

广义对流扩散方程的隐式特征线混合元方法¹⁾

武文华²⁾ 李锡夔

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 提出了一个广义对流扩散方程的混合有限元方法, 方程的基本变量及其空间梯度和流量在单元内均作为独立变量分别插值. 基于胡海昌 -Washizu 三变量广义变分原理结合特征线法给出了控制方程的单元弱形式. 混合元方法采用基于一点积分方案并结合可以滤掉虚假的数值震荡的隐式特征线法. 数值结果证明了所提出的方法可以提供和四点积分同样的数值计算结果, 并能够提高计算效率.

关键词 广义对流 - 扩散方程, 混合元, 一点积分, 隐式特征线算法

中图分类号: O241.81 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)04-0473-06

引 言

对流扩散方程数值求解的主要困难在于对流项引起的方程非自伴随特征, 导致对流扩散控制方程应用标准 Galerkin 离散过程求解将导致数值求解结果在空间域的虚假振荡. 这种虚假数值振荡现象在对流占优或网格粗糙时尤为明显.

为提高在大时间步长条件下求解对流扩散方程的精度和稳定性, 许多研究工作者^[1,2]多年来作出了不断的努力, 发展了多种方法以克服利用标准 Galerkin 法离散对流扩散方程而导致的数值振荡和不准确性. 特征线法的提出对对流扩散方程的有限元求解给予了很大的促进.

2000 年, 基于 Zienkiewicz 提出的特征线法的基础上, 结合精细积分和针对流相物质粒子的 Lagrangian 框架下的传统数值时域中积分方法, 作者发展了一个无条件稳定的隐式特征线 Galerkin 法. 但有限元法和有限差分法相比的一个典型缺点是其计算效率低. 例如和四点平面等参元相比, 2×2 的求积分方案比 5 点或 9 点差分公式效率上慢很多^[3]. 而且, 对流扩散方程的双线性插值意味着基本变量梯度为常数, 因此无法在一个单元内部模拟源 / 汇行为. 另外, 自适应性算法要求在大规模科学计算过程中单元需要满足低阶高精度.

基于一一点积分混合元在固体力学和多孔介质热 - 湿 - 力学^[4]分析中得到了成功应用, 但是对

于广义对流扩散方程, 由于其存在非自伴随算子的影响, 不存在传统意义上的变分, 因此无法表示成“能量”形式的三变量变分形式.

本文针对对流 - 扩散方程发展了一个基于一一点稳定积分的混合元方法. 所提出的混合元方法具有如下特征:

(1) 把广义对流 - 扩散方程表示成特征线法所需要的 Euler-Lagrange 表述形式; 单元公式可由固体力学中广义胡海昌 -Washizu 三变量变分原理表示.

(2) 采用隐式特征线 Galerkin 法, 可以滤掉标准有限元求解过程中虚假的数值震荡.

(3) 本文为模拟多孔多相介质中污染物输运过程前期研究工作, 之后将和所提出的热 - 湿 - 力学 (THM) 一点积分混合元方法^[4]相结合, 进一步完成含污染物输运过程的 THMC 混合元公式.

1 控制方程及变分 (弱) 形式

表征典型传导过程的广义对流扩散方程可表示成如下以标量 ϕ 为基本变量的形式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + A \phi + Q = 0 \quad (1)$$

其中 u 和 k 分别为对流速度和扩散系数, 系数 A 表示 $\partial u / \partial x$ 或其它因素对 ϕ 的影响, Q 是源项.

由于非自伴随算子的影响, 方程 (1) 无法写成描述为“能量”形式的变分原理表达式. 因此首先对

2006-06-13 收到第 1 稿, 2007-01-15 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10302005, 10590354, 10672033).

2) E-mail: lxyuhua@dlut.edu.cn

方程 (1) 进行处理, 把左侧前两项 (对流项) 合并写成物质导数的形式.

$$\frac{D\phi}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + A\phi + Q = 0 \quad (2)$$

其中

$$\frac{D(*)}{Dt} = \frac{\partial(*)}{\partial t} + \nabla(*) \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

