

考虑界面损伤层合梁板的层间应力分析¹⁾傅衣铭 李 升²⁾

(湖南大学力学与航空航天学院, 长沙 410082)

摘要 基于精确应力分析的广义六自由度板理论, 应用变分原理和损伤力学中的应变等效原理, 考虑复合材料铺设层内和层间界面处的损伤效应, 建立了具两种损伤模式的复合材料层合板的三维非线性平衡微分方程, 且运用有限差分法对考虑损伤简支层合梁板的层间应力进行了求解。

关键词 几何非线性, 精确应力分析, 界面损伤, 层间应力

中图分类号: O345 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2007)06-0822-07

引 言

聚酯基纤维增强复合材料由于具有高强度、高模量和低密度等优点, 被广泛应用于航空航天、船舶、化工和军工等工程结构中, 而这些结构在生产服役过程中易于产生微损伤, 且这些损伤既可能发生在层内, 也可能发生在层间界面处, 其结果导致结构整体刚度减小, 对其力学行为产生负面影响。本文基于 Soldatos 精确应力分析的广义六自由度板理论^[1~6], 通过引入合适的界面本构关系, 建立了具两种损伤模式的复合材料层合板的三维非线性平衡微分方程组。算例中, 采用有限差分法对具损伤简支层合梁板的层间应力进行求解, 获得了一些有意义的结果。

1 基本方程

考虑图 1 所示正交对称铺设复合材料层合矩形板, 其长为 a , 宽为 b , 具有 n 个厚度相同的正交各向异性弹性单层 (图 2), 板总厚为 h 。坐标系 $oxyz$ 置于板的中面, z 轴向上, 用 U, V, W 分别表示 x, y, z 方向上的位移, 假定沿板内各单层材料的主方向平行于坐标方向, 且在材料主方向上建立局部坐标系 $0-123$ 。用 z_r ($r = 1, 2, \dots, n-1$) 标定层合板中第 r 个界面的位置, 它介于复合材料层合板中第 k 层与第 $k+1$ 层之间 ($k = 1, 2, \dots, n-1$); 对于理想界面, 位移分量 U, V, W 和层间应力分量 $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ 在

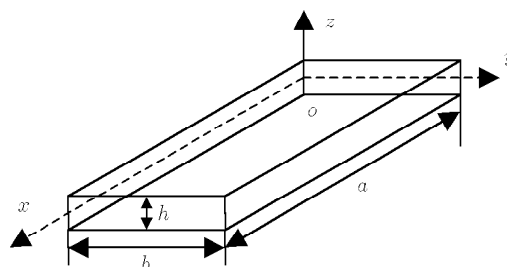


图 1 复合材料层合板

Fig.1 Composite laminated plate

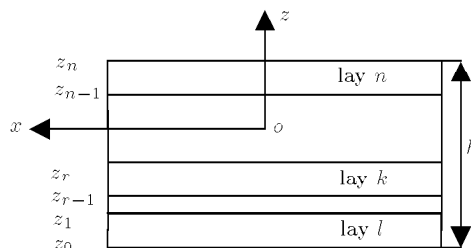


图 2 层合板横截面几何形状

Fig.2 Cross-sectional geometry of laminated plate

厚度方向上连续, 而对于非理想界面, 层间应力分量 $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ 连续而位移分量 U, V, W 不连续。

基于精确应力分析的广义六自由度板理论^[3], 层合板内任一点的位移场可设为

2006-12-01 收到第 1 稿, 2007-04-15 收到修改稿。

1) 国家自然科学基金资助项目 (10572049)。

2) E-mail: lisheng191@yahoo.com.cn

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw_{0,x}(x, y) + \\ &\quad \varphi_1(z)u_1(x, y) \\ V(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw_{0,y}(x, y) + \\ &\quad \varphi_2(z)v_1(x, y) \\ W(x, y, z) &= w_0(x, y) + \psi(z)w_1(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, u_0, v_0, w_0 表示板中面上相应点的位移, u_1, v_1, w_1 为板中面相应点的横向应变, $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \psi(z)$ 是与坐标 z 有关的待定形函数, 它反映了 u_1, v_1, w_1 沿 z 方向变化的形式, 其不仅与各层材料参数和横向坐标有关, 而且对于非理想界面, 它还包含与层间界面损伤相关的信息, 且应满足以下的约束条件

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(0) &= \varphi_2(0) = \psi(0) = 0 \\ \frac{d\varphi_1}{dz}\bigg|_{z=0} &= \frac{d\varphi_2}{dz}\bigg|_{z=0} = \frac{d\psi}{dz}\bigg|_{z=0} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

