

非均匀水流中非线性波传播的数值模拟¹⁾

王亚玲^{*,†} 张洪生^{†,2)}

^{*}(上海海事大学交通运输学院, 上海 200135)

[†](上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200030)

摘要 以一种考虑波流相互作用的新型 Boussinesq 型方程为控制方程组, 采用五阶 Runge-Kutta-England 格式离散时间积分, 采用七点差分格式离散空间导数, 并通过采用恰当的出流边界条件, 从而建立了非均匀水流中非线性波传播的数值模拟模型. 通过对均匀水流与水深水域内和潜堤地形上存在弱流或强流时波浪传播的数值模拟, 说明模型能有效地反映水流对波浪传播的影响.

关键词 数值模拟, 新型 Boussinesq 型方程, 非均匀水流, 非线性波, 波浪阻塞

中图分类号: P731.22, O353.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)06-0732-09

引 言

近岸水域存在的波浪传播变形经常受到水流的影响. 在水流的影响下, 会产生 Doppler 频移效应; 顺流时波高减小、波长增大; 逆流时波高增大、波长减小等. 文献 [1,2] 使用传统的波作用方程研究了波流相互作用. 波作用方程等价于射线理论并且不适用于绕射现象明显的区域. 为了克服波作用守恒方程的不足, 很多研究者^[3~5] 推导了考虑非均匀水流作用的缓坡方程, 并进行了数值求解^[3,6~8]. 上述的波流相互作用的理论模型都是根据线性理论而建立的.

Boussinesq 型方程是描述近岸波浪传播过程中的浅水变形、折射、绕射、非线性和水流等综合作用的强有力工具. Peregrine^[9] 利用摄动法推导了适合水深变化的弱频散性、弱非线性、以沿水深平均的水平速度为特征速度的经典 Boussinesq 型方程. 当相位速度误差不大于 2% 时, 方程的水深适用范围是 $\mu \leq 0.22$ (μ 为水深与特征波长之比, $\mu = h/L$, h 为水深, L 为波长)^[10]. 文献 [10~16] 各自采取不同或类似的方法, 改进了方程的线性频散关系或非线性特征. 在二维情况下, 传统 Boussinesq 型方程的控制方程组, 一般由 3 个控制方程 (一维情况下由两个控制方程) 组成, 即由连续方程和动量方程组成.

因变量为波面和特征水平速度, 其中, 特征水平速度为沿水深平均的水平速度或某一水深层的水平速度. Yoon 和 Liu^[17] 基于经典 Boussinesq 型方程推导了完全意义上的波流相互作用方程, 即, 既考虑波对流的作用, 又考虑流对波的作用. 但由于波、流时间和空间变化尺度的不同, 波流相互作用的耦合关系很弱, 因此, 文献 [17] 在具体的数值计算中仅考虑了恒定水流对波浪传播的影响. 文献 [18,19] 分别基于不同型的传统 Boussinesq 型方程推导了非均匀水流中波浪传播的数学模型, 并进行了数值求解. 文献 [20] 基于 Nwogu^[12] 的方程对非线性的波流相互作用进行了研究.

Agnon 等^[21] 通过将问题分为两部分, 推导了另一种型式的 Boussinesq 型方程. 一个是线性部分问题, 这个问题是在未扰动的水域求解 Laplace 方程. 应用分离变量法, 将速度势函数在静水面处展开为垂向坐标的无穷阶幂级数, 从而, 将三维问题二维化; 应用水底边界条件, 建立静水面上的水平速度 (u_0) 和垂向速度 (w_0) 之间的关系, 当不对级数进行截断时, 这个关系精确定义了线性频散关系和线性变浅特征; 将级数截断到有限阶, 以便进行数值计算; 使用 Padé 近似并选择合适的线性算子作用于水底边界条件, 以得到最优的线性频散关系和变浅特征. 另一个是非线性部分问题, 以直接定义在自

2006-08-28 收到第 1 稿, 2007-08-15 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (40676053, 40106008), 2005 年上海高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金 (032711) 和上海海事大学交通运输规划与管理重点学科资助项目.

2) E-mail: hhszhang@sjtu.edu.cn

由表面的速度变量 ($\tilde{u}$ 和 $\tilde{w}$) 以及自由表面位移, 表达自由表面的运动学和动力学边界条件, 同时建立自由表面速度势函数的水平梯度 ($\tilde{q}$) 和自由表面上的水平速度以及垂向速度之间的关系. 通过使用速度势函数的级数展开式, 建立直接定义在自由表面的速度变量和静水面上的速度变量之间的关系, 从而使方程组闭合. 该方程的水深适用范围是 $\mu \leq 1.0$, 并有比较好的非线性特征. Wang 等^[22] 直接将速度势函数表示为任意水深层处垂向坐标的幂级数, 然后利用和文献 [21] 类似的方法, 求解问题的线性部分, 即在未扰动水域内求解 Laplace 方程, 推导了包含定常水流作用的新型 Boussinesq 型方程. 在纯波情况下, 当选取 $z = -0.5h$ 时, 在 $\mu \leq 2.71$ 的水深范围内线性频散关系与精确解吻合良好. 在存在水流的情况下, 当 $F_r = -0.1$ 时, 保持与一阶 Stokes 波精确频散解的相对误差小于 5%, 方程的相对水深适用范围为 $\mu \leq 0.9$. 而文献 [17] 基于线性频散关系具有 [0,2] 阶 Padé 近似精度的经典 Boussinesq 型方程所建立的波流相互作用理论模型, 在上述条件下, 方程的相对水深适用范围为 $\mu \leq 0.15$; 文献 [19] 基于线性频散关系具有 [4,4] 阶 Padé 近似精度的传统型式的 Boussinesq 型方程所建立的波流相互作用理论模型, 方程的相对水深适用范围为 $\mu \leq 0.7$.

