

先驱膜的连续流体动力学模型¹⁾

罗雄平²⁾

(宁波大学工学院, 宁波 315211)

摘要 研究具有先驱膜的流体团扩散的模型. 流体团和先驱膜作为一个整体用与组分序参数耦合的 Navier-Stokes 方程, CHW(Cahn, Hilliard, van der Waals) 方程和 GNBC(广义 Navier 边界条件) 进行数值模拟和分析. 流体团在 VW(van der Waals) 分子长程力和表面张力以及黏性力的共同作用下开始扩散, 纳米尺度厚的先驱膜在 VW 力达到一定值时缓慢生成, 它的长时间演变的剖面形状表现为与理论结果一致的 $1/x$ 次律. 膜的前沿——接触线随时间演变具有幂次律, 这种对时间的依赖关系也在实验结果 (Leger, 1984) 中得出. 分界面的相对拉伸对时间也具有幂次相似律, 但幂次指数比前者要稍微大一点.

关键词 先驱膜, 广义 Navier 边界条件, 润湿, CHW 方程, VW 分子长程力

中图分类号: O363 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)04-0455-05

引 言

润湿是指在固体表面上的液体是怎样扩展的这种物理现象. 它与许多的工业领域有关, 也在生命科学中扮演了重要角色. 当扩散参数, 即干、湿表面的表面能之差, $S > 0$ 时出现全浸润, 液体充分地扩散来降低它的表面能. 在毛细管力和 VW 分子力的竞争下, 产生了纳米尺度厚的膜^[1].

由于膜的数学描述的复杂性, 它的静态特征^[1]和动态演变^[2]的描述都用润滑理论来近似. 近年来, 广义的 Navier 边界条件 (GNBC) 的发现^[3], 才有了合理地整体计算液体团和先驱膜的可能. 因为当将单相流体与固壁接触时的无滑移边界条件用到二相或多相流时, 这个条件与固体表面上的移动接触线相耦合导致了黏性能量耗散的发散. GNBC 很好地解决了这个难题. 文献 [3] 用这个边界条件做的连续计算与分子动力学的结果符合得很好, 以此证明了 GNBC 边界条件的正确性. GNBC 是指流体和固体壁之间的速度滑移与全部的剪切应力——黏性应力和未补偿的杨氏应力成正比. 其中未补偿的杨氏应力是由于动态情况下的流 / 流分界面相对于静态情况的偏移所造成的. 本文同时考虑扩散分界面模型 (定义一个由序参数变化的长度尺度刻画的分界面厚度) 建立的 CHW 方程和与序参数相耦合

的 Navier-Stokes 方程, 再在固体壁面运用 GNBC, 以此来研究流体团的扩散和先驱膜的生成和演变.

用原变量的 Navier-Stokes 方程求解本问题, 由于在壁面附近流动变化剧烈, 要得到正确的压强需要非常细密的网格. 而这导致计算所需要的时间步非常小. 于是采用涡量-流函数方程来表达, 以避免压强的求解.

本文在第 1 部分描述了连续流体动力学模型. 第 2 和第 3 部分分别给出了流体团和先驱膜的数值模型以及模拟结果. 最后给出了结论和讨论.

1 连续流体动力学模型

假设一个非均匀组成 ϕ 的各相同性系统的自由能依赖于当地组成和周围环境的组成^[3,4], 则体积为 V , 表面积为 S 的流体的自由能可表示为

$$F = \int \left[f_0(\phi) + \frac{1}{2} K (\nabla \phi)^2 \right] dV + \int \gamma_{wf}(\phi) dS \quad (1)$$

式中 $f_0(\phi)$ 是均匀系统的每单位体积的自由能, 模化为 $f_0(\phi) = -\frac{1}{2} r \phi^2 + \frac{1}{4} u \phi^4$. K 是梯度能量系数, γ_{wf} 是流固交界面单位面积上的分界面自由能. 在 $\gamma_{wf}(\phi_-)$ 到 $\gamma_{wf}(\phi_+)$ 之间光滑插值 $\gamma_{wf}(\phi)$ 得到

$$\gamma_{wf} = (\gamma_{wf}(\phi_+) - \gamma_{wf}(\phi_-)) / 2 \sin(\pi \phi / 2)$$

2006-09-13 收到第 1 稿, 2007-04-15 收到修改稿.

1) 香港研究资助理事会竞争研究资助拨款 (CERG604803), 香港研究资助理事会中央拨款 (CA05/06.SC01) 和裘槎基金 (Z0138) 部分资助项目.