遵循固体力学中胡海昌 -Washizu 广义变分原理, 方程 (2) 可以写成如下的三变量变分广义“能量”形式

$$\delta \Pi = \int_{A_e} [\delta \mathbf{q}_\phi^T (\mathbf{g}_\phi - \nabla \phi) + \delta \mathbf{g}_\phi^T (\mathbf{q}_\phi + (\mathbf{k}_\phi \mathbf{g}_\phi))] dA_e + \int_{A_e} \delta \phi^T \left(\frac{D\phi}{Dt} - \nabla(\mathbf{k}_\phi \mathbf{g}_\phi) + A\phi + Q \right) dA_e \quad (4)$$

其中 $\nabla \phi^T = [\phi_{,x} \ \phi_{,y}]$ 为基本变量的空间梯度; 同时, 基本变量 ϕ 的空间梯度 $\nabla \phi$ 同时定义为 $\mathbf{g}_\phi^T = [g_{\phi,x} \ g_{\phi,y}]$; 流量 $\mathbf{q}_\phi^T = [q_{\phi,x} \ q_{\phi,y}]$. $\mathbf{k}_\phi$ 是扩散矩阵, 对于各向同性情况, $k_x = k_y = k$, 且 $\mathbf{k}_\phi = kl$.

需要指出的是 $\phi, \mathbf{g}_\phi, \mathbf{q}_\phi$ 均处理为独立变量, 三类变量在面积为 A_e 的单元内独立插值.

2 一点积分的混合有限元公式

基本变量 ϕ 在四边形单元内的近似插值假定为

$$\phi = \mathbf{N}^T \bar{\phi} \quad (5)$$

其中 $\bar{\phi}$ 是变量 ϕ 的有限元节点值, 形函数 $\mathbf{N}$ 定义为

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (i = 1 \sim 4) \quad (6)$$

其中, ξ, η 和 ξ_i, η_i 是单元内任意点和单元节点的等参坐标.

其基本变量 ϕ 空间梯度可由方程 (5) 表示

$$\nabla \phi = \mathbf{B}_p \bar{\phi} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{B}_p = \bar{\mathbf{B}}_p + \mathbf{h}_p \mathbf{I}_v^T \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{,x}^T \\ \mathbf{b}_{,y}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_p = \begin{bmatrix} h_{,x} \\ h_{,y} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}_{,x}^T &= \frac{1}{2A_e} [y_{24} \ y_{31} \ y_{42} \ y_{13}] \\ \mathbf{b}_{,y}^T &= \frac{1}{2A_e} [x_{42} \ x_{13} \ x_{24} \ x_{31}] \\ 2A_e &= x_{31}y_{42} + x_{24}y_{31} \\ x_{ij} &= x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

x_i, y_i 为单元的第 i -th 节点的笛卡儿坐标.

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{A_e}{4} \xi \eta, \quad h_{,x} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad h_{,y} = \frac{\partial h}{\partial y} \\ \mathbf{I}_v &= [\mathbf{h} - (\mathbf{h}^T \mathbf{x}_j) \mathbf{b}_{,j}] / A_e, \quad \mathbf{h}^T = [1 \ -1 \ 1 \ -1] \\ \mathbf{x}_1^T &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4], \quad \mathbf{x}_2^T = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

定义

$$\mathbf{h}_\beta = \mathbf{J}^{-1}(0,0) \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \frac{J^2(0,0)}{J(\xi, \eta)} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{J}(\xi, \eta)$ 是单元内 (ξ, η) 点的 Jacobi 矩阵.

$$J(\xi, \eta) = \det(\mathbf{J}(\xi, \eta)) \quad (13)$$

定义独立于基本变量 ϕ 的空间梯度 $\mathbf{g}_\phi$ 和扩散流量 $\mathbf{q}_\phi$ 为

$$\mathbf{g}_\phi = \bar{\mathbf{g}}_\phi + \mathbf{h}_\beta \mathbf{g}_\phi^x \quad (14)$$

$$\mathbf{q}_\phi = \bar{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{h}_\beta \mathbf{q}_\phi^x \quad (15)$$

其中

$$\bar{\mathbf{g}}_\phi = [\bar{g}_{\phi,x} \ \bar{g}_{\phi,y}]^T \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_\phi = [\bar{q}_{\phi,x} \ \bar{q}_{\phi,y}]^T \quad (17)$$

为 $\mathbf{g}_\phi, \mathbf{q}_\phi$ 中常数部分, 而

$$\mathbf{g}_\phi^x = [g_{\phi,1}^x \ g_{\phi,2}^x]^T \quad (18)$$

$$\mathbf{q}_\phi^x = [q_{\phi,1}^x \ q_{\phi,2}^x]^T \quad (19)$$

为描述空间梯度和扩散流量变化的附加梯度和附加扩散流量部分.

