

基于微分包含的绳系卫星时间最优释放控制¹⁾

文 浩 金栋平 胡海岩²⁾

(南京航空航天大学振动工程研究所, 飞行器结构力学与控制教育部重点实验室, 南京 210016)

摘要 考虑系绳弹性的影响, 建立了绳系卫星系统三维动力学模型, 研究了在状态和控制约束下的绳系卫星非线性时间最优控制问题. 为缩减系统变量, 控制律设计没有采用通常的状态空间模型, 而是基于二阶微分包含, 将连续时间最优控制问题离散为大规模动态规划问题, 最后通过数值模拟验证了该方法的有效性.

关键词 绳系卫星, 时间最优控制, 弹性系绳, 微分包含, 动态规划

中图分类号: V448.21 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2008)01-0135-06

引 言

绳系卫星系统是用细长的系绳将两个或多个人造卫星连在一起飞行的组合体, 可用于微重力场产生、高空大气层探测、航天器轨道转移、星际运输和深空探测等诸多重要场合. 近 30 年来因其独特优势而得到广泛关注, 业已成为具有广泛应用前景的新兴空间技术^[1]. 绳系卫星系统呈无限自由度和高度非线性特征, 通过系绳进行卫星释放会发生复杂的非线性动力学行为^[2~4]. 在轨实验飞行表明, 绳系卫星系统的动力学分析和释放控制具有相当大的挑战性和难度^[1].

卫星释放过程是绳系卫星系统应用的关键环节, 具有非常严格的技术要求. 为了优化释放过程以提高控制效率, 人们首选最优控制技术. 经典的最优控制方法难以处理具有高度非线性以及复杂状态、控制约束的问题. 因此, 近年来人们对最优释放轨道的求解方法进行了深入研究, 发表了一些具有代表性的文章^[5~9]. Zimmerman 等^[5]应用多重打靶法分析了绳系货舱从空间站返回的最优控制问题. 基于文献^[5]相似的最优控制律设计, Steindl 和 Troger^[6]研究了两自由度绳系卫星的释放问题, Jin 和 Hu^[7]研究了三自由度绳系卫星系统的最优控制, 并基于 Chebyshev 级数展开和伪线性化方法设计了最优控制器.

在设计控制律时, 上述工作均使用刚性系绳模型. 为了提高控制精度, 近年来已有少量文献采用弹

性系绳模型来设计最优控制器, 但其研究都局限于二维轨道面内的情况. 例如, Williams 和 Trivailo^[8]对比分析了不同性能指标对卫星控制的影响, 并研究了利用弹性系绳在轨道面内进行交会、捕捉的控制问题^[9].

本文研究绳系卫星系统的面内及面外运动, 建立了其三维非线性动力学模型. 为了提高计算效率, 控制律设计没有采用通常的状态空间模型, 而是在引入二阶微分包含的基础上, 研究了具有复杂约束的卫星释放过程的非线性时间最优控制问题. 采用 C++ 语言开发了一套通用的最优控制程序包, 通过数值模拟对所述方法进行了验证. 本文对文献^[7]的工作做了以下扩展: 一是考虑了弹性系绳模型; 二是将释放时间作为待优化的参数; 三是引入 Legendre 伪谱算法将连续时间最优控制问题离散为大规模优化问题, 利用非线性规划方法进行求解, 再通过插值得到连续时间控制律^[10,11].

1 系统模型

考虑由主星(飞船)、卫星及连接两者的弹性系绳组成绳系卫星系统, 如图 1 所示. 建模时视飞船和卫星为质点, 忽略系绳质量, 在释放过程中系绳保持直线. 系绳长度为 l , 径向刚度为 EA , 应变 ε 沿绳长均匀分布. 本文考虑主星质量 M 远大于子星质量 m 的情况, 因而可忽略卫星对主星运动的影响^[7].

