 9 April 2007, revised 19 February 2008.

1) The project supported by Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (Y107637) and Ningbo City Natural Science Foundation of China (2007A610062).

2) E-mail: liugb@163.com