板内任一点的应变与位移关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{0,x} + \frac{1}{2}w_{0,x}^2 - zw_{0,xx} + \varphi_1 u_{1,x} \\ \varepsilon_y &= v_{0,y} + \frac{1}{2}w_{0,y}^2 - zw_{0,yy} + \varphi_2 v_{1,y} \\ \varepsilon_z &= \psi_{,z} w_1 \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y}) - zw_{0,xy} + \\ &\quad \frac{1}{2}(\varphi_1 u_{1,y} + \varphi_2 v_{1,x}) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(\varphi_{1,z} u_1 + \psi w_{1,x}) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(\varphi_{2,z} v_1 + \psi w_{1,y}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

对于第 r 个界面, 位移改变量 $\Delta^{(r)}$ 的各分量 $\Delta U^{(r)}, \Delta V^{(r)}, \Delta W^{(r)}$ 可以用待定形函数的不连续分布来给定, 则层间不连续待定形函数可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_1^{(r)} u_1 &= [\varphi_1^{(k+1)}(z_r) - \varphi_1^{(k)}(z_r)] u_1 \equiv \Delta U^{(r)} \\ \Delta\varphi_2^{(r)} v_1 &= [\varphi_2^{(k+1)}(z_r) - \varphi_2^{(k)}(z_r)] v_1 \equiv \Delta V^{(r)} \\ \Delta\psi^{(r)} w_1 &= [\psi^{(k+1)}(z_r) - \psi^{(k)}(z_r)] w_1 \equiv \Delta W^{(r)} \\ (r &= 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中, 上标 r 表示第 r 个界面, k 和 $k+1$ 表示与 r 界面有关的第 k 层和第 $k+1$ 层板。

设第 k 层板内任一点的应力分量为 $\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \tau_{yz}^{(k)}, \tau_{xz}^{(k)}, \tau_{xy}^{(k)}$, 则基于应变等效原理, 在整体

坐标系中, 考虑损伤效应时正交对称铺设层合板中第 k 层板的应力 - 应变关系为

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \sigma_y^{(k)} \\ \sigma_z^{(k)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{11}^d & S_{12}^d & S_{13}^d \\ S_{12}^d & S_{22}^d & S_{23}^d \\ S_{13}^d & S_{23}^d & S_{33}^d \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_k \\ \begin{Bmatrix} \tau_{yz}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{44}^d & 0 & 0 \\ 0 & S_{55}^d & 0 \\ 0 & 0 & S_{66}^d \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_k \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

定义具正交各向异性损伤的单层板在材料主方向上的损伤变量为 $D_1^{(k)}$ 和 $D_2^{(k)}$, 且假定损伤沿每一单层板的厚度方向均匀分布. 若 S_{ij} 为第 k 层板无损时的弹性刚度, 则上式中的 S_{ij}^d 为第 k 层板经坐标转换后的折算弹性刚度, 且 S_{ij}^d 可表示为

$$\left. \begin{aligned} S_{11}^d &= S_{11}(1 - D_1^{(k)})^2 \\ S_{12}^d &= S_{12}(1 - D_1^{(k)})(1 - D_2^{(k)}) \\ S_{13}^d &= S_{13}(1 - D_1^{(k)}), \quad S_{22}^d = S_{22}(1 - D_2^{(k)})^2 \\ S_{23}^d &= S_{23}(1 - D_2^{(k)}), \quad S_{33}^d = S_{33} \\ S_{44}^d &= S_{44}(1 - D_2^{(k)}), \quad S_{55}^d = S_{55}(1 - D_1^{(k)}) \\ S_{66}^d &= S_{66}(1 - D_1^{(k)})(1 - D_2^{(k)}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

含界面损伤复合材料层合板的平衡微分方程可以由变分原理确定. 设层合板的上表面施加向上的横向分布载荷 $q(x, y)$, 则整个系统的能量可以表示为

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{\Omega} \int_h \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega dz + \\ &\quad \int_{\Omega} \sum_{r=1}^{N-1} (\mathbf{T}^{(r)})^T \Delta^{(r)} d\Omega - \\ &\quad \int_{\Omega} q(x, y) w\left(\frac{h}{2}\right) d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

其中: $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 分别表示应力张量与应变张量, Ω 为中面面积, $\mathbf{T}^{(r)} = [\tau_{xz} \quad \tau_{yz} \quad \sigma_z]_{z=z_r}^T$. 根据变分原理, $\delta\Pi = 0$, 且假设界面具有如下线性非耦合性质, 即

$$\left. \begin{aligned} \Delta U^{(r)} &= R_{tx}^{(r)} \tau_{xz} \big|_{z=z_r} \\ \Delta V^{(r)} &= R_{ty}^{(r)} \tau_{yz} \big|_{z=z_r} \\ \Delta W^{(r)} &= R_n^{(r)} \sigma_z \big|_{z=z_r} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