设主星在赤道面内半径为 r_0 的圆轨道上运行,

2007-01-29 收到第 1 稿, 2007-10-12 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(10372039, 10672073)和南京航空航天大学博士生创新计划基金(4003-019016)资助项目.

2) E-mail: hhyae@nuaa.edu.cn

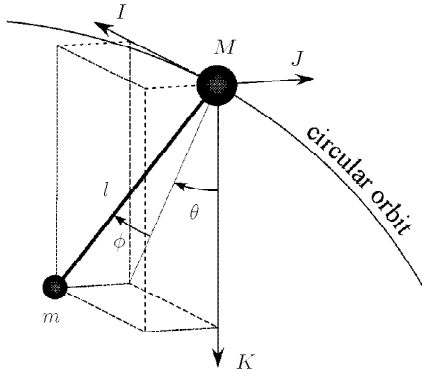


图 1 绳系卫星系统简图

Fig.1 The schematic view of a tethered subsatellite system

角速度恒为 $\Omega = \sqrt{\mu/r_0^3}$, 其中 $\mu = 3.986\,005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ 为地球引力常数. I 和 K 坐标轴分别指向飞船飞行方向和地心, J 轴垂直于轨道面, θ 和 ϕ 表示系绳的面内俯仰运动及面外的滚转运动.

根据文献 [12] 的方法获得系统的动能和势能, 定义广义坐标向量 $\mathbf{q} = \{\theta, \phi, \xi, \varepsilon\}^T \in \mathbf{R}^{n_q}$, 并利用 Lagrange 方程获得在无量纲时间 t 下的系统模型

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (1+\varepsilon)\xi((\dot{\theta}-1)^2 \cos^2 \phi + \dot{\phi}^2 + \\ &\quad 3 \cos^2 \theta \cos^2 \phi - 1) - (1+\varepsilon)\ddot{\xi} - \\ &\quad 2\dot{\xi}\dot{\varepsilon} - \xi\ddot{\varepsilon} \\ 0 &= (1+\varepsilon)\xi\ddot{\theta} + 2(\dot{\theta}-1)(\xi\dot{\varepsilon} + (1+\varepsilon) \cdot \\ &\quad (\dot{\xi} - \xi\dot{\phi} \tan \phi)) + 3(1+\varepsilon)\xi \sin \theta \cos \theta \\ u_2 &= (1+\varepsilon)\xi\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}(\xi\dot{\varepsilon} + (1+\varepsilon)\dot{\xi}) + \\ &\quad (1+\varepsilon)\xi(3 \cos^2 \theta + (\dot{\theta}-1)^2) \sin \phi \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这里无量纲时间 t 为实际时间乘以轨道角速度 Ω . $\xi = \tilde{l}/l_c$ 为无量纲的未变形绳长, $\tilde{l} = l/(1+\varepsilon)$ 为到当前为止已被放出的系绳的原长, l_c 为给定参考值 (取释放终止时的 $\tilde{l}$ 值). 式中 $u_1 = T/(m\Omega^2 l_c)$ 和 $u_2 = F/(m\Omega^2 l_c)$ 表示无量纲控制力, $T = EA\varepsilon$ 和 F 分别为系绳张力和卫星上推进器提供的面外喷气力.

引入状态向量 $\mathbf{x} = \{\theta, \phi, \xi, \varepsilon, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\xi}, \dot{\varepsilon}\}^T \in \mathbf{R}^{n_x}$ 及控制向量 $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}^T \in \mathbf{R}^{n_u}$, 可将式 (1) 转化为状态空间形式. 但这样需在式 (1) 中添加形如 $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_q$ 的额外约束, 并使系统变量数由 $n_q + n_u$ 增加到 $n_x + n_u$, 导致数值计算过于复杂. 因此, 本文没有采用状态方程来描述系统运动, 而是考虑形如 $\mathbf{u}^L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^U$ 的控制约束, 将式 (1) 进一步改写为

二阶微分包含形式^[10]