由于新型 Boussinesq 型方程在求解一维问题时需求解 6 个控制方程, 而且所形成的方程组是稀疏矩阵, 虽经对变量的重新排序, 可以形成带状矩阵, 但带宽仍至少为 25, 其中还有为数不少的零元素. 因此, 对新型 Boussinesq 型方程建立数值模拟模型、进而进行数值求解是一项富有挑战性的工作. 张洪生等^[23] 以文献 [22] 所推导的不考虑波流相互作用的新型 Boussinesq 型方程为控制方程, 采用五阶 Runge-Kutta-England 格式离散时间积分, 采用七点差分格式离散空间导数, 并通过采用恰当的出流边界条件, 建立了非线性波传播的新型数值模拟模型.

本文首先给出文献 [22] 考虑波流相互作用时控制方程的表达型式, 然后建立数值模型; 在第 3 部分就均匀水流与水深水域内波浪的传播进行数值模拟; 在第 4 和第 5 部分就水槽中潜堤地形上分别存在弱流和强流作用下的波浪传播进行数值模拟; 最后, 给出结论.

1 非均匀水流中非线性波传播的数学模型

Wang 等^[22] 从势流理论出发, 将速度势函数表示为任意水深层处垂向坐标的幂级数, 将幂级数代

入 Laplace 方程得到速度势函数的级数解, 再将速度势函数表达式代入水底边界条件, 并进行截断和引入微分算子, 利用自由面上的水平和垂向波动速度来表示自由面边界条件, 推导了包含给定水流作用的新型 Boussinesq 型方程. 截断到五阶导数项的一维理论模式可概括如下

$$\eta_t - \tilde{w}_w + (\tilde{u}_w + u_c)\eta_x = 0 \quad (1)$$

$$(\tilde{q})_t + g\eta_x + \tilde{q}(\tilde{q})_x - (\tilde{w}_w)^2\eta_x\eta_{xx} - \tilde{w}_w(\tilde{w}_w)_x \cdot$$

$$(1 + (\eta_x)^2) - \tilde{q}(u_c)_x - u_c(\tilde{q})_x + u_c(u_c)_x = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \left[\hat{w}_w - \frac{4}{9}\lambda^2(\hat{w}_w)_{xx} + \frac{1}{63}\lambda^4(\hat{w}_w)_{xxxx} \right] + \\ & \left[\lambda(\hat{u}_w)_x - \frac{1}{9}\lambda^3(\hat{u}_w)_{xxx} + \frac{1}{945}\lambda^5(\hat{u}_w)_{xxxxx} \right] + \\ & h_x \left[\hat{u}_w - \left(\frac{1}{3} - b_1 \right) \lambda^2(\hat{u}_w)_{xx} + \right. \\ & \left. \left(-\frac{2}{63} - \frac{1}{6}b_1 + b_3 \right) \lambda^4(\hat{u}_w)_{xxxx} \right] - \\ & h_x \left[(1 - b_1)\lambda(\hat{w}_w)_x - \left(-\frac{1}{2}b_1 + b_3 \right) \lambda^3(\hat{w}_w)_{xxx} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\tilde{q} = \tilde{u}_w + \tilde{w}_w\eta_x \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_w = & \hat{u}_w - \frac{1}{2}(\eta - \hat{z})^2(\hat{u}_w)_{xx} + \frac{1}{24}(\eta - \hat{z})^4(\hat{u}_w)_{xxxx} + \\ & (\eta - \hat{z})(\hat{w}_w)_x - \frac{1}{6}(\eta - \hat{z})^3(\hat{w}_w)_{xxx} \\ & + \frac{1}{120}(\eta - \hat{z})^5(\hat{w}_w)_{xxxxx} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_w = & \hat{w}_w - \frac{1}{2}(\eta - \hat{z})^2(\hat{w}_w)_{xx} + \frac{1}{24}(\eta - \hat{z})^4(\hat{w}_w)_{xxxx} - \\ & (\eta - \hat{z})(\hat{u}_w)_x + \frac{1}{6}(\eta - \hat{z})^3(\hat{u}_w)_{xxx} - \\ & \frac{1}{120}(\eta - \hat{z})^5(\hat{u}_w)_{xxxxx} \end{aligned} \quad (6)$$

式中, 直角坐标系 (x, y, z) 的原点在静水面上, z 轴竖直向上为正, h 为水深, η 为自由面位移, u_c 为背景水流速度, g 为重力加速度, $\lambda = h + \hat{z}$, $\hat{z} = \tau h$, 文中取 $\tau = -0.5$, $b_1 = -0.204113$, $b_3 = 0.00653242$.

控制方程组中含 6 个未知量: 自由面位移 η 、自由表面上速度势函数的水平梯度 $\tilde{q}$ 、自由面上水平速度分量 $\tilde{u}$ 和垂直速度分量 $\tilde{w}$ 、任意水深层 $z = \hat{z}$ 处的水平速度分量 $\hat{u}$ 和垂直速度分量 $\hat{w}$.

在上述控制方程组中, 式 (1)、(2) 和式 (4) 都是从完全非线性的自由表面运动学和动力学条件推导而来. 而且, 除式 (3) 外, 在式 (1)~ 式 (6) 中, 均含有未知量与未知量导数的乘积项, 因此, 是非线

性的方程.