得到 6 个非线性平衡微分方程组. 作为本文理论的具体应用, 若考虑一个简支层合梁板, 其载荷形式为 $q = q_m \sin(\alpha x)$, $\alpha = m\pi/a$, $m = 1, 2, \dots$. 在

此情况下, 层合板处于平面应变状态, 则可在分析中引入如下简化: $V = v_0 = v_1 = 0$, $(\cdot)_{,y} = 0$, $S_{12}^d = S_{22}^d = S_{23}^d = S_{44}^d = S_{66}^d$, $R_{ty}^{(r)} = \varphi_2(z) = 0$, 为了书写和求解方便, 以下分析中用 $\varphi(z)$ 代替 $\varphi_1(z)$, $R_t^{(r)}$ 代替 $R_{tx}^{(r)}$, 取 $m = 1$, 并引入如下的无量纲参数

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{x}{a}, \quad \xi = \frac{z}{h}, \quad \bar{U} = \frac{UE_T}{aq_1}, \quad \bar{W} = \frac{WE_T}{aq_1} \\ U_1 &= \frac{u_1 E_T}{q_1}, \quad W_1 = \frac{w_1 E_T}{q_1}, \quad U_0 = \frac{u_0 E_T}{aq_1} \\ W_0 &= \frac{w_0 E_T}{aq_1}, \quad H = \frac{h}{a}, \quad Q = \frac{q_1}{E_T}, \quad \bar{A}_{11}^c = \frac{A_{11}^c}{E_T h} \\ \bar{B}_{11}^c &= \frac{B_{11}^c}{E_T h^2}, \quad \bar{D}_{11}^c = \frac{D_{11}^c}{E_T h^3}, \quad \bar{B}_{11}^a = \frac{B_{11}^a}{E_T h^2} \\ \bar{D}_{11}^a &= \frac{D_{11}^a}{E_T h^3}, \quad \bar{D}_{11}^{aa} = \frac{D_{11}^{aa}}{E_T h^3}, \quad \bar{B}_{13}^b = \frac{B_{13}^b}{E_T h} \\ \bar{D}_{13}^b &= \frac{D_{13}^b}{E_T h^2}, \quad \bar{D}_{13}^{ab} = \frac{D_{13}^{ab}}{E_T h^2}, \quad \bar{A}_{55}^{aa} = \frac{A_{55}^{aa}}{E_T h} \\ \bar{A}_{55}^{ab} &= \frac{A_{55}^{ab}}{E_T h^2}, \quad \bar{A}_{55}^{bb} = \frac{A_{55}^{bb}}{E_T h^3}, \quad \bar{D}_{33}^{bb} = \frac{D_{33}^{bb}}{E_T h} \\ \Delta \bar{\varphi}^{(r)} &= \frac{\Delta \varphi^{(r)}}{h}, \quad \Delta \bar{\psi}^{(r)} = \frac{\Delta \psi^{(r)}}{h}, \quad \bar{R}_t = \frac{R_t E_T}{a} \\ \bar{R}_n &= \frac{R_n E_T}{a} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