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (1+\varepsilon)\xi((\dot{\theta}-1)^2 \cos^2 \phi + \dot{\phi}^2 + \\ &\quad 3 \cos^2 \theta \cos^2 \phi - 1) - (1+\varepsilon)\ddot{\xi} - \\ &\quad 2\dot{\xi}\dot{\varepsilon} - \xi\ddot{\varepsilon} - EA\varepsilon/m\Omega^2 l_c \\ 0 &= (1+\varepsilon)\xi\ddot{\theta} + 2(\dot{\theta}-1)(\xi\dot{\varepsilon} + (1+\varepsilon) \cdot \\ &\quad (\dot{\xi} - \xi\dot{\phi} \tan \phi)) + 3(1+\varepsilon)\xi \sin \theta \cos \theta \\ u_2^L &\leq (1+\varepsilon)\xi(3 \cos^2 \theta + (\dot{\theta}-1)^2) \sin \phi \cos \phi + \\ &\quad (1+\varepsilon)\xi\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}(\xi\dot{\varepsilon} + (1+\varepsilon)\dot{\xi}) \leq u_2^U \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

可见, 式 (2) 中不再显含控制变量 u_1 和 u_2 , 此时系统的变量数目缩减为 n_q . 喷气力约束 $u_2^L \leq u_2 \leq u_2^U$ 已包含在式 (2) 中, 而系绳张力约束 $u_1^L \leq u_1 \leq u_1^U$ 转为应变上、下界形式, 即 $\varepsilon^S = m\Omega^2 l_c u_1^S / EA$ ($s = L, U$), 此处上标 “U” 和 “L” 分别表示相应变量的上下界.

2 最优控制问题

2.1 问题表述

针对绳系卫星系统的特征, 本文采用了一种混合控制策略, 在卫星推进器 (指向面外) 的辅助下, 通过调节系绳张力来实现最优的释放控制, 在最短的时间内将卫星释放到较远的指定位置.

取 Mayer 形式的目标函数 J 为

$$J = \Psi(\mathbf{A}(t_f), t_f) \quad (3)$$

式中 t_f 为释放时间, $\mathbf{A} = \{\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}}; \ddot{\mathbf{q}}\} \in \mathbf{R}^{n_A}$, $n_A = 3n_q$, “;” 表示垂直聚合向量. 借助二阶微分包含概念, 将此问题表述为更一般的形式, 即寻找连续向量函数 $[0, t_f] \ni t \mapsto \{\mathbf{q} \in \mathbf{R}^{n_q}\}$ 和时间 t_f , 使得目标函数 J 最小, 并满足端点约束

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}(0), \mathbf{A}(t_f), t_f) = \mathbf{0} \quad (4)$$

和 Box 约束

$$\mathbf{A}^L \leq \mathbf{A}(t) \leq \mathbf{A}^U \quad (5)$$

及一般形式的路径约束

$$\mathbf{h}^L \leq \mathbf{h}(\mathbf{A}(t)) \leq \mathbf{h}^U \quad (6)$$

这里常值向量 $\mathbf{A}^s, \mathbf{h}^s$ ($s = L, U$) 的维数分别为 n_A 和 n_h , 函数 $\Psi: \mathbf{R}^{n_A} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, $\mathbf{G}: \mathbf{R}^{n_A} \times \mathbf{R}^{n_A} \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}^{n_G}$ 和 $\mathbf{h}: \mathbf{R}^{n_A} \mapsto \mathbf{R}^{n_h}$ 均相对其参数连续可微. 就时间最优释放控制而言, 方程 (4) 和 (5) 分别对应于释放始末条件和简单状态 (及其导数) 约束, 而式 (6) 则包含了微分约束 (2), 目标函数取为 $\Psi = t_f$.