2) E-mail: lohone5@yahoo.com.cn

根据杨氏方程, 得到分界面两边的流固分界面表面张力的差为流固分界面的表面张力在流固分界面上的投影, $\gamma_{wf}(\phi_+) - \gamma_{wf}(\phi_-) = -\gamma \cos(\theta_s)$, θ_s 为静态平衡接触角.

对自由能函数 F 做变分, 得到

$$\delta F = -N_V \int [\mu \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}] dV - \int [(K \partial_n \phi + \partial \gamma_{wf} / \partial \phi) \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}] dS \quad (2)$$

这里 μ 为化学势, $\mu = -K \nabla^2 \phi - r \phi + u \phi^3$. 所以动量方程变为

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^\nu + \mu \nabla \phi + \mathbf{F}_v \quad (3)$$

这里 ρ 是流体的质量密度, p 是压力, μ 是化学势, $\mathbf{F}_v$ 为 VW 力. $\mu \nabla \phi$ 是毛细管力密度, 即扩散分界面力密度. $\boldsymbol{\sigma}^\nu$ 为黏性应力 $\boldsymbol{\sigma}^\nu = \eta [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$.

根据 GNBC^[3], 液固边界的相对滑移正比于作用于三相线的每单位面积上的剪切力, 这个剪切力包括黏性切向应力与未补偿的杨氏应力 $\sigma_{n\tau}^Y$, 则表示为

$$\beta(\phi) v_\tau^{\text{slip}} = -(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\nu \cdot \boldsymbol{\tau} + \sigma_{n\tau}^Y) \quad (4)$$

其中 $\beta(\phi)$ 是滑移系数, η 为黏性系数. 未补偿杨氏应力为

$$\sigma_{n\tau}^Y = (-K \partial_n \phi - \partial \gamma_{wf} / \partial \phi) \partial_\tau \phi$$

所以 GNBC 为

$$\beta(\phi) v_\tau^{\text{slip}} = -\eta (\partial_n v_\tau + \partial_\tau v_n) + (K \partial_n \phi + \partial \gamma_{wf} / \partial \phi) \partial_\tau \phi \quad (5)$$

速度的另一个边界条件是在边界的法方向不可渗透条件, 即 $v_n = 0$.

利用将分界面扩散通量正比于化学势梯度的方法, 可将 van der Waals 的假设发展到与时间相关的情况^[5], 于是组分 ϕ 的方程成为 CHW 方程

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = M \nabla^2 \mu \quad (6)$$

其中 M 是现象迁移系数. 在液固边界由自然边界条件给出

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_\tau \partial_\tau \phi = \Gamma (-K \partial_n \phi - \partial \gamma_{wf} / \partial \phi) \quad (7)$$

这里 τ 表示固体表面的切向方向, n 表示垂直于表面的法向方向, Γ 为正的现象参数. 另外假设在边界上无通量, 即 $\partial_n \mu = 0$.

2 数值模型

2.1 无量纲方程

将方程 (7) 无量纲化, 即

$$\left. \begin{aligned} x_i^* &= x_i / \xi, \quad v_i^* = v_i / V^*, \quad t^* = t / (\xi / V^*) \\ p^* &= p / (\eta V^* / \xi), \quad \phi^* = \phi / \phi_{\text{ref}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 ξ 为分界面厚度, 设为 $\xi = \sqrt{K/r}$. V^* 为参考速度, ϕ_{ref} 为均匀平衡相时的 ϕ 值 $|\phi_{\text{ref}}| = \sqrt{r/u}$.

在无量纲形式下, 连续方程, 动量方程和组分方程以及边界条件 (为书写简便, 省略星号) 为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \text{Re} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} + B \mu \nabla \phi + \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi &= L_d \nabla^2 \mu \\ \mu &= -\nabla^2 \phi - \phi + \phi^3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} L_s^{-1} v_\tau^{\text{slip}} &= -(\partial_n v_\tau + \partial_\tau v_n) + \\ &B \left(\partial_n \phi - \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \cos \theta_s \cos \left(\frac{\pi \phi}{2} \right) \right) \partial_\tau \phi \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_\tau \partial_\tau \phi &= \\ &-\nu_s \left(\partial_n \phi - \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \cos(\theta_s) \cos \left(\frac{\pi \phi}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $L_d = Mr/V^* \xi$ 是扩散长度 Mr/V^* 与 ξ 的比; $R = \rho V^* \xi / \eta$; $B = r^2 \xi / u \eta V^* = 3\gamma / 2\sqrt{2} \eta V^*$, 与毛细管数 $Ca = \eta V^* / \gamma$ 的倒数成正比; $\nu_s = K \Gamma / V$ 和 $L_s(\phi) = \eta / \beta(\phi) \xi$, 这是滑移长度 $l_s(\phi) = \eta / \beta(\phi)$ 与 ξ 的比率. 数值计算中运用表中的参数, 表 1 中所有的单位按照 Lennard-Jones 正规化单位, ε 和 σ 是流体分子的 Lennard-Jones 势的能量和长度尺度, m 是流体分子质量. 这些参数是在文献 [3] 中的分子动力学模拟中得到的.