应用简化后的式 (3) 和式 (5), 则得到用位移表述的具损伤层合梁板的无量纲非线性平衡微分方程为

$$\left. \begin{aligned} &\bar{A}_{11}^c (U_{0,\zeta\zeta} + Q^2 W_{0,\zeta} W_{0,\zeta\zeta}) - H \bar{B}_{11}^c W_{0,\zeta\zeta\zeta} + \\ &H \bar{B}_{11}^a U_{1,\zeta\zeta} + H \bar{B}_{13}^b W_{1,\zeta} = 0 \\ &\bar{B}_{11}^c (H^2 U_{0,\zeta\zeta\zeta} + H^2 Q W_{0,\zeta}^2 + H^2 Q W_{0,\zeta} W_{0,\zeta\zeta\zeta}) - \\ &H^2 \bar{D}_{11}^c W_{0,\zeta\zeta\zeta\zeta} + H^3 \bar{D}_{11}^a U_{1,\zeta\zeta\zeta\zeta} + H^2 \bar{D}_{13}^b W_{1,\zeta\zeta} + \\ &\left[\bar{A}_{11}^c (H Q U_{0,\zeta} + \frac{1}{2} H Q^2 W_{0,\zeta}^2) - H^2 Q \bar{B}_{11}^c W_{0,\zeta\zeta} + \right. \\ &H^2 Q \bar{B}_{11}^a U_{1,\zeta} + H Q \bar{B}_{13}^b W_1 \left. \right] W_{0,\zeta\zeta} + \sin \pi \zeta = 0 \\ &\bar{B}_{11}^a (H U_{0,\zeta\zeta} + H Q W_{0,\zeta} W_{0,\zeta\zeta}) - H^2 \bar{D}_{11}^a W_{0,\zeta\zeta\zeta} + \\ &H^2 \bar{D}_{11}^{aa} U_{1,\zeta\zeta} + (H \bar{D}_{13}^{ab} - H \bar{A}_{55}^{ab}) W_{1,\zeta} - \\ &\bar{A}_{55}^{aa} U_1 - H \sum_{r=1}^{N-1} \frac{(\Delta \bar{\varphi}^{(r)})^2}{\bar{R}_t^{(r)}} u_1 = 0 \\ &-\bar{B}_{13}^b \left(U_{0,\zeta} + \frac{1}{2} Q W_{0,\zeta}^2 \right) + H \bar{D}_{13}^b W_{0,\zeta\zeta} - \\ &(H \bar{D}_{13}^{ab} - H \bar{A}_{55}^{ab}) U_{1,\zeta} - \bar{D}_{33}^{bb} W_1 + H^2 \bar{A}_{55}^{bb} W_{1,\zeta\zeta} - \\ &H \sum_{r=1}^{N-1} \frac{(\Delta \bar{\psi}^{(r)})^2}{\bar{R}_n^{(r)}} W_1 + \bar{\psi} \left(\frac{1}{2} \right) \sin \pi \zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中各系数的具体表达式为

$$\left. \begin{aligned} (A_{11}^c, B_{11}^c, D_{11}^c) &= \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} S_{11}^d(1, z, z^2) dz \\ (B_{11}^a, D_{11}^a, D_{11}^{aa}) &= \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} S_{11}^d(\varphi, z\varphi, \varphi^2) dz \\ D_{33}^{bb} &= \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} S_{33}^d \psi^2 dz \\ (B_{13}^b, D_{13}^b, D_{13}^{ab}) &= \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} S_{13}^d(\psi, z, z\psi, \varphi\psi, z) dz \\ (A_{55}^{aa}, A_{55}^{ab}, A_{55}^{bb}) &= \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} S_{55}^d(\varphi^2, \varphi, z\varphi, \psi^2) dz \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

若考虑层合梁板的边界条件为简支可动, 其边界条件为

$$x = 0 \text{ 和 } x = a, \quad N_x^c = M_x^a = w_0 = w_1 = M_x^c = 0 \quad (12)$$

上式中, N_x^c, M_x^a 是与 u_0, u_1 有关的边界条件, w_0, w_1 是与横向位移 W 有关的边界条件, M_x^c 是与梁板两端转角 $w_{0,x}$ 有关的边界条件. 对于式 (10) 联立式 (12) 的求解, 还需知道待定形函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$.

2 简支层合梁板的待定形函数

下面确定简支层合梁板的待定形函数, 为书写方便, 以下用 $S_{ij}^{(k)}$ 代表第 k 层板的折算弹性刚度 S_{ij}^d . 类似文献 [4], 并假设界面本构关系具有线性非耦合的性质, 忽略非线性项的影响, 第 k 层梁板的待定形函数 $\varphi^{(k)}(z), \psi^{(k)}(z)$ 应满足用应力表示的三维平衡微分方程, 而对于本问题, 平衡微分方程为

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xz,z} = 0, \quad \sigma_{z,z} + \tau_{xz,x} = 0 \quad (13)$$

设定 u_0, w_0, u_1, w_1 为如下满足简支可动边界条件的位移模式

$$(u_0, u_1) = (A_0, A_1) \cos \alpha x, \quad (w_0, w_1) = (C_0, C_1) \sin \alpha x \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (13), 并利用式 (3) 和式 (5), 得

$$S_{55}^{(k)} A_1 \varphi_{,zz}^{(k)} - S_{11}^{(k)} \alpha^2 A_1 \varphi^{(k)} + (S_{13}^{(k)} + S_{55}^{(k)}) \alpha C_1 \psi_{,z}^{(k)} = S_{11}^{(k)} \alpha^2 (A_0 - \alpha z C_0) \quad (15a)$$

$$S_{33}^{(k)} C_1 \psi_{,zz}^{(k)} - S_{55}^{(k)} \alpha^2 C_1 \psi^{(k)} - (S_{13}^{(k)} + S_{55}^{(k)}) \alpha A_1 \varphi_{,z}^{(k)} = -S_{13}^{(k)} \alpha^2 C_0 \quad (15b)$$