方程 (5), (7), (14), (15) 代入方程 (4) 并在单元面积 A_e 积分, 可以得到

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \delta \bar{\mathbf{q}}_\phi^T (A_e \bar{\mathbf{g}}_\phi - A_e \bar{\mathbf{B}}_p \bar{\phi}) + \\ &\delta \mathbf{q}_\phi^x T (\mathbf{H}_{wg} \mathbf{g}_\phi^x - \mathbf{H}_{xp} \mathbf{I}_v^T \bar{\phi}) + \\ &\delta \bar{\mathbf{g}}_\phi^T A_e [\bar{\mathbf{q}}_\phi + \mathbf{k} \bar{\mathbf{g}}_\phi] + \\ &\delta \mathbf{g}_\phi^x T [\mathbf{H}_{gw} \mathbf{q}_\phi^x + \mathbf{k} \mathbf{H}_{gw} \mathbf{g}_\phi^x] + \\ &\delta \bar{\phi}^T \int_{A_e} \left[\mathbf{N} \left(\frac{D\phi}{Dt} + A\phi + Q \right) - \mathbf{B}_p^T \mathbf{q}_\phi \right] dA_e \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{H}_{wg} = \mathbf{H}_{gw} = \int_{A_e} \mathbf{h}_\beta^T \mathbf{h}_\beta dA_e \quad (21)$$

$$\mathbf{H}_{xp} = \int_{A_e} \mathbf{h}_\beta^T \mathbf{h}_p dA_e \quad (22)$$

考虑变量 $\delta \bar{\mathbf{g}}_\phi, \delta \bar{\mathbf{q}}_\phi, \delta \mathbf{g}_\phi^x, \delta \mathbf{q}_\phi^x$ 的任意性, 可以得到如下的本构关系式

$$\bar{\mathbf{q}}_\phi = -\mathbf{k}_\phi \bar{\mathbf{g}}_\phi, \quad \bar{\mathbf{g}}_\phi = \bar{\mathbf{B}}_p \bar{\boldsymbol{\phi}} \quad (23)$$

$$\mathbf{q}_\phi^x = -\mathbf{k}_\phi \mathbf{g}_\phi^x, \quad \mathbf{g}_\phi^x = \mathbf{H}_{wg}^{-1} \mathbf{H}_{xp} \mathbf{I}_v^T \bar{\boldsymbol{\phi}} \quad (24)$$

最终方程 (20) 可以表示成

$$\delta \Pi = \delta \bar{\boldsymbol{\phi}}^T \mathbf{F}_\phi \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{F}_\phi = \int_{A_e} \left[\mathbf{N}^T \left(\frac{D\phi}{Dt} + A\phi + Q \right) - \mathbf{B}_p^T \mathbf{q}_\phi \right] dA_e \quad (26)$$

利用插值公式对式 (26) 进行空间离散, 可得到耦合问题的单元切线刚度阵、质量阵和右端项,

$$\mathbf{M}_\phi \frac{D\phi}{Dt} + \mathbf{K}_\phi \phi + \mathbf{C}_\phi \phi + \mathbf{Q}_\phi = 0 \quad (27)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_\phi &= \int_{A_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA_e \\ \mathbf{C}_\phi &= \int_{A_e} \mathbf{N}^T \mathbf{A} \mathbf{N} dA_e \\ \mathbf{Q}_\phi &= \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{Q} d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\phi &= \int_{A_e} ((\bar{\mathbf{B}}_p + \mathbf{h}_p \mathbf{I}_v^T)^T \mathbf{k}_\phi \cdot \\ &(\bar{\mathbf{B}}_p + \mathbf{h}_\beta \mathbf{H}_{wg}^{-1} \mathbf{H}_{xp} \mathbf{I}_v^T)) dA_e = \\ &\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}_{\text{stab}} \end{aligned} \quad (29)$$

$\mathbf{K}^{(1)} = A_e \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{k}_\phi \bar{\mathbf{B}}$ 是一点积分刚度阵, $\mathbf{K}_{\text{stab}} = \int_{A_e} (\mathbf{h}_p \mathbf{I}_v^T)^T \mathbf{k}_\phi (\mathbf{h}_\beta \mathbf{H}_{wg}^{-1} \mathbf{H}_{xp} \mathbf{I}_v^T)$ 是稳定矩阵.