2 非线性波传播的数值模拟模型

2.1 控制方程组的数值离散格式

本文采用七点有限差分格式对控制方程组的空间导数进行离散, 对时间导数采用五阶 Runge-Kutta-England 格式. 将 x 方向的计算域剖分成均匀网格, x 方向步长为 Δx . 时间步长为 Δt . i 表示空间网格点的序号 ($i = 1, 2, \dots, I$), n 表示第 n 个 Δt 时刻 ($n = 1, 2, \dots, N$). 例如, 函数 η 在离散点 $i\Delta x$ 上第 $n\Delta t$ 时刻的值记作 η_i^n .

2.1.1 空间差分的离散

控制方程组中包含五阶空间导数项, 因此, 对空间导数项采用七点差分格式, 利用 Taylor 级数展开法来构造空间差分的离散格式. 低阶导数项的精度高于高阶导数项的精度, 空间导数的中心和偏心差分公式可统一表示为

$$\delta F_l = \gamma \sum_{m=i-3}^{i+3} \alpha_m F_m \quad (7)$$

式中, $F = \{\eta, \tilde{q}, \tilde{u}, \tilde{w}, \hat{u}, \hat{w}\}$, δF 是表示函数 F 在网格点 l 处的空间导数 ($i-3 \leq l \leq i+3$), $l = i$ 时为中心差分, $l \neq i$ 时为偏心差分, γ, α_m 为差分公式的系数, 各系数的取值详见文献 [23,24].

采用以上差分格式分别对式 (5)、(6) 和式 (3) 进行离散, 可得如下矩阵形式的表达式

$$\tilde{u}_w = A_1 \hat{u}_w + B_1 \hat{w}_w \quad (5')$$

$$\tilde{w}_w = -B_1 \hat{u}_w + A_1 \hat{w}_w \quad (6')$$

$$A_2 \hat{u}_w + B_2 \hat{w}_w = 0 \quad (3')$$

式中, A_1, B_1, A_2 和 B_2 均为 $I \times I$ 方阵, 为存放方程组系数的矩阵. 其中, I 为 x 方向网格点数. $\tilde{u}_w, \tilde{w}_w, \hat{u}_w$ 和 $\hat{w}_w$ 均为 $I \times 1$ 矩阵, 它们分别为变量 $\tilde{u}_w, \tilde{w}_w, \hat{u}_w$ 和 $\hat{w}_w$ 的列向量. 将式 (5') 和 (6') 代入式 (4), 可得

$$(A_1 - B_1 \eta_x) \hat{u}_w + (B_1 + A_1 \eta_x) \hat{w}_w = \tilde{q} \quad (4')$$

式中, η_x 为 $I \times I$ 矩阵; $\tilde{q}$ 为 $I \times 1$ 矩阵, 为 $\tilde{q}$ 的列向量. 由式 (4') 和式 (3'), 可得基本未知量为 $\hat{u}_w$ 和 $\hat{w}_w$ 的线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} A_1 - B_1 \eta_x & B_1 + A_1 \eta_x \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_w \\ \hat{w}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

由于矩阵 A_1, B_1, A_2 和 B_2 的带宽至少为 7, 线性代数方程组的系数是一个结构复杂的稀疏矩阵, 因此, 需对基本未知量重新排序. 将每一网格点的 $(\hat{u})_i$ 和 $(\hat{w})_i$ 放在一起, 即由原来的 $\{(\hat{u}_w)_1, \dots, (\hat{u}_w)_I, (\hat{w}_w)_1, \dots, (\hat{w}_w)_I\}$ 变为 $\{(\hat{u}_w)_1, (\hat{w}_w)_1, \dots, (\hat{u}_w)_I, (\hat{w}_w)_I\}$, 经重新排序后, 相应方程组的系数矩阵由原来的稀疏矩阵变为带宽为 27 的带状矩阵. 本文采用列选主元的高斯消去法对线性代数方程组进行求解.

2.1.2 时间积分

为了数学描述方便, 可分别将式 (1) 和式 (2) 改写成如下形式

$$\eta_t = f(t, \eta, \tilde{q}) \quad (1')$$

$$\tilde{q}_t = \tilde{f}(t, \eta, \tilde{q}) \quad (2')$$

其中

$$f = \tilde{w}_w - (\tilde{u}_w + u_c) \eta_x \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & -g \eta_x - \tilde{q}(\tilde{q})_x + (\tilde{w})^2 \eta_x \eta_{xx} + \\ & \tilde{w}(\tilde{w})_x (1 + (\eta_x)^2) + \tilde{q}(u_c)_x + u_c(\tilde{q})_x - u_c(u_c)_x \end{aligned} \quad (10)$$

对式 (1') 和 (2') 中空间导数项的离散同样采用七点差分格式. 对时间导数项的离散采用五阶 Runge-Kutta-England 格式. 具体数值离散公式及迭代求解格式见文献 [23,24].

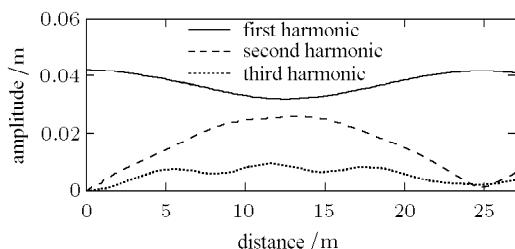
2.2 边界条件和数值滤波

根据 Ursell 数 (记为 U_r , $U_r = \varepsilon/\mu^2$, $\varepsilon = A/h$, A 为波振幅) 的不同, 给定斯托克斯波入射边界条件或椭圆余弦波入射边界条件. 在计算域的下游边界采用海绵层消波和 Sommerfeld 辐射边界条件相结合的方法来处理出流边界. 由于 Boussinesq 型方程含有高阶导数项, 故在计算过程中将产生数值短波, 它会导致波幅增长很快, 最终引起模型计算崩溃. 消除这种高频波的有效方法是数值滤波技术, 详见文献 [23,24].