表 1 从分子动力学模拟中得到并用到连续流体动力学计算的参数值^[3]

Table 1 Parameter values determined from MD simulations and used in continuum hydrodynamic calculations

$\rho = 0.81m/\sigma^3$, $ \phi_{\text{ref}} = 1$	$\eta = 1.95\sqrt{m\varepsilon}/\sigma^2$
$\xi = 0.3\sigma$, $V^* = 0.25\sqrt{\varepsilon/m}$	$\gamma = 5.5\varepsilon/\sigma^2$
$M = 0.023$, $\sigma^4/\sqrt{m\varepsilon}$	$\Gamma = 0.66\sigma/\sqrt{m\varepsilon}$

将方程组 (9) 用涡量流函数 ω - ψ 的形式表示, 得到

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega\right) &= \Delta \omega + B\left(\mu_x \phi_y - \mu_y \phi_x\right) - \frac{A}{4\pi(y_d + b)^4} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \Delta \psi &= -\omega, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = L_d \nabla^2 \mu \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

2.2 数值模型

运用方程组 (13), 计算了平面渠道流中流体团的扩散和先驱膜的生成和演变. 计算是在 $l_x \times l_y = 1200 \times 124$ 区域中进行的, 运用 $n_x \times n_y = 1024 \times 256$ 个网格, 时间步长 $dt = 0.001$. 假设水平方向是周期的, 在竖直方向的流函数和涡量的数值边界条件为, 对于 $i = 1, \dots, n_x$

$$\psi_{i,1} = \psi_{i,n_y} = 0 \quad (14)$$

$$\omega_{i,1} = -2(\psi_{i,2} - u_{i,1} dy)/(dy)^2 \quad (15)$$

$$\omega_{i,n_y} = -2(\psi_{i,n_y-1} + u_{i,n_y} dy)/(dy)^2 \quad (16)$$

其中, 1 表示下面的平板, n_y 表示上面平板上的点.

流动初始状态是组分变量值 $\phi = 1$ 的流体置于渠道中间, 左右是 $\phi = -1$ 的流体. 组分 ϕ 的初始条件 $\phi = \tanh[(x - 0.4l_x)/\sqrt{2}] + \tanh[-(x - 0.6l_x)/\sqrt{2}] - 1$. 计算所用的静态接触角 $\theta_s = \frac{\pi}{2}$. 时间上用四阶精度的龙格-库塔方法推进, 空间上用二阶精度的中心差分格式离散空间导数.

因为不同种的流体所受 VW 力也不同, 于是将此力模化为 $\mathbf{F} = \left(0, -\frac{A}{2\pi(y_d + b)^4} f(\phi), 0\right)$, 这里 A 是无量纲 Hamaker 常数, y_d 表示与壁面的垂直距离, b 是模拟的壁面与真实固壁面之间的距离, 负号表示力为吸引力, 方向与 y 坐标轴相反. 并将 $f(\phi)$ 模化为 $\frac{\phi + 1}{2}$, 这是表示 $\phi = 1$ 的流体受 VW 力的作用, 而 $\phi = -1$ 的流体不受 VW 力的作用.