在计算过程, $\mathbf{K}_{\text{stab}}$ 保持不变, 每个时间步只需要计算一次; $\mathbf{K}^{(1)}$ 需要在每个迭代步内更新, 因其利用一点积分, 所以计算方便, 且节约时间. 下面介绍利用特征线法求解控制方程 (27).

3 隐式特征线法

本章给出了隐式特征线法的简介, 其详细内容可参见参考文献 [1]. 方程 (27), 是一个 Euler-Lagrange 型方程, 可以采用特征线法进行求解. 对于指定时刻的特定参考粒子物质导数项 $\frac{D\phi}{Dt} \Big|_{t=t_{\text{ref}}}$, 可离散成

$$\frac{D\phi}{Dt} \Big|_{t=t_{\text{ref}}} = \frac{1}{\Delta t} [\phi(\mathbf{x}(t_{n+1}), t_{n+1}) - \phi(\mathbf{x}(t_n), t_n)] \quad (30)$$

其中 $\phi(\mathbf{x}(t_{n+1}), t_{n+1}), \phi(\mathbf{x}(t_n), t_n)$ 表示参考粒子 ϕ 在 t_{n+1} 和 t_n 时刻的值. 需要指出的是在有限元求解过程中通常不能给出 $\phi(\mathbf{x}(t_n), t_n)$, 而给出的值为 $\phi(\mathbf{x}(t_{n+1}), t_n)$.

我们通过精细积分算法发展了一个求解 $\phi(\mathbf{x}(t_n), t_n)$ 的方案. 现给出其简要介绍. 考虑在一个时间间隔 $[t_n, t_{n+1}]$ 典型的对流型方程

$$\frac{D\phi^*}{Dt} = \frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \mathbf{u}^T \nabla \phi^* = 0 \quad (31)$$

上方程可以利用有限元离散得到如下半离散表达式

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}_1^* = \mathbf{H} \bar{\boldsymbol{\phi}}_1^* + \bar{\mathbf{r}}_f \quad (32)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= -\mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{1,11} \\ \mathbf{C}_1 &= \int_{\Omega} \mathbf{N} u_j \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} d\Omega \\ \bar{\mathbf{r}}_f &= -\mathbf{M}_{11}^{-1} (\mathbf{C}_{1,12} \bar{\boldsymbol{\phi}}_2 + \mathbf{C}_{1,13} \bar{\boldsymbol{\phi}}_3 + \mathbf{M}_{13} \dot{\boldsymbol{\phi}}_3) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$\boldsymbol{\phi}^T = [\bar{\boldsymbol{\phi}}_1^T \quad \bar{\boldsymbol{\phi}}_2^T \quad \bar{\boldsymbol{\phi}}_3^T]$ 分别表示节点自由变量及其指定第 1, 第 2 边界变量.

对方程 (34), 在时间间隔 $\Delta t = [t_n, t_{n+1}]$ 内, 利用精细积分法进行求解, 得到

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\phi}}_1^*(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1}) &= \mathbf{T} \bar{\boldsymbol{\phi}}_1^*(\mathbf{x}_{n+1}, t_n) + \bar{\mathbf{R}}_f = \\ &\mathbf{T} \bar{\boldsymbol{\phi}}_1(\mathbf{x}_{n+1}, t_n) + \bar{\mathbf{R}}_f = \bar{\boldsymbol{\phi}}_1(\mathbf{x}_n, t_{n+1}) \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\mathbf{T} = \exp(\mathbf{H} \Delta t) \quad (35)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_f = (\mathbf{T} - \mathbf{I}) \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{r}}_f \quad (36)$$

对于某个参考粒子, 方程 (27) 的第 1 项可以利用方程 (30) 进行离散, 而其它项可以以相似的形式离散为

$$A\phi = \gamma[A\phi](\mathbf{x}(t_{n+1}), t_{n+1}) + (1 - \gamma)[A\phi](\mathbf{x}(t_n), t_n) \quad (37)$$

$$Q = \gamma Q(\mathbf{x}(t_{n+1}), t_{n+1}) + (1 - \gamma)Q(\mathbf{x}(t_n), t_n) \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{k}_\phi \mathbf{g}_\phi) &= \gamma(\nabla \cdot (\mathbf{k}_\phi \mathbf{g}_\phi))(\mathbf{x}(t_{n+1}), t_{n+1}) + \\ &(1 - \gamma)(\nabla \cdot (\mathbf{k}_\phi \mathbf{g}_\phi))(\mathbf{x}(t_n), t_n) \end{aligned} \quad (39)$$

其中 $\gamma \in [0, 1]$, 如果采用 $\gamma = 0.5$ 可以得到 Crank-Nicolson 形式, 而 $\gamma = 1.0$ 对应向后欧拉形式.