3 均匀水流与水深水域波浪传播的数值模拟

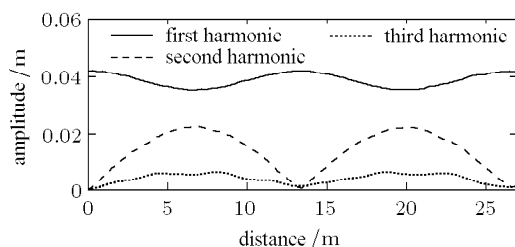
设置长度为 30.0 m, $h = 0.4$ m 的均匀水深的水槽, 水槽的左端为入射波边界, 右端为出流边界. 入射波周期为 $T = 2.5$ s, 波高为 $H = 0.084$ m 的一阶 Stokes 波. 在水槽中给定 Froude 数为 ± 0.15 的均匀水流. 在数值计算时, 空间步长取 $\Delta x = L/30$, 时间步长取 $\Delta t = T/120$.

为了讨论水流对谐波的影响, 我们采用与静水情况相同的一阶 Stokes 波入射波高, 分别数值模拟了顺流、静水和逆流情况下波浪的传播, 并对一个周期时间序列的波面位移进行傅立叶变换进而得到各阶谐波, 数值模拟结果见图 1.



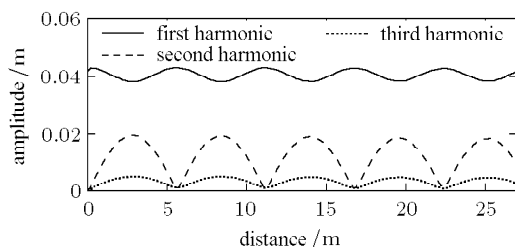
(a) 顺流

(a) Following current



(b) 静水

(b) Without current



(c) 逆流

(c) Opposing current

图 1 前三阶谐波波幅沿程变化

Fig.1 Spatial variations of amplitudes of first three harmonic generated with the cases

由图 1(a) 和图 1(b) 可见, 顺流时, 谐波的拍长明显增大; 二次谐波的最大振幅也有所增大. 这表明顺流增强了基频波和倍频波之间的能量交换. 由图 1(b) 和图 1(c) 可见, 逆流时, 谐波的拍长明显减小、二次谐波的最大振幅也有所减小. 这表明逆流时不同阶次谐波之间能量交换的情况刚好与顺流时的情况相反.

4 弱水流中潜堤地形上波浪传播的数值模拟

由于当遇到潜堤时, 波浪在传播过程中会产生高阶谐波并发生非线性相互作用^[23], 因此, 该类物理模型的实验结果常用于验证 Boussinesq 型方程的数值解. Luth 等^[27]在潜堤地形上进行了纯波传播的物理模型实验, 如在本文的控制方程中不考虑水流的作用, 则数值模型可以很有效地模拟此实验条件下纯波的传播^[23,24]. 图 2 为 Luth 等^[27]的实验示意图. 水槽长 32.0 m, 平底处水深为 0.4 m, 堤顶水深为 0.1 m, 堤顶长度为 2.0 m, 上游 (相对入射方向而言) 坡度为 1:20, 下游坡度为 1:10. 本文采用与 Luth 等^[27]的物理模型实验相同的地形, 同时考虑弱水流的作用. 在数值水槽中设置与波浪传播方向同向或逆向的定常水流, 在平底处流速大小为 ± 0.025 m/s, Froude 数为 ± 0.0126 . 入射波波幅为 $a = 0.01$ m, 周期为 $T = 2.02$ s. 数值计算时, 空间步长取 $\Delta x = L/60$, 时间步长取 $\Delta t = T/90$.

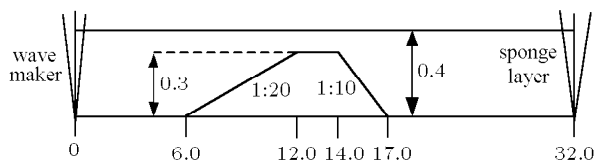
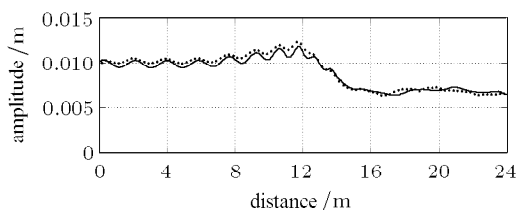
图 2 Luth 等^[27]的物理模型实验示意图 (单位: m)Fig.2 Sketch of wave flume of the physical experiments by Luth et al.^[27] (unit:m)

图 3 给出了顺流和静水中波浪在潜堤地形上产生的前三阶谐波波幅的比较. 从图 3 可以看出, 在潜堤上坡段, 即在 6~12 m 的范围内, 与纯波情况相比, 顺流使得基频波和受约束的高阶谐波的波幅有所减小; 在堤顶处, 约束谐波开始释放为自由波, 更容易受环境水流的影响, 拍长控制了基频波和高频