2.2 问题转化及求解

近年来在非线性最优控制的高速数值解法中, 有一类方法称为“间接”求解法, 如间接多重打靶法^[6]. “间接”求解法的不足之处在于, 须利用 Pontryagin 极小值原理推导协态方程, 并在求解时提供协态变量的初始猜测. 由于协态变量一般不具有明显的物理意义, 因此其初始估计非常困难. 另一类称为“直接”转换法, 即将最优控制问题离散为大规模参数优化问题, 利用非线性规划方法进行求解. “直接”转换法没有协态变量估计的问题, 而且一般具有较大的收敛域.

本文基于具有较高收敛率的 Legendre 伪谱算法^[10,11], 在 Legendre-Gauss-Lobatto(LGL) 积分点处, 取向量函数 $\mathbf{q}$ 分量的多项式近似, 利用微分矩阵求得其导数在 LGL 点处的近似值, 并对系统代数或微分约束作相应的离散处理, 主要过程如下.

引入新的时间 τ 及因子 $\alpha = 2/t_f$, 将时间区间 $[0, t_f]$ 变换为 $[-1, 1]$, 即 $t = (\tau + 1)/\alpha$. 令 $L_N(\tau)$ 为定义在 $[-1, 1]$ 上的 N 阶 Legendre 多项式. LGL 点 τ_n 在 $1 \leq n \leq N-1$ 时为 $L'_N(\tau)$ 的零点, 而端点 $\tau_0 = -1, \tau_N = 1$, 其中撇号表示相对于 τ 的导数. 取向量函数 $\mathbf{q}(\tau)$ 分量的多项式近似为

$$q_i(\tau) \approx q_i^N(\tau) = \sum_{j=0}^N q_i(\tau_j) \varphi_j(\tau), \quad i = 1, 2, \dots, n_q \quad (7)$$

式中基函数

$$\varphi_j(\tau) = \frac{1}{N(N+1)L_N(\tau_j)} \frac{(\tau^2 - 1)L'_N(\tau)}{\tau - \tau_j} \quad (8)$$

为 N 阶 Lagrange 插值多项式, $q_i(\tau)$ 是 $\mathbf{q}(\tau)$ 的第 i 个分量. $\mathbf{q}(\tau)$ 的第 k 阶导数在 τ_i 处近似值为

$$\left. \frac{d^k \mathbf{q}(\tau)}{d\tau^k} \right|_{\tau=\tau_i} \approx \sum_{j=0}^N D_{ij}^k \mathbf{q}(\tau_j) \quad (9)$$

式中 D_{ij}^k 为 $(N+1) \times (N+1)$ 维的第 k 阶微分矩阵 $\mathbf{D}^k$ 中的相应元素. 第一阶微分矩阵元素为 $D_{ij}^1 = \varphi'_j(\tau_i)$, 而 $\mathbf{D}^k$ 可通过矩阵幂运算获得, 即 $\mathbf{D}^k = (\mathbf{D}^1)^k$. 在此基础上, 将端点约束 (4) 改写为

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}(\tau_0), \mathbf{A}(\tau_N), t_f) = 0 \quad (10)$$

并将 Box 约束 (5) 和一般路径约束 (6) 沿 LGL 点进行离散, 即在 τ_k ($k = 0, 1, \dots, N$) 处满足

$$\mathbf{A}^L \leq \mathbf{A}(\tau_k) \leq \mathbf{A}^U, \quad \mathbf{h}^L \leq \mathbf{h}(\mathbf{A}(\tau_k)) \leq \mathbf{h}^U \quad (11)$$

而 $\mathbf{A}(\tau)$ 在 LGL 点处的近似值由下式给出

$$\bar{\mathbf{A}} = (\bar{\mathbf{q}}; \alpha \mathbf{D}^1 \bar{\mathbf{q}}; \alpha^2 \mathbf{D}^2 \bar{\mathbf{q}}) \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \{\mathbf{A}(\tau_0); \mathbf{A}(\tau_1); \dots; \mathbf{A}(\tau_N)\}^T \\ \bar{\mathbf{q}} &= \{\mathbf{q}(\tau_0); \mathbf{q}(\tau_1); \dots; \mathbf{q}(\tau_N)\}^T \end{aligned}$$

“*”表示矩阵相乘.