下面对于 Hamaker 常数 A 和 VW 力的另一个参数 b 作一个分析. 考虑置于一种流体 A 的另一种流体团 B 在固体表面上静止时的情况, 它受到表面张力和 VW 力的作用 (当重力可忽略时), 其自由能为

$$E_V = \int [(\gamma_{SB} + \gamma \cos \theta - \gamma_{SA}) + P(y)] dx$$

其中 γ_{SB} , γ_{SA} 和 γ 分别为固体和流体 B , 固体和流体 A 与流体 A 和 B 之间的表面张力, $P(y)$ 为单位壁

面积的 VW 能量. 最小化自由能得到平衡中的分界面剖面为 $\gamma \kappa + W + \lambda = 0$. 其中 $\kappa = -\frac{y'''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ 为剖面曲率, $W = \frac{dP}{dy} = -\frac{A}{6\pi(y + b)^3}$ 为 VW 能量密度, 这里 $A = 6\pi\gamma a^2$. 给定物理边界条件 $\kappa_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, 于是 $\lambda = 0$. 积分界面剖面方程给出

$$\int [\gamma \kappa + W] dy = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{A}{12\pi(y + b)^2} + C = 0$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{a^2}{2(y + b)^2} = -\frac{C}{\gamma}$$

因为右端项是常数, 则

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{a^2}{2(y + b)^2}\right)\bigg|_{y=0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{a^2}{2(y + b)^2}\right)\bigg|_{y \rightarrow \infty}$$

即 $\cos \theta_s + \frac{a^2}{2b^2} = \cos \theta_e$. 这里 θ_e 为宏观平衡接触角, 当 $\theta_s = \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos \theta_e = \frac{a^2}{2b^2}$. 在本算例取值为 $A = 800\pi$, $b = 1.5$. 由此得到这里的 $\cos \theta_e = 2.6262$. 这说明在这种情况下宏观平衡位置不存在, 流体团将继续变形扩散来降低它的表面能, 先驱膜因此而产生. 将扩散系数 $S = \gamma_{SO} - (\gamma_{SL} + \gamma)$ 和 Young's 关系 $\gamma \cos \theta_e = \gamma_{SO} - \gamma_{SL}$ 联立起来, 于是得到 $S = \gamma(\cos \theta_e - 1)$. 根据文献 [1] 的分析, 在 $S \gg \gamma \theta_a^2$ 时, 其中 θ_a 为表观接触角, 最大的膜才会产生. 这里 $S = 1.6262\gamma$, 其剖面接近于最大膜分布.

3 模拟结果和分析

黏性流体在 VW 力, 毛细管力等的作用下, 当 $t = 1600$ 时的组分等值线图如图 1 所示. 图中所示是整个流场的左边部分. 因为整个流场是对称的, 所以只取一半来表示.

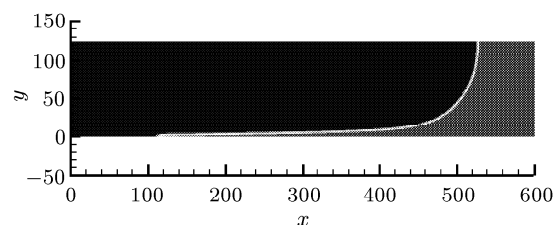


图 1 在 $t = 1600$ 时的矩形渠道中两种流体分界面的等值线 (包括流体团和先驱膜)

Fig.1 Contour of interface of two fluids in rectangular channel at $t = 1600$ (including bulk of fluid and precursor film)

用润滑理论推导得膜剖面方程 (1) 为

$$\frac{3\eta U}{\varsigma^2} = \frac{d}{dx} \left[-\gamma \frac{d^2\varsigma}{dx^2} + W(\varsigma) \right]$$

这里 ς 为膜厚度, η 为黏性系数, γ 为表面张力, $W(\varsigma)$ 为 VW 能, U 是接触线速度. 对于这个膜剖面方程的求解, 必须给定 3 个边界条件, 这些边界条件给定为内外区偏转点的膜厚度的函数值, 一阶和二阶导数值, 这些边界条件的给定需考虑具体的物理条件, 例如以置于空气中的液滴在固体表面的扩散为例, 数值求解得到膜剖面^[6,7], 由于计算模型的不同, 这个膜剖面与计算得到的剖面是有差异的. 但是, 最大膜剖面却与计算结果一致. 上面的膜剖面方程在远离宏观边缘, 曲率项可略去^[1,8]时, 可直接得到无量纲化的最大膜剖面

$$y = a^2 / [\varpi(x_0 - x)] \quad (17)$$

这里 $a = [A/(6\pi\gamma)]^{1/2}$ 具有分子尺度的数量级. $\varpi = \eta U / \gamma$ 为毛细管数. 本算例中先驱膜的剖面与下面的剖面相接近 (图 2)

$$y = 10^{3.105} / (529.5 - x) \quad (18)$$

而 $a = 3.438$, $\varpi = 0.0886U/V^*$, 若式 (17) 和式 (18) 相等, 则得到 $x_0 = 529.5$, $a^2/\varpi = 10^{3.105}$, 继而得到 $U = 0.1047V^*$.