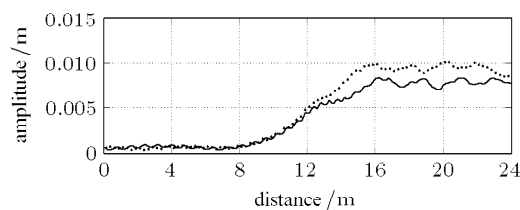


(a) 一阶谐波

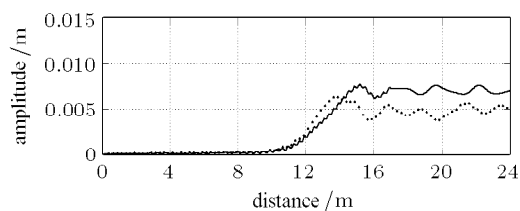
(a) First harmonic

图 3 在顺流 (实线) 和静水 (点线) 中潜堤地形上产生的谐波波幅比较

Fig.3 Comparisons of harmonic amplitudes over submerged bar with following current (solid line) and without current (dotted line)



(b) 二阶谐波
(b) Second harmonic



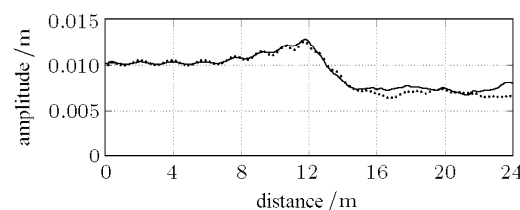
(c) 三阶谐波
(c) Third harmonic

图 3 在顺流 (实线) 和静水 (点线) 中潜堤地形上产生的谐波波幅比较 (续)

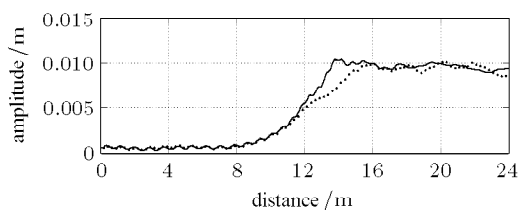
Fig.3 Comparisons of harmonic amplitudes over submerged bar with following current (solid line) and without current (dotted line) (continued)

波之间的能量交换. 在第 3 节曾指出, 顺流使拍长增加. 因此, 当波浪经过堤顶时, 与纯波情况相比, 在顺流的作用下基频波和高阶谐波之间进行了长时间的能量交换. 其标志就是从堤顶开始, 顺流时高阶谐波的振幅明显增大.

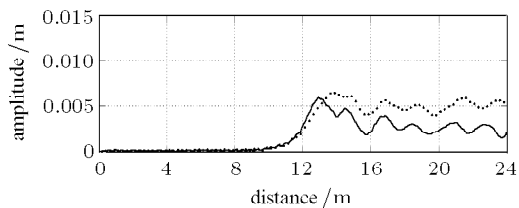
图 4 给出了逆流和静水中在潜堤地形上产生的前三阶谐波波幅的比较. 从图 4 可以看出, 与纯波情况相比, 在潜堤上坡段, 即在 6~12m 的范围内, 逆流使得基频波和受约束的高阶谐波的波幅稍微有所增大. 从堤顶到堤后, 逆流时高阶谐波的振幅与纯波时相当或明显减小, 因此, 当波浪经过堤顶时, 在逆流作用下基频波和高阶谐波之间很快地进行了能量交换.



(a) 一阶谐波
(a) First harmonic



(b) 二阶谐波
(b) Second harmonic



(c) 三阶谐波
(c) Third harmonic

图 4 在逆流 (实线) 和静水 (点线) 中潜堤地形上产生的谐波波幅比较

Fig.4 Comparisons of harmonic amplitudes over submerged bar with opposing current (solid line) and without current (dotted line)

5 强水流中潜堤地形上波浪传播的数值模拟

文献 [19] 利用 Boussinesq 型方程对逆流情况时潜堤地形上波浪传播过程中产生的波浪阻塞现象进行了数值模型实验, 本文采用和文献 [19] 相同的地形. 图 5 为水槽示意图. 上游坡度为 1:50, 下游坡度为 1:20, 水槽长 60 m, 平底处水深为 0.8 m, 堤顶水深为 0.2 m, 堤顶长度为 2.0 m. 设置入射波周期为 $T = 2.0$ s, 波高 $H = 0.032$ m. 在数值计算时, 空间步长取 $\Delta x = L/16$, 时间步长取 $\Delta t = T/60$.

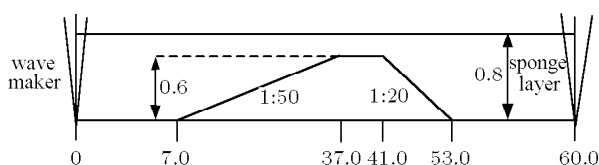


图 5 Chen 等 [19] 数值水槽示意图 (单位: m)
Fig.5 Sketch of numerical wave-current flume from
Chen et al. [19] (unit: m)

在数值水槽中生成稳定逆向水流, 其流量为 $-0.136 \text{ m}^2/\text{s}$, 在平底处水平流速为 -0.17 m/s , Froude 数为 -0.06 . 由非线性长波理论计算可得背景流场, 堤顶处水面跌落为 -0.0319 m , 流速为

-0.809 m/s , 最大 Froude 数达到 -0.63 . 图 6 为自由面位移以及水平流速沿程分布. 根据 Stokes 理论, 流量为 $-0.136\text{ m}^2/\text{s}$ 的背景流中, 在堤顶处产生波浪阻塞现象的临界波周期为 3.35 s , 即周期大于 3.35 s 的波才能通过堤顶继续向前传播, 而周期小于 3.35 s 的波将在堤顶前某处发生波浪阻塞. 由 Stokes 理论计算可得周期为 2.0 s 的入射波, 在 $x = 36.0\text{ m}$ 处产生波浪阻塞现象. 此时波群速和水流流速分别为 0.69 m/s 和 -0.69 m/s .