将式 (12) 代入式 (10) 和 (11), 可将式 (3)~(6) 所描述的最优控制问题转化为标准的非线性规划问题: 目标函数 $J = t_f$, 参数约束为式 (10), (11), $(N+1)n_q + 1$ 个优化参数为 $q_i(\tau_k)$ ($i = 1, \dots, n_q; k = 0, 1, \dots, N$) 和 t_f . 若使用普通的状态空间模型, 优化参数将达到 $(N+1)(n_x + n_u) + 1$ 个, 增加了计算的复杂性.

本文采用 C++ 语言, 通过面向对象编程实现了所述的理论方法, 并将其集成为一套通用最优控制程序包. 为了减少计算量, 程序包中加入了符号数学预处理器, 为求解器提供解析的 Jacobian 和 Hessian 矩阵. 此外, 程序充分利用了 Jacobian 和 Hessian 矩阵的稀疏结构, 大大提高了内存利用率和计算效率. 计算中选了一个名为 IPOPT 的非线性规划求解器, 其实现基于内点方法, 并已成功应用于许多领域^[13].

3 算例研究

本节通过 3 个算例来检验所述方法的计算精度. 仿真中取主星轨道高度 $r_0 = 6771$ km, 角速度约为 1.133×10^{-3} rad/s; 卫星质量为 100 kg, 主星飞船的质量为 1×10^5 kg, 系绳径向刚度 $EA = 1 \times 10^5$ N, 参考绳长 $l_c = 10$ km.

假设系绳释放机构基于一种简单的“刹”式设计, 因此计算时 $\dot{\xi}$ 的约束为 $\dot{\xi} > 0$. 此外, 为节约推进剂的使用, 需要严格限制喷气力的量值, 而无量纲张力的下限 u_1^L 也要稍大于零, 以防止系绳松弛, 出于安全考虑上限 u_1^U 不能太高. 综合考虑以上因素, 选取控制约束为 $u_1 \in [0.05, 6]$ 和 $u_2 \in [-0.01, 0.01]$.

与基于刚性系绳模型的设计不同, 本文还引入了张力加速度 (应变加速度) 约束, 令 $\ddot{u}_1 \in [-2.5, 2.5]$ (对应 $\ddot{\varepsilon} \in [-2.5, 2.5] \times m\Omega^2 l_c / EA$). 这样不但可以使张力的变化过程比较光滑, 从而抑制系绳的弹性振动,

还可以提高 Legendre 伪谱算法的精度. 以上约束均以无量纲形式给出, 并由预处理器在计算前自动转化为式 (5) 的形式.

释放边界条件由 $\mathbf{A}(t)$ 的 8 个分量给出, 并在边界点 $t = 0$ 和 $t = t_f$ 处将其限制为固定值 $\boldsymbol{\theta}_S = \{\theta_S, \phi_S, \xi_S, \dot{\theta}_S, \dot{\phi}_S, \dot{\xi}_S, \ddot{\xi}_S, \ddot{\varepsilon}_S\}$ ($S = 0, f$), 其中下标“0”和“f”分别对应于释放开始和结束时刻.

例 1: 设释放初值 $\boldsymbol{\theta}_0 = \{0, 0, 0.05, 0, 0, 0, 0, 0\}$, 并将喷气力大小设置为零, 此时卫星不发生面外运动. 例 2 和例 3: 计及初始位移扰动, 初值分别取为 $\boldsymbol{\theta}_0 = \{0.2, 0.1, 0.05, 0, 0, 0, 0, 0\}$ 和 $\boldsymbol{\theta}_0 = \{0.2, 0.2, 0.05, 0, 0, 0, 0, 0\}$.