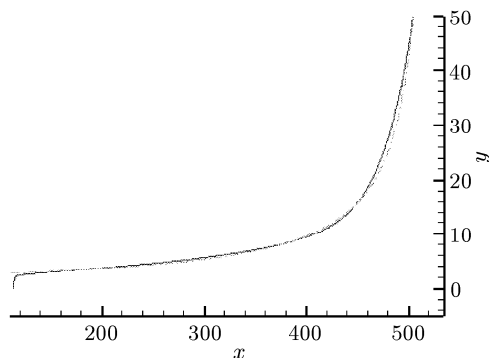


图 2 在先驱膜向宏观流体团的过渡中截断的先驱膜剖面 (实线). 点划线表示剖面 $y = 10^{3.105} / (529.5 - x)$

Fig.2 Precursor film profile cut at the transition towards the macroscopic drop (solid line). The dash-dot line is the profile

$$y = 10^{3.105} / (529.5 - x)$$

图 3 表示了分界面的随时间演变过程. 从左到右分界面所处的时间依次是 $t = 1, 50, 100, \dots, 1600$. 可以看到随着膜前沿的左移, $\phi = 1$ 的液体的条带慢慢变窄, 这是由于总的液体的体积是不变的. 从这里也可以看到前沿的爬行速度由快变慢, 然后趋于

稳定. 这种前沿的速度变化的细节可以从图 4 看出来. 前沿位移随时间的变化可以用 $x_f = Kt^{0.26331}$, 这里 $K = 69.78$ 来近似. 由此得到前沿的速度 $V_f = 0.08$. 前沿速度的幂次律在置于空气中的聚硅酮油滴在玻璃上扩散的实验结果中也发现了^[7]. 不过计算结果的幂指数是 0.26331. 文献 [7] 中的幂指数为 0.08~0.134. 这种量上的差异与我们所选的系统与参数有很大关系. 在以后的研究中将考虑这种差异, 使之能与实验结果在量上相互比较.

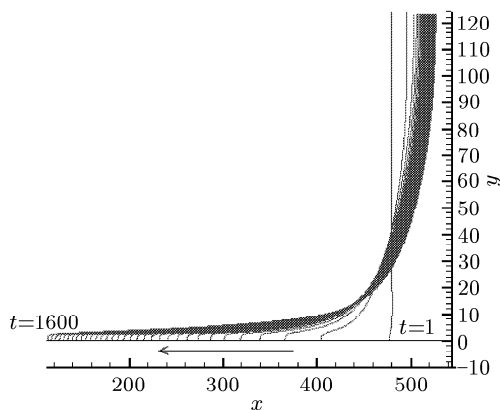


图 3 分界面形状的时间演变. 在图上显示的线的时间间隔为 $\Delta t = 50$. 第 1 条线是在 $t = 1$, 最后 1 条是在 $t = 1600$

Fig.3 Time evolution of the shape of interface. Time interval between the lines shown is $\Delta t = 50$. The first line is at $t = 1$, and the last line is at $t = 1600$

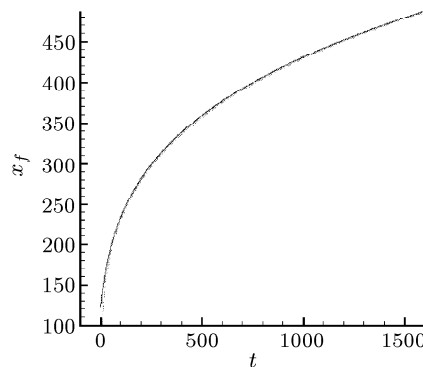


图 4 先驱膜的前沿位置 x_f (实线) 随时间的变化. 拟合的线 (点划线) 是 $x_f \approx Kt^{0.26331}$, $K = 69.78$

Fig.4 Variation of the front position x_f of a precursor film (solid line) with time. The fitted line (dash-dot) is

$$x_f \approx Kt^{0.26331}, \text{ where } K = 69.78$$

图 5 表示了一半的分界面周长相对于 $t = 1$ 时周长的拉伸随时间的变化过程. 分界面的周长是经过插值得到 $\phi = 0$ 的点, 再将由这些点组成的直线的长度相加得到. 发现这条线与 $S(t)/S(1) \approx Kt^{0.29194}$ 相接近, 这里 $K = 0.448198$.