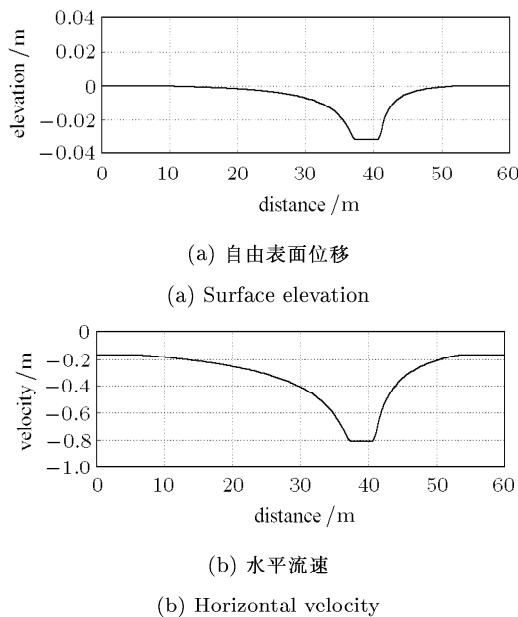


图 6 逆向的稳定背景流沿程分布

Fig.6 Spatial variation of steady opposing current

图 7 为数值模拟的水流流量为 $-0.136\text{ m}^2/\text{s}$ 的情况下, 在 $t = 20\text{ s}$, 30 s , 40 s 不同瞬时的波面沿程变化, 图 8 为产生波浪阻塞时一个周期 ($t = 38.5\text{ s}$, 39 s , 39.5 s , 40 s , 40.5 s) 内的波面沿程变化. 由图 7 ($t = 40\text{ s}$) 和图 8 可见, 波浪在逆向水流中传播时, 随着水深的变浅, 特别是从 $x = 26.0\text{ m}$ 左右开始, 波高逐渐增大, 波长逐渐减小, 波速也逐渐减小, 而水流的流速随着水深的变浅逐渐增大, 当逆向水流的流速与局部波群速相等时, 波浪将不

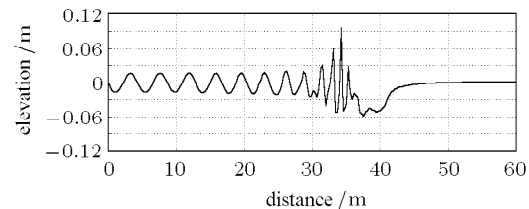
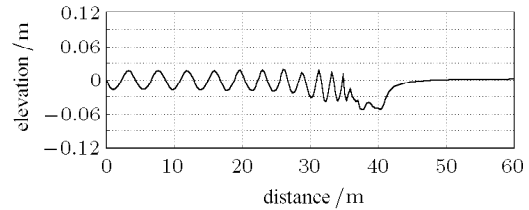
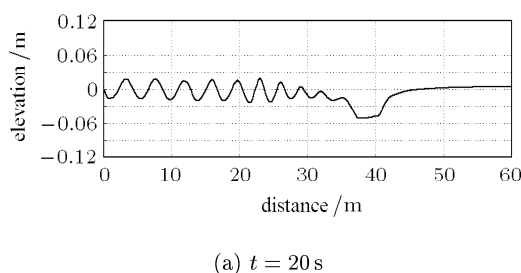
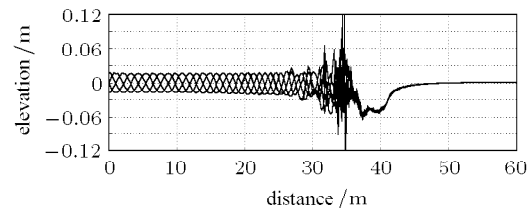
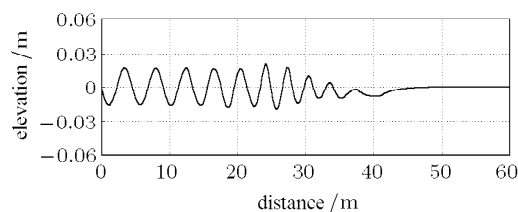
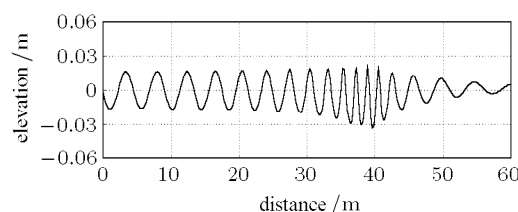
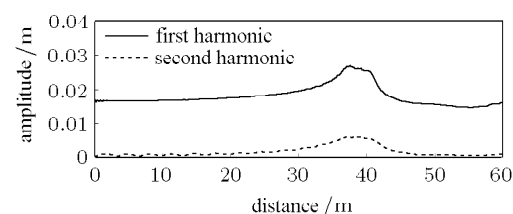
图 7 波流逆向情况下不同时刻波面沿程变化
(流量为 $-0.136\text{ m}^2/\text{s}$)Fig.7 Spatial variation of surface elevation with opposing current at different moments with a discharge of $-0.136\text{ m}^2/\text{s}$ 

图 8 波浪阻塞一个周期内波面沿程变化

Fig.8 Spatial variation of surface elevation within a period when wave blocking occurring

能继续向前传播, 产生波浪阻塞现象. 从图 7 中可明显看出, 当 $t = 40\text{ s}$ 时波浪已发生阻塞现象.