在 3 个算例中, 释放终值均设为 $\boldsymbol{\theta}_f = \{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$. 值得注意的是, 在边界约束中虽然不显含应变 ε , 但可将 $\boldsymbol{\theta}_S$ 代入式 (2) 中确定其始末值.

对于所有算例, 无量纲张力 u_1 在 LGL 点处的初始值均取为 0.14, 而无量纲喷气力 u_2 初值猜测设为常量 0. 在此基础上, 通过立方插值给出连续时间控制律的初始猜测, 再将其代入系统方程, 通过数值积分确定状态初始值 (其中包含广义坐标初始值). 通过非线性优化, 可得广义坐标的最优解, 进而确定状态、控制的最优时间历程. 3 个算例均采用 40 个 LGL 点进行离散, 在 1.73 GHz 的便携式计算机上的计算耗时都小于 20s. 求解结束后, 通过以下方法对最优控制解的精度进行了验证. 由离散控制量的立方插值得到连续时间控制律, 再代入系统方程进行积分, 并将所得响应与通过非线性规划方法得到的直接解进行比较. 结果表明, 二者几乎完全相同, 以至于在图中无法区分. 简便起见, 以下仅就直接解进行说明.

针对本文的时间最优控制问题, 图 2 和图 3 分别给出了各算例求得的无量纲最优控制和状态相对于 t 的时间历程. 从图 2 可见, 由于施加应变加速度约束, 3 个算例中张力变化都非常平缓, 曲线形状极为相似 (例 2 和例 3 曲线几乎完全重合), 均是在释放前阶段取较小值, 然后逐渐增加, 在释放结束前小幅下降后达到相同值. 另一方面, 除例 1 没有使用推进器以外, 例 2 和例 3 中喷气力都随时间快速变化, 而且时间响应历程差别比较明显. 这种快变导致由插值得到的喷气力时间历程, 在某些地方会略微越过边界约束 $u_2 \in [-0.01, 0.01]$. 而前面在设置 u_2 的上下界时已留有很大余量, 所以这种现象

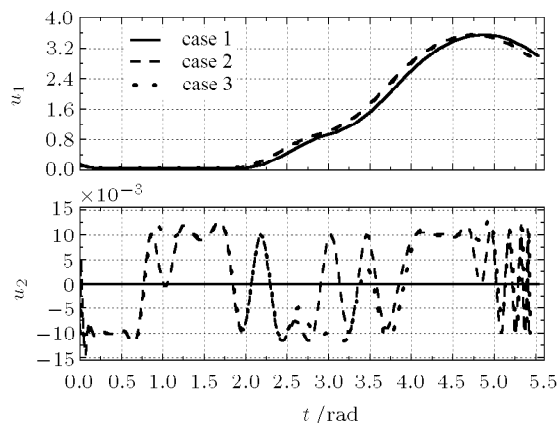


图 2 无量纲张力、喷气力最优时间历程

Fig.2 The optimal profiles for dimensionless tension u_1 and thrust u_2

并不影响实际应用, 当然也可以通过增加 LGL 点数, 或是预先适当缩小约束上下界区间将其消除.

图 3 给出了各算例在相应最优控制力作用下得到的状态时间历程的对比, 其第 1 到第 4 行分别对应于系统的俯仰、滚转、(未变形) 绳长和应变响应. 由图 3 可见, 在图 2 所示最优控制力的作用下, 不但将卫星准确释放到了指定终点, 而且取得了非常平滑的状态响应曲线, 这说明高频弹性振动得到了有效抑制. 从图 3(c), 3(d) 可见, 在没有面外喷气力作用的情况下, 由例 1 初始条件释放的卫星并不会产生滚转运动. 而其它两例虽是从不同的初始滚转角开始释放, 但二者曲线在释放后期逐渐接近直至完全重合. 图 3(a), 3(b) 给出的俯仰运动时间历程亦有相似之处. 例如, 例 1 曲线仅在开始阶段时与其他两例差别较大, 三者在后后期也逐渐接近直至达到同一终值. 此外, 由图 3(e)~3(h) 所示, 所有算例中系统绳长和应变响应曲线形状均非常相似, 其中例 2 和例 3 的响应曲线几乎完全重合, 这与图 2 中无量纲张力时间历程的情况类似.