这样可以最终得到隐式特征线法求解广义对流扩散方程的混合元形式, 即

$$\begin{aligned}
 & [M_{11} + K_{11}^{n+1} \Delta t + C_{2,11}^{n+1} \Delta t] \Delta \dot{\phi}_1 = \\
 & -[Q^{n+1} + K_{12}^{n+1} \bar{\phi}_2^{n+1} + K_{13}^{n+1} \bar{\phi}_3^{n+1} + \\
 & C_{2,12}^{n+1} \bar{\phi}_2^{n+1} + C_{2,13}^{n+1} \bar{\phi}_3^{n+1} + M_{13} \dot{\phi}_3^{n+1} + \\
 & M_{11} (T(\bar{\phi}_1^{n+1})^p + \dot{R}_f) + K_{11}^{n+1} (T(\bar{\phi}_1)^n + \\
 & \bar{R}_f + T(\bar{\phi}_1^{n+1})^p \Delta t) + C_{2,11}^{n+1} (T(\phi_1)^n + \\
 & \bar{R}_f + T(\bar{\phi}_1^{n+1})^p \Delta t)] \quad (40)
 \end{aligned}$$

4 数值算例

作为第 1 个算例, 考虑由 Yu 和 Heinrich^[5] 首先提出的一个一维问题. 一个 2m 长的杆划分成 80×1 个均匀四节点等参元网格. 在杆上施加一个中心位于 $x = 0.25$ m, 中心峰值为单位值的函数 ϕ 的高斯分布

$$\phi(x, 0) = \exp[-(x - \dot{u}_x)^2 / 4k_x] \quad (41)$$

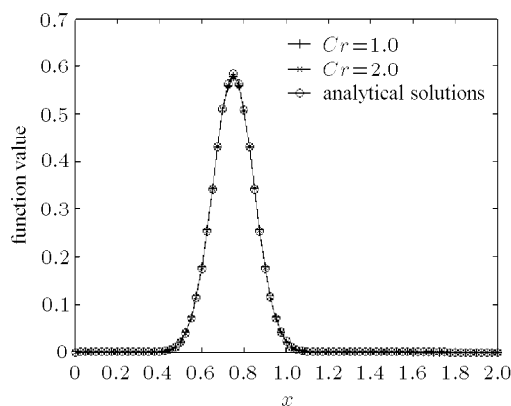
假定全杆有一稳态均匀速度场 $\dot{u}_x \equiv 0.25$ m/s 和常扩散系数 $k_x = 0.0016$. 对于 $t > 0$, 控制方程在 $A = 0$ 和 $Q = 0$ 条件下的解析解为

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \exp \left[\frac{-(x - \dot{u}_x(t+1))^2}{4k_x(t+1)} \right] \quad (42)$$

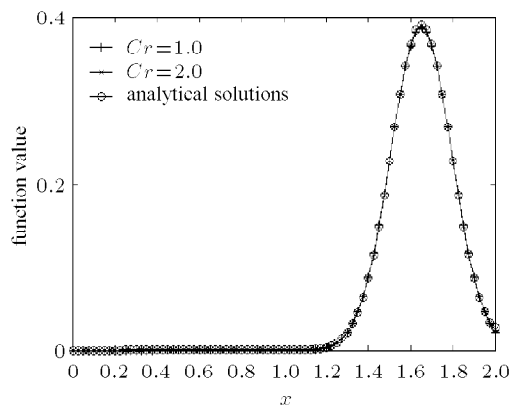
如在式 (42) 中指数值小于 10^{-4} , 将令函数值为零.

图 1 和图 2 分别给出了由本文方法利用 Courant 数 $Cr = 1.0, 2.0$ 和解析解获得的函数 ϕ 在时刻为 2 s 和 5.6 s 时沿杆长的分布.