下面我们考虑另一种计算情况, 即保持入射波参数不变, 减小逆向水流流速. 流量设为 $-0.08\text{ m}^2/\text{s}$, 在平底处水平流速为 -0.10 m/s , Froude 数为 -0.036 . 由非线性长波理论计算可得: 堤顶处水面跌落为 -0.0084 m , 流速为 -0.417 m/s , 最大 Froude 数为 -0.31 . 根据 Stokes 理论, 流量为 $-0.08\text{ m}^2/\text{s}$ 的水流中, 在堤顶处产生波浪阻塞现象的临界波周期为 1.08 s . 因此, 周期为 2.0 s 的波浪可以通过堤顶继续向前传播. 图 9 为数值模拟的流量为 $-0.08\text{ m}^2/\text{s}$ 情况下, 在 $t = 20\text{ s}$, 40 s 的不同时刻波面沿程变化及一阶和二阶谐波波幅的分布, 从图 9 可看出, 波浪可以顺利地通过潜堤.

(a) $t = 20$ s(b) $t = 40$ s

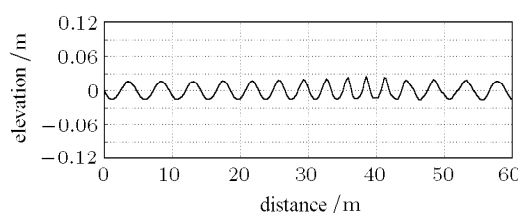
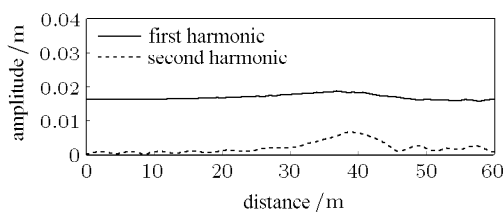
(c) 一阶和二阶谐波波幅分布

(c) Distribution of amplitudes of first and second harmonic

图 9 波流逆向情况下不同时刻波面沿程变化 (流量为 $-0.08 \text{ m}^2/\text{s}$) 及谐波波幅分布

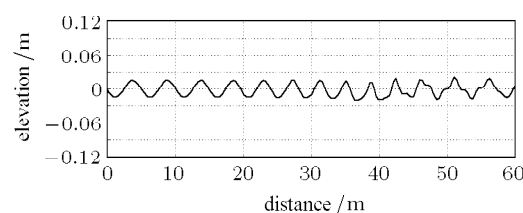
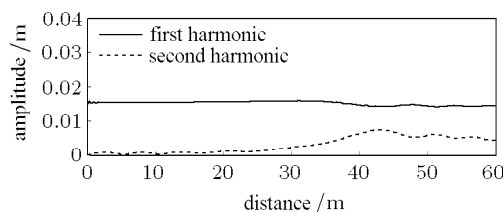
Fig.9 Spatial variation of surface elevation with opposing current at different moments with a discharge of $-0.08 \text{ m}^2/\text{s}$

图 10 为数值模拟的潜堤地形上纯波传播过程中在 $t = 40 \text{ s}$ 时波面的沿程变化及一阶和二阶谐波波幅的分布, 图 11 为数值模拟的顺流情况下, 在 $t = 40 \text{ s}$ 的波面沿程变化及一阶和二阶谐波波幅的分布. 从图 10, 图 11 可以明显看出, 在静水和顺流中波浪传播的不同: 顺流时波高减小, 不同阶次谐波之间能量交换频繁.

(a) $t = 40$ s

(b) 一阶和二阶谐波波幅分布

(b) Distribution of amplitudes of first and second harmonic

图 10 静水中 $t = 40 \text{ s}$ 时刻波面沿程变化
Fig.10 Spatial variation of surface elevation without current at $t = 40 \text{ s}$ (a) $t = 40$ s

(b) 一阶和二阶谐波波幅分布

(b) Distribution of amplitudes of first and second harmonic

图 11 波流同向情况下在 $t = 40 \text{ s}$ 时波面沿程变化
(流量为 $0.08 \text{ m}^2/\text{s}$)

Fig.11 Spatial variation of surface elevation with following current at $t = 40 \text{ s}$ with a discharge of $0.08 \text{ m}^2/\text{s}$

6 结 语

本文以包含定常水流作用的新型 Boussinesq 型方程为控制方程, 建立了非均匀水流中非线性波传播的数值模拟模型. 模型可以有效地模拟均匀水流与水深水域波浪的传播. 通过在水槽中潜堤地形上存在水流情况下波浪传播的数值模拟, 说明与纯波情况相比, 在潜堤上坡段, 顺流减小了基频波和受约束的高阶谐波的波幅; 当波浪经过堤顶时, 在顺流的作用下基频波和高频波之间进行了长时间的能量交换, 而波逆流情况则相反. 通过对强水流情况下波浪传播的数值模拟, 说明本文的数值模型可以对波流逆向情况下在堤顶附近所产生的波浪阻塞现象进行有效的数值模拟.