3 个算例中目标函数的最小值, 即无量纲释放时间 t_f 的最优值, 分别约为 5.53, 5.42 和 5.43. 因此, 并非是初始角度越小, 释放时间就越短. 为了进一步研究 t_f 最优值随初始角度的变化, 将初始条件 $\boldsymbol{\theta}_0$ 中关于 θ 和 ϕ 的硬约束 $\theta(0) = \theta_0$ 和 $\phi(0) = \phi_0$ 调整为软约束 $\theta(0) \in [0, 0.5]$ 及 $\phi(0) \in [0, 0.5]$, 再进行优化求解. 结果表明, 对于上述给定的初始角度范围, 当 $\theta(0) \approx 0.4452$ 和 $\phi(0) \approx 0.0082$ 时, 获得的最优释放时间达到最小值 $t_f \approx 5.37$.

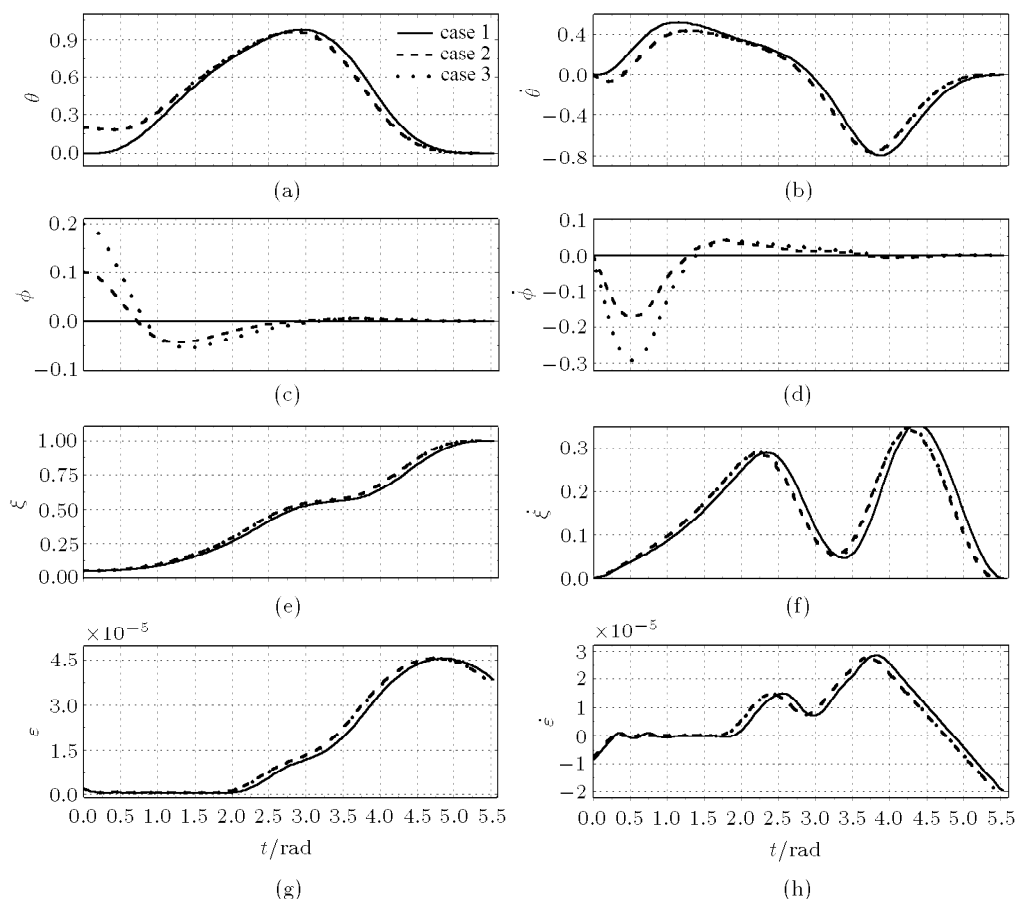


图 3 无量纲状态变量最优时间历程

Fig.3 The optimal profiles for dimensionless state variables

4 结 论

考虑系绳弹性, 本文研究了在状态和控制约束下的绳系卫星三维释放的非线性时间最优控制问题. 提出了基于二阶微分包含的控制律设计方法, 该方法具有较少的变量和较高的计算效率. 3 个算例的仿真结果表明, 提出的方法不仅精确完成了卫星释放, 而且有效抑制了系绳的弹性振动. 该方法可用于解决在复杂约束条件下的非线性最优控制问题.

参 考 文 献

- 1 Cosmo ML, Lorenzini EC. Tethers in Space Handbook, 3rd Ed, Smithsonian Astrophysical Observatory, Cambridge, Massachusetts, 1997
- 2 Kumar KD. Review of dynamics and control of nonelectrodynamic tethered satellite systems. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2006, 43(4): 705~720
- 3 Rega G. Nonlinear vibrations of suspended cables—Part I: Modeling and analysis. *Applied Mechanics Review*, 2004, 57(6): 443~478
- 4 Barkow BA. Chaos control strategy for the deployment of a tethered satellite system. [PhD thesis]. Vienna: Vienna University of Technology, 2002
- 5 Zimmerman F, Schottle UM, Messerschmid E. Optimal deployment and return trajectories for a tether-assisted reentry mission. AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Aug. 1999, AIAA Paper 99-4168
- 6 Steindl A, Troger H. Optimal control of deployment of a tethered subsatellite. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 31(3): 257~274
- 7 Jin DP, Hu HY. Optimal control of a tethered subsatellite of three degrees of freedom. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 46(1-2): 161~178
- 8 Williams P, Trivailo P. On the optimal deployment and retrieval of tethered satellites. at 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA-2005-4291