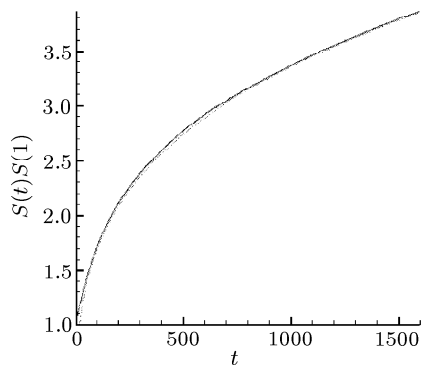


图 5 分界面拉伸 $S(t)/S(t=1)$ 相对于无量纲时间的函数. 拟合的线(点划线)是 $S(t)/S(1) \approx Kt^{0.29194}$, $K = 0.448198$

Fig.5 Interfacial stretch $S(t)/S(t=1)$ as a function of non-dimensional time. The fitted line(dash dot) is $S(t)/S(1) \approx Kt^{0.29194}$, where $K = 0.448198$

4 结 论

用连续介质模型整体研究了流体团的扩散和先驱膜的生成和演变. 在这里, CHW 方程和与序参数耦合的 Navier-Stokes 方程以及 GNBC 来描述在完全浸润情况下的固体壁面上流体团的扩散. 在模拟结果中, 重现了长时间演变后的先驱膜的 $1/x^{[1]}$ 规律. 发现流面的前沿位置对于时间也具有幂次律, 这在一些实验中^[8]也得到了证明. 此外, 还发现分

界面的拉伸也有自相似律. 在模型中, 两种流体的密度和黏性是一样的. 但是一般来说, 它们都是组分标量的函数. 将研究拓宽到这种情况是今后要研究的课题.

致谢 作者感谢香港科技大学物理系沈平教授和数学系王筱平教授, 钱铁铮教授的有益的讨论.

参 考 文 献

- 1 de Gennes PG. Wetting: Static and dynamics. *Rev Modern Phys*, 1985, 57(3): 827~863
- 2 Oron A, Davis SH, Bankoff SG. Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev Modern Phys*, 1997, 69(3): 931~980
- 3 Qian TZ, Wang XP, Sheng P. Molecular scale contact line hydrodynamics of immiscible flows. *Phys Rev E*, 2003, 68: 016306-1-15
- 4 Cahn JW, Hilliard JE. Free energy of a nonuniform system. I. interfacial free energy, *J Chem Phys*, 1958, 28(2): 258~267
- 5 Jacqmin D. Contact-line dynamics of a diffuse fluid interface. *J Fluid Mech*, 2000, 402: 57~88
- 6 Hervet H, de Gennes PG. The dynamics of wetting: Precursor films in the wetting of "dry" solid. *C R Acad Sci Paris, Ser 2*, 1984, 299: 499~503
- 7 Chebbi R. Dynamics of wetting. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2000, 229 (1): 155~164
- 8 Leger L, Erman M, Guinet-Picard AM, et al. Precursor film profiles of spreading liquid drops. *Phys Rev Lett*, 1988, 60(23): 2390~2393

CONTINUUM HYDRODYNAMIC MODEL OF A PRECURSOR FILM¹⁾

Luo Xiongping²⁾

(School of Engineering, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract This paper studies a model for a fluid lump spreading with a precursor film. In the description, the fluid lump and the precursor film are calculated as a whole using order parameter coupled Navier-Stokes equations, CHW (Cahn, Hilliard and van der Waales) equation and GNBC (Generalized Navier boundary condition). The fluid lump spreads under the actions of certain long-range force -VW (van der Waals) intermolecular long-range force, surface tension and viscous force. A film of nanoscopic thickness emerges as VW force reaches a certain value. The profile of the film after spreading a long time approaches to $1/x$ power law, which agrees well with the theoretical results of Ref.[1]. The frontal position of the film is found to has a power-law dependence on time, which is also shown in the results of some experiments^[6]. The interfacial stretching has a power-law dependence on time as well. The exponent of the later is a little bigger than that of the former.

Key words precursor film, generalized Navier boundary condition, wetting, CHW equation, VW intermolecular long-range force

Received 13 September 2006, revised 15 April 2007.

1) The project was partially supported by the Hong Kong Competitive Earmarked Research Grant (CERG 604803), the RGC Central Allocation Grant (CA05/06.SC01) and the Croucher Foundation (Z0138).

2) E-mail: lohone5@yahoo.com.cn