参 考 文 献

- 1 Longuet-Higgins MS, Stewart RW. The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. *Journal of Fluid Mechanics*, 1961, 10: 529~549
- 2 Bretherton FP, Garrett CJR. Wave trains in inhomogeneous moving media. *Proc R Soc Lond, A* 302, 1969: 529~554
- 3 Liu PL-F. Wave-current interactions on a slowly varying topography. *J Geophys Res*, 1983, 88(c7): 4421~4426
- 4 Kirby JT. A note on linear surface wave-current interactions over slowly varying topography. *Journal of Geophys Res*, 1984, 89(c1): 745~747
- 5 Hong GW. Mathematical models for combined refraction-diffraction of waves on non-uniform current and depth. *China Ocean Engineering*, 1996, 10(4): 433~454
- 6 冯卫兵. 水流中波浪绕射折射数值模拟. [博士论文]. 南京: 河海大学, 1999 (Feng Weibing. Numerical modeling of wave diffraction-refraction of arbitrary varying current and topography. [Ph D Thesis]. Nanjing: Hohai University, 1999 (in Chinese))
- 7 Zhang HS, Ding PX, Pan JJ, et al. Numerical simulation of a mathematical model for wave propagation on non-uniform current and depth. *Journal of Hydrodynamics, Ser B*, 2003, 15(2): 43~50
- 8 张洪生, 赵红军, 丁平兴等. 非均匀水流水域波浪的传播变形. 力学学报, 2006, 39(3): 325~332 (Zhang Hongsheng, Zhao Hongjun, Ding Pingxing, et al. Wave propagation on non-uniform currents and depth. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 39(3): 325~332 (in Chinese))
- 9 Peregrine DH. Long waves on a beach. *J Fluid Mech*, 1967, 27(4): 815~827
- 10 Madsen PA, Murray R, Sørensen OR. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal Engineering*, 1991, 15: 371~388
- 11 Madsen PA, Sørensen OR. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2: A slowly-varying bathymetry. *Coastal Engineering*, 1992, 18: 183~204
- 12 Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE*, 1993, 119(6): 618~638
- 13 Hong GW. Higher-order models of nonlinear and dispersive wave in water of varying depth with arbitrary sloping bottom. *China Ocean Engineering*, 1997, 11(3): 243~260
- 14 Schäffer HA, Madsen PA. Further enhancements of Boussinesq-type equations. *Coastal Engineering*, 1995, 26: 1~14
- 15 Wei G, Kirby JT, Grilli ST, et al. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. *J Fluid Mech*, 1995, 294: 71~92
- 16 Gobbi MF, Kirby JT. Wave evolution over submerged sills: tests of a high-order Boussinesq model. *Coastal Engineering*, 1999, 37: 57~96
- 17 Yoon SB, Liu PL-F. Interactions of currents and weakly nonlinear water waves in shallow water. *Journal of Fluid Mechanics*, 1989, 205: 397~419
- 18 Ren XG, Wang KH, Jin KR. A Boussinesq model for simulation wave and current interaction. *Ocean Engineering*, 1997, 24(4): 335~350
- 19 Chen Q, Madsen PA, Schäffer HA, et al. Wave-current interaction based on an enhanced Boussinesq approach. *Coastal Engineering*, 1998, 33: 11~39
- 20 李玉成, 张永刚. 应用 Boussinesq 方程对非线性波与流相互作用的理论研究. 水动力学研究与进展, A 辑, 1996, 11(2): 205~211 (Li Yucheng, Zhang Yonggang. A study of nonlinear interaction of wave-current with Boussinesq equation. *J of Hydrodynamics, Ser. A*, 1996, 11(2): 205~211 (in Chinese))
- 21 Agnon Y, Madsen PA, Schäffer HA. A new approach to high-order boussinesq models. *J Fluid Mech*, 1999, 399: 319~333
- 22 Wang YL, Zhang HS, Miao GP, et al. A new approach to high-order Boussinesq-type equations with ambient currents. *China Ocean Engineering*, 2005, 19 (1): 49~60
- 23 张洪生, 冯文静, 王亚玲等. 非线性波传播的新型数值模拟模型及其实验验证. 海洋学报, 2007, 29 (4): 137~147 (Zhang Hongsheng, Feng Wenjing, Wang Yaling, et al. A new approach to numerical simulation of nonlinear wave propagation and its experimental verification. *Acta Oceanologica Sinica*, 2007, 29 (4): 137~147 (in Chinese))
- 24 王亚玲. 近岸水域水流中非线性波传播的数值模拟. [博士论文]. 上海: 上海交通大学, 2005 (Wang Yaling. Numerical simulation of nonlinear wave propagation on currents in the nearshore waters. [Ph D Thesis]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2005 (in Chinese))
- 25 Larsen J, Dancy H. Open boundaries in short wave simulations—a new approach. *Coastal Engineering*, 1983., 7: 285~297
- 26 Sommerfeld A. Partial Differential Equation, Lectures in Theoretical Physics, 6, Academic Press, 1949
- 27 Luth HR, Klopman R, Kitou N. Kinematics of waves breaking partially on an offshore bar; LDV measurements of waves with and without a net onshore current. Report H-1573, Delft Hydraulics, 1994. 40

NUMERICAL SIMULATION OF NONLINEAR WAVE PROPAGATION IN NON-UNIFORM CURRENT¹⁾

Wang Yaling^{*,†} Zhang Hongsheng^{†,2)}

^{*}(College of Transport and Communications, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135, China)

[†](School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract A numerical model is developed with a new type of Boussinesq equations with explicit consideration of currents employed as the governing equations. In the model, the seven-point finite-difference scheme is used to discretize the spatial derivatives, the fifth-order Runge-Kutta-England scheme is employed to perform the time integrations, and the appropriate outflow boundary condition is adopted. Numerical modeling of wave propagation is performed with uniform currents and depth, and submerged bars with weak or strong currents in a wave flume. The calculation results show that the numerical model can effectively reflect the effects of currents on waves.

Key words numerical simulation, a new type of Boussinesq equations, non-uniform currents, nonlinear wave, wave blocking

Received 28 August 2006, revised 15 August 2007.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (40676053, 40106008), the Research Special Foundation of Shanghai Collegiate Selection and Training Excellent Youth Teachers in 2005 (032711), and the Key Discipline Construction of Transport Planning and Management of Shanghai Maritime University.

2) E-mail: hhszhang@sjtu.edu.cn