第 2 个算例考虑一个二维问题, 取自于 Brooks 和 Hughes 的文章^[6]. 如图 2 所示, 求解域是一



(a) $t = 2.0$ s



(b) $t = 5.6$ s

图 1 在 $t = 2.0$ s 和 5.6 s 时函数分布

Fig.1 Function distribution at $t = 2$ s and $t = 5.6$ s

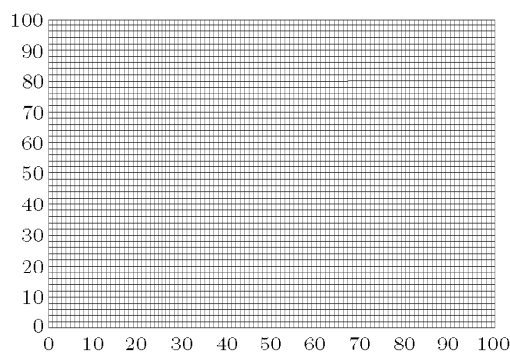
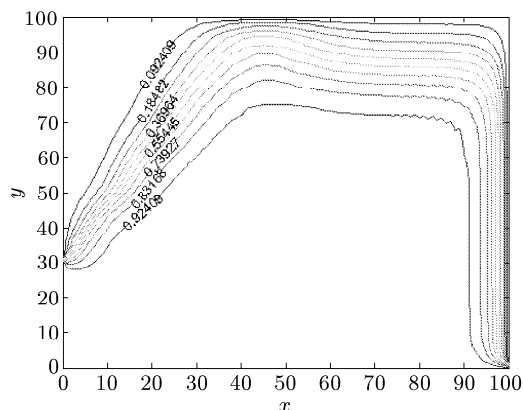


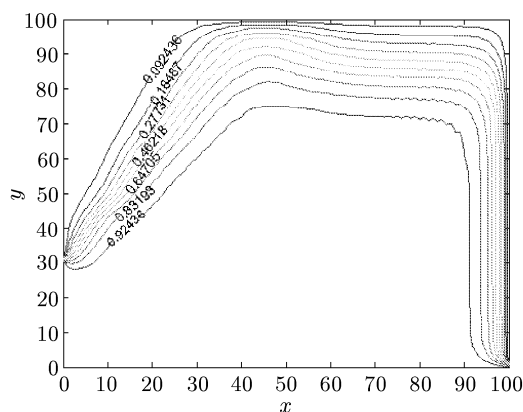
图 2 取自 Brooks 和 Hughes 文章算例的构型

Fig.2 The model diagram for the Brooks & Hughes problem

100 m $\times$ 100 m 域并用 100×50 单元网格划分. 在域的底边界和左边界的下方 30 m 指定单位函数值, 其他边界的函数值指定为零. 假定均匀和稳态的固有对流速度场 $\|\dot{\mathbf{u}}\| = 1$ m/s, 且与底边界成 $\theta = 60^\circ$ 取向. 所采用的参数为 $k_x = k_y = 0.05$, 即 $Pe = 20$, 和 $A = 0, Q = 0$. 计算过程 Courant 数等于 1. 为了证明所提出的混合元方法比标准有限元方法具有更高的计算效率. 本算例采用四点等参元方法, 并考虑混合元和标准有限元方法. 图 3 给出了 $t = 50$ s 时两种方法得到的等值线结果. 图 4 给出了利用两种方法所得到的稳态结果. 图中可以看出, 两种方法得到的计算结果具有同样的精度. 表 1 给出了利用两种方法在不同时间步的计算时间比较. 可以看出, 在达到相同精度的基础上, 一点积分混合元方法可以提高超过 30% 的计算效率. 而且, 对于本文提出的算例为线性模拟, 对于非线性情况, 可以预计能节省更多时间.