式 (15) 可以看成是关于待求函数 $A_1\varphi^{(k)}(z)$, $C_1\psi^{(k)}(z)$ 的二阶常系数非齐次线性微分方程组, 它的解由满足齐次方程组的通解和一个满足式 (15) 的特解组成. 通过待定系数法, 可以得到式 (15) 的特解; 而齐次方程组的通解可以通过令 $D^n = d^n/dz^n$, 消去主元 $C_1\psi^{(k)}(z)$ 得到仅关于 $A_1\varphi^{(k)}(z)$ 的四阶常系数齐次线性微分方程及其特征方程来求解, 则第 k 层梁板的待定形函数 $\varphi^{(k)}(z)$, $\psi^{(k)}(z)$ 可以表示为

$$\left. \begin{aligned} A_1\varphi^{(k)}(z) &= \Phi^{(k)}(z) + \alpha z C_0 - A_0 \\ C_1\psi^{(k)}(z) &= \Psi^{(k)}(z) - C_0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(k)}(z) &= \sum_{i=1}^4 \kappa_i^{(k)} e^{\lambda_i^{(k)} z} \\ \Psi^{(k)}(z) &= \sum_{i=1}^4 p_i^{(k)} \kappa_i^{(k)} e^{\lambda_i^{(k)} z} \\ p_i^{(k)} &= \frac{S_{11}^{(k)} \alpha^2 - S_{55}^{(k)} \lambda_i^{(k)2}}{(S_{13}^{(k)} + S_{55}^{(k)}) \alpha \lambda_i^{(k)}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

且 $\lambda_i^{(k)} (i = 1, 2, 3, 4)$ 为以下特征方程的实特征根

$$\begin{aligned} S_{33}^{(k)} S_{55}^{(k)} \lambda^4 - [S_{11}^{(k)} S_{33}^{(k)} - (S_{13}^{(k)})^2 - \\ 2S_{13}^{(k)} S_{55}^{(k)}] \alpha^2 \lambda^2 + S_{11}^{(k)} S_{55}^{(k)} \alpha^4 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

在式 (15) 的求解过程中产生了 $4n$ 个待定常数 $\kappa_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, 3, 4$), 它们可以通过给定第 k 层梁板在界面 $z = z_r$ 处的位移分量 U, V, W 和层间应力分量 $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ 的连续条件, 以及给定第 1 层板在 $z = -2/h$ 处和第 n 层板在 $z = 2/h$ 处的边界条件来确定. 同时, 式 (16) 还需满足式 (2) 给出的待定形函数的约束条件, 从而确定 A_0, A_1, C_0, C_1 . 下面具体给出 $\kappa_i^{(k)}$ 和 A_0, A_1, C_0, C_1 的表达式.

由层间应力 τ_{xz}, σ_z 在各层界面 $z = z_r (r = 1, 2, \dots, n-1)$ 处的连续条件, 即在第 r 个界面 $z = z_r$ 处, $\sigma_z^{(k)} - \sigma_z^{(k+1)} = 0, \tau_{xz}^{(k)} - \tau_{xz}^{(k+1)} = 0$, 并应用式 (3), (5), (14) 和 (16), 得

$$\left. \begin{aligned} -\alpha S_{13}^{(k)} \Phi^{(k)}(z_r) + S_{33}^{(k)} \Psi_{,z}^{(k)}(z_r) + \\ \alpha S_{13}^{(k+1)} \Phi^{(k+1)}(z_r) - S_{33}^{(k+1)} \Psi_{,z}^{(k+1)}(z_r) = 0 \\ S_{55}^{(k)} (\Phi_{,z}^{(k)}(z_r) + \alpha \Psi^{(k)}(z_r)) - \\ S_{55}^{(k+1)} (\Phi_{,z}^{(k+1)}(z_r) + \alpha \Psi^{(k+1)}(z_r)) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

对于理想界面, 界面位移连续条件 $\Delta U = \Delta W = 0$, 并应用式 (4), (14) 和 (16), 得

$$\Phi^{(k+1)}(z_r) - \Phi^{(k)}(z_r) = 0, \quad \Psi^{(k+1)}(z_r) - \Psi^{(k)}(z_r) = 0 \quad (20)$$