- 9 Williams P. In-plane payload capture with an elastic tether. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(4): 810~821
- 10 Ross IM, Fahroo F. Issues in the real-time computation of optimal control. *Mathematical and Computer Modeling*, 2006, 43(9-10): 1172~1188
- 11 Ross IM, Fahroo F. Pseudo-spectral knotting methods for

- solving optimal control problems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, 27(3): 397~405
- 12 Lanoix ELM. A mathematical model for long term dynamics of tethered satellite systems. [Master of Engineering Thesis]. Montreal: McGill University, 1999
- 13 Wächter A, Biegler LT. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 2006, 106(1): 25~57

TIME-OPTIMAL DEPLOYMENT OF A TETHERED SUBSATELLITE BASED ON DIFFERENTIAL INCLUSION¹⁾

Wen Hao Jin Dongping Hu Haiyan²⁾

(MOE Key Lab of Structure Mechanics and Control for Aircraft, Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract This paper presents the nonlinear time-optimal control for the three-dimensional deployment process of a tethered subsatellite model, which also takes tether elasticity and the mission-related state-control constraints into consideration. Instead of the commonly used state-space model, a second-order differential inclusion formulation is exploited in this study to achieve a significant reduction of the number of system variables. The optimal control is solved by discretizing the optimal control problem based on a direct algorithm, and numerically solving the resulting large-scale optimization problem via a nonlinear programming solver. The case studies in the paper well demonstrate the performance of the proposed strategy.

Key words tethered subsatellite, time-optimal control, elastic tether, differential inclusion, dynamic programming

Received 29 January 2007, revised 12 October 2007.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10372039, 10672073) and the Innovation Fund for Graduate Students of NUAA (4003-019016).

2) E-mail: hhyae@nuaa.edu.cn