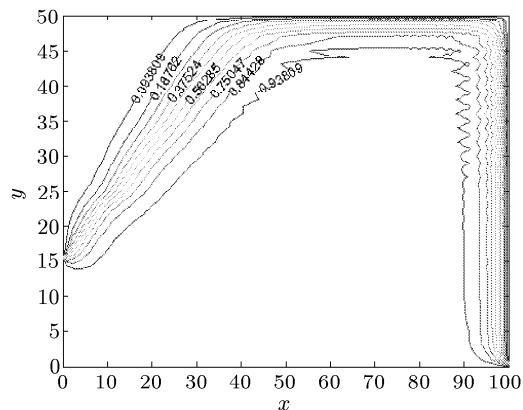
(a) 混合元解
(a) Mixed FEM



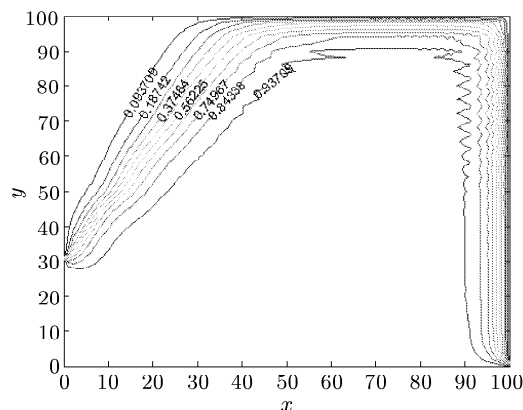
(b) 有限元解
(b) Standard FEM

图 3 Hughes 文中的二维算例 $t = 50$ s 时等值线图
($Pe = 20, Cr = 1.0$)

Fig.3 Function contours of Hughes's 2-D problem: convection-diffusion case ($Pe = 20, Cr = 1.0$). The transient solutions at $t = 50$ s



(a) 混合元解
(a) Mixed FEM



(b) 有限元解
(b) Standard FEM

图 4 Hughes 考题函数稳态解的等值线图 ($Pe = 20, Cr = 1.0$)

Fig.4 Function contours of Hughes's 2-D problem ($Pe = 20, Cr = 1.0$). The transient solutions reach a steady state solution

表 1 混合元方法和标准有限元方法的计算时间比较

Table 1 Computing times spent by the mixed FEM and standard FEM

	50 steps	200 steps (steady state)
mixed FEM	3 h 32 min	15 h 05 min
standard FEM	5 h 12 min	21 h 40 min

5 结 论

本文针对广义对流扩散方程提出了一个基于隐式特征线方法的一点稳定积分混合元方法。利用特征线法的特殊处理，对流扩散方程可以表示成类似于固体力学中“能量”的形式，从而可以满足广义胡海昌-Washizu 的三变量变分原理形式。数值算例证明了一点积分方法可以达到四点积分同样的计算精度，并可以较高的提高计算效率。

参 考 文 献

- 1 Li Xikui, Wu Wenhua. Characteristic Galerkin Method for convection-diffusion equations and implicit algorithm using precise integration. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 15(4): 371~382
- 2 高智, 柏威. 对流扩散方程的摄动有限体积 (PFV) 方法及讨论. *力学学报*, 2004 (1): 88~93 (Gao Zhi, Bo Wei. Perturbational finite volume method for convective diffusion equation and discussion. *Acta Mechanica Sinica*, 2004 (1): 88~93 (in Chinese))

- 3 Liu WK, Belytschko T. Efficient linear and nonlinear heat conduction with a quadrilateral element. *Int J for Numerical Methods in Eng*, 1984, 20: 931~948
- 4 Li Xikui, Liu Zejia, Lewis RW. Mixed finite element method for coupled thermo-hydro-mechanical process in poro-elasto-plastic media at large strains. *Int J Numer Meth Engng*, 2005, 64: 667~708
- 5 Yu CC, Heinrich JC. Petrov-Galerkin method for multidimensional, time dependent convective diffusion equation. *Int J Num Meth Eng*, 1987, 24: 2201~2215
- 6 Brook AN, Hughes TJR. Streamline upwind Petrov Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier Stokes equation. *Computer Methods in Appl Mechanics and Engng*, 1982, 32: 199~259

MIXED FINITE ELEMENT METHOD FOR GENERALIZED CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS BASED ON IMPLICIT CHARACTERISTIC-BASED ALGORITHM¹⁾

Wu Wenhua²⁾ Li Xikui

(The State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, China)

Abstract A mixed finite element method for generalized convection-diffusion equations is proposed. The primitive variable with its spatial gradient and the diffusion flux are interpolated as independent variables. The variational (weak) form of the governing equations is given on the basis of the extended Hu-Washizu three-field variational principle. The mixed element is formulated with stabilized one point quadrature scheme and particularly implicit characteristic-based algorithm for eliminating spurious numerical oscillations. The numerical results show good performances in accuracy and efficiency of the proposed mixed element in comparison with a standard finite element.

Key words generalized convection diffusion equations, mixed finite element method, one point quadrature, implicit characteristic algorithm

Received 13 June 2006, revised 15 January 2007.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10302005, 10590354, 10672033).

2) E-mail: lxuhua@dlut.edu.cn