对于非理想界面, 其位移不连续, 即 $\Delta U = \Delta W \neq 0$, 应用式 (4), 式 (14) 和 (16), 得

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(k+1)}(z_r) - \Phi^{(k)}(z_r) &= \\ R_t^{(r)} S_{55}^{(k)} (\Phi_{,z}^{(k)}(z_r) + \alpha \Psi^{(k)}(z_r)) & \\ \Psi^{(k+1)}(z_r) - \Psi^{(k)}(z_r) &= \\ R_n^{(r)} (-\alpha S_{13}^{(k)} \Phi^{(k)}(z_r) + S_{33}^{(k)} \Psi_{,z}^{(k)}(z_r)) & \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由第 1 层板和第 n 层板的边界条件, 即在 $z = -h/2$ 处: $\sigma_z^{(1)} = \tau_{xz}^{(1)} = 0$; 在 $z = h/2$ 处: $\sigma_z^{(N)} = q_m$, $\tau_{xz}^{(N)} = 0$, 并应用式 (3), (5) 和 (16), 得

$$\left. \begin{aligned} -\alpha S_{13}^{(1)} \Phi^{(1)}(-h/2) + S_{33}^{(1)} \Psi_{,z}^{(1)}(-h/2) &= 0 \\ \Phi_{,z}^{(1)}(-h/2) + \alpha \Psi^{(1)}(-h/2) &= 0 \\ -\alpha S_{13}^{(N)} \Phi^{(N)}(h/2) + S_{33}^{(N)} \Psi_{,z}^{(N)}(h/2) &= q_m \\ \Phi_{,z}^{(N)}(h/2) + \alpha \Psi^{(N)}(h/2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

将式 (17) 代入式 (19)~(22), 即可确定 $4n$ 个未知常数 $\kappa_i^{(k)}$.

将式 (16) 代入待定形函数的约束条件式 (2), 即可求得 A_0, A_1, C_0, C_1 的表达式为

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \sum_{i=1}^4 \kappa_i^{(k^*)}, \quad C_0 = \sum_{i=1}^4 p_i^{(k^*)} \kappa_i^{(k^*)} \\ A_1 &= \sum_{i=1}^4 (\lambda_i^{(k^*)} + \alpha p_i^{(k^*)}) \kappa_i^{(k^*)} \\ C_1 &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i^{(k^*)} p_i^{(k^*)} \kappa_i^{(k^*)} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中, 上标 “ k^* ” 表示包含中性层 ($z = 0$) 的第 k^* 层梁板. 这样, 式 (16) 中的所有常系数都已全部给定, 从而得到满足具体界面条件、边界条件和各单层材料参数的形函数 $\varphi(z), \psi(z)$, 于是层合梁板的非线性平衡微分方程 (10) 可以求解.

3 求解方法

本文中, 对整个问题采用数值方法求解. 考虑到载荷和结构的对称性, 取梁板的二分之一进行计算, 则所考虑的域为 $0 \leq \zeta \leq 1/2$, 且将这个域分成 m 个部分. 计算中, 在空间上对方程 (10) 和边界条

件 (12) 分别采用有限差分法离散; 基本方程中的非线性项被线性化处理, 写为

$$(X \cdot Y)_J = (X)_J(Y)_{J_p}$$

(24)

式中, $(Y)_{J_p}$ 是前两次迭代步的平均值. 对于初始迭代步, 可以用二次外推法求解.

通过有限差分法和对非线性项的处理, 由控制方程 (10)、形函数 (16) 和边界条件 (12) 所确定的非线性平衡微分方程组转化为一组线性代数方程, 在方程中给定每层材料的损伤值 $D_1^{(k)}, D_2^{(k)}$ 和界面损伤值 $\bar{R}_t, \bar{R}_n$, 于是整个问题可以采用迭代法对它们联立求解, 迭代过程持续到相邻两次所得计算结果的误差小于 0.1%.

4 数值结果及讨论

为验证本文方法的正确性, 首先考虑无层内损伤 ($D_1^{(k)} = D_2^{(k)} = 0$) 两层 $[0^\circ/0^\circ]$ 铺设层合梁板的情况, 取材料参数和几何参数如下

$$\left. \begin{aligned} E_L/E_T &= 40, \quad G_{LT}/E_T = 0.5 \\ v_{LT} &= 0.25, \quad h/a = 0.25 \end{aligned} \right\}$$

(25)

表 1 将梁板中点挠度值 $\bar{W}(0.5, 0.5)$ 与文献 [11] 进行了比较. 从表中可以看出, 本文的线性解答略大于文献 [4] 的结果, 这是由于本文采用有限差分法进行求解而造成的计算误差, 但计算结果吻合较好, 说明本文方法的正确性. 本文的非线性解答比线性

表 1 不同层间界面损伤 ($\bar{R}_t, \bar{R}_n$) 下层合梁板中心挠度 $\bar{W}(0.5, 0.5)$ 的比较

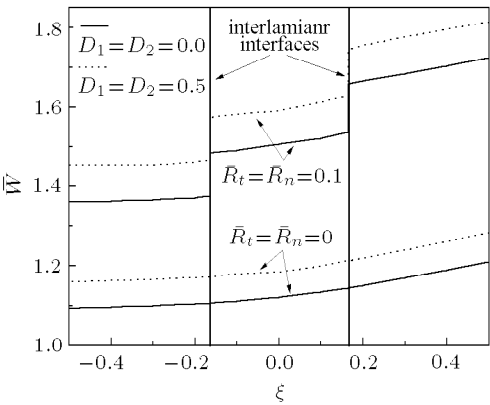
Table 1 The comparison of displacement $\bar{W}(0.5, 0.5)$ under different interfacial damage

$\bar{R}_t = \bar{R}_n = 0$			$\bar{R}_t = \bar{R}_n = 0.1$			$\bar{R}_t = \bar{R}_n = 10$		
Ref.[4]	Present	Present	Ref.[4]	Present	Present	Ref.[4]	Present	Present
linear	linear	nonlinear	linear	linear	nonlinear	linear	linear	nonlinear
solution	solution	solution	solution	solution	solution	solution	solution	solution
1.2091	1.2937	1.3421	1.4238	1.5235	1.5804	2.8056	2.9820	3.1142

解答偏大, 说明考虑结构变形的几何非线性降低了梁板的刚度, 结构更易发生变形.

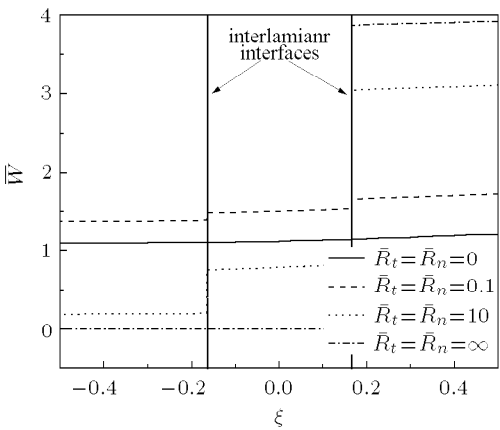
下面给出应用本文理论所得的一些计算结果. 考虑具损伤三层 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 正交对称铺设简支层合梁板的情况, 设材料参数和几何参数与式 (25) 一致. 在以下各图中用粗黑线标明了层间界面, 且界面两边从左至右分别为第 1 层 0° 铺设、第 2 层 90° 铺设、第 3 层 0° 铺设梁板.

图 3 显示了不同损伤状态对层合梁板中点挠度的影响, 由图 3(a) 可知, 在理想界面情况下



(b) 层间界面损伤与层内材料损伤

(b) Interfacial damage and intra-layer damage



(a) 层间界面损伤

(a) Interfacial damage

图 3 不同损伤状态下层合梁板中点挠度 $\bar{W}(0.5, \xi)$ 沿板厚方向的分布情况

Fig.3 The effect of different damage conditions on the mid-point deflection through thickness of plate

($\bar{R}_t = \bar{R}_n = 0$), 层合梁板中点挠度在界面处连续; 随着层间界面损伤扩大 ($\bar{R}_t = \bar{R}_n > 0$), 第 3 层梁板的挠度一直增加, 且界面处挠度出现不连续和跳跃, 而第 1 层和第 2 层梁板的挠度先增加后迅速减小, 这是由于界面劣化使得这两层梁板所能分配到的载荷迅速减小的缘故; 当界面完全损伤 ($\bar{R}_t = \bar{R}_n = \infty$)

时, 第 1 层和第 2 层梁板的挠度为零, 此时层合梁板具有单层板性质. 由图 3(b) 可知, 层内损伤 ($D_1 = D_2 = 0.5$) 将降低结构的有效刚度, 使得挠度增加.

图 4 和图 5 分别显示了不同层间界面损伤状态对 z 方向正应力 $\bar{\sigma}_z(0.5, \xi)$ 和横向剪应力 $\bar{\tau}_{xz}(0, \xi)$ 的影响. 由图可知, 正应力 $\bar{\sigma}_z$ 和剪应力 $\bar{\tau}_{xz}$ 在层间界面处连续, 这符合本文理论中层间应力分量在界面处连续的条件; 随着层间界面损伤扩大, 第 3 层梁板的正应力 $\bar{\sigma}_z$ 一直减小, 而剪应力 $\bar{\tau}_{xz}$ 却一直增加,

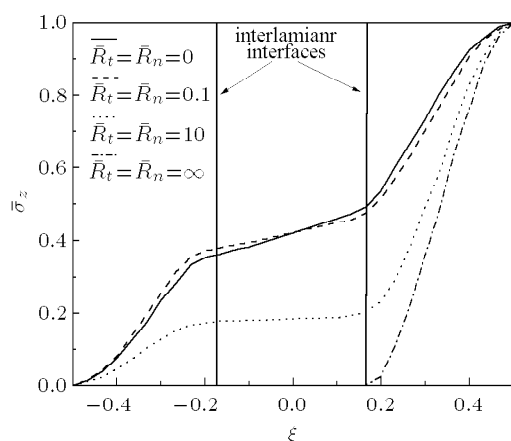


图 4 层间界面损伤对正应力 $\bar{\sigma}_z(0.5, \xi)$ 的影响

Fig.4 The effect of different interfacial damage conditions on the stress

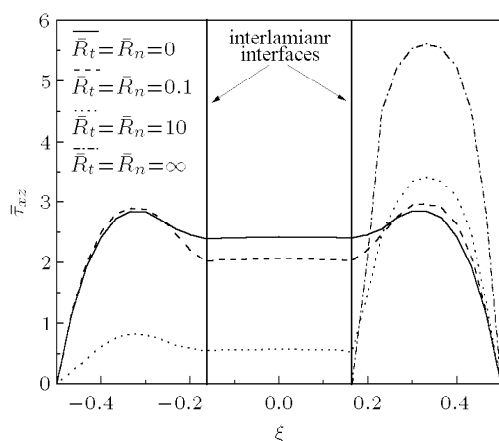


图 5 层间界面损伤对剪应力 $\bar{\tau}_{xz}(0, \xi)$ 的影响

Fig.5 The effect of different interfacial damage conditions on the shear stress

且正应力 $\bar{\sigma}_z$ 减小的趋势和剪应力 $\bar{\tau}_{xz}$ 增加的趋势随着层间界面损伤的扩大而加快, 这是由于界面劣化使得第 3 层梁板承受了较大的载荷, 且实际承载的梁板厚度变薄的缘故.

4 结 论

本文考虑复合材料铺设层内和层间界面处的损伤效应, 建立了具两种损伤模式的复合材料层合板的三维非线性平衡微分方程, 且运用有限差分法进行了求解. 数值结果表明: 当损伤较小时, 层间界面损伤与层内材料损伤具有相似的性质, 使得板的有效刚度降低; 随着界面损伤进一步扩大, 除正应力 $\bar{\sigma}_z$ 以外, 第 3 层梁板的中点挠度 $\bar{W}(0.5, \xi)$ 和剪应力 $\bar{\tau}_{xz}(0, \xi)$ 都增加, 而第 1, 2 层梁板的应力场和位移场都迅速减小, 这说明界面劣化使得第 3 层梁板承受了较大的载荷, 且使得实际承载的梁板厚度变薄, 从而导致界面两边出现不同的力学行为, 表现为界面处的位移场和应力场出现不连续的跳跃现象.

参 考 文 献

- 1 Soldatos KP, Watson P. A general four-degrees-of-freedom theory suitable for the accurate stress analysis of homogeneous and laminated composite beams. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34(22): 2857~2885
- 2 Soldatos KP, Watson P. A method for improving the stress analysis performance of one- and two-dimensional theories for laminated composites. *Acta Mechanica*, 1997, 123(3): 163~186
- 3 Soldatos KP, Watson P. Accurate stress analysis of laminated plates combining a two-dimensional theory with the exact three-dimensional solution for simply supported edges. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1997, 2(4): 459~489
- 4 Xiaoping Shu, Kostas P.Soldatos. An accurate delamination model for weakly bonded laminates subjected to different set of edge boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, 43: 935~959
- 5 Kostas P.Soldatos, Xiaoping Shu. Modeling of perfectly and weakly bonded laminated plates and shallow shells. *Composites Science and Technology*, 2001, 61: 247~260
- 6 Kostas P.Soldatos, Xiaoping Shu. On the thress analysis of cross-ply laminated paltes and shallow shell panels. *Composite Structures*, 1999, 46: 333~344

ANALYSIS OF INTERLAMINAR STRESS IN COMPOSITE LAMINATED BEAM-PLATE WITH INTERFACIAL DAMAGE¹⁾

Fu Yiming Li Sheng²⁾

(*College of Mechanics and Aerospace, Hunan University, Changsha 410082, China*)

Abstract Based on the general six-degrees-of-freedom plate theory and the accurate stress analysis, using the variational principle and the equivalent strain theory in damage mechanics, the three-dimensional non-linear equilibrium differential equations for the interlaminar stresses of laminated plates with the damage effect of the intra-layers and the interlaminar interface are derived in the framework of the theory of elasticity. With a simply supported laminated beam-plate with damage as an example, an analytical solution is presented by using finite difference method to obtain the interlaminar stresses.

Key words geometric nonlinearity, accurate stress analysis, interfacial damage, interlaminar stress

Received 1 December 2006, revised 15 April 2007.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10572049).

2) E-mail: lisheng191@yahoo.com.cn