轴对称液体射流的 Hamilton 表述 1)

李 植 2)

(北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室，工学院力学与空天技术系，北京 100871)

摘要 证明带有自由面的轴对称液体圆射流和环状射流的控制方程在有势运动的情况下具有 Hamilton 结构，其 Hamilton 函数为射流的总能量，并给出正则变量的表达式.

关键词 流体力学的 Hamilton 变分原理，正则变量，圆射流，环状射流，液膜

中图分类号： O351, O358, O316 **文献标识码：** A **文章编号：** 0459-1879(2007)04-0449-06

引 言

Hamilton 方法是现代理论物理学领域的强有力研究工具之一，其本质在于：只要所研究的问题能够通过一种具有特殊结构 (即所谓 Hamilton 结构) 的方程表示出来，就可以直接应用这种结构所特有的所有一般定理和常规方法. 在研究离散系统的分析力学中，这样的特殊结构归结为 Hamilton 正则方程. 连续系统的 Hamilton 方法是离散情况的推广，亦是近年来理论物理学的一个研究热点. 通过与微分几何、拓扑学、群论、李代数、泛函分析等数学领域的相互影响和促进，Hamilton 方法已经渗透到物理学的许多分支，有重要的应用价值.

描述某连续系统的动力学方程具有 Hamilton 结构，是指这些方程具有某种确定的数学形式，例如通过变分导数表述的形式

$$\frac{\partial q_i}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta p_i},\quad \frac{\partial p_i}{\partial t}=-\frac{\delta H}{\delta q_i},\quad i=1,2,\cdots,N$$

这种形式的方程称为 Hamilton 正则方程，变量 $q_1,q_2,\cdots,q_N$ 和 $p_1,p_2,\cdots,p_N$ 称为正则变量，它们是时间和空间坐标的函数，可以类比于分析力学中的广义坐标和广义动量. 量 H 是正则变量的泛函，称为 Hamilton 函数. Hamilton 结构的一般形式是通过 Poisson 括号或其他代数形式表达的.

在经典物理中，许多保守场隐含 Hamilton 结构，其中不乏流体力学类型的系统. Zakharov 首次利用正则变量研究了液体表面重力波的稳定性问题 [1], 这是用 Hamilton 方法研究流体力学问题的开始. 此后在流体力学乃至连续介质力学的许多具体问题中发现了 Hamilton 结构，相关研究详见文献 [2~8]. 结果表明， Hamilton 方法是研究流体力学的有效工具，是进行非线性稳定性分析、推导渐近控制方程和发现新的守恒律的重要手段.

本文研究轴对称射流的 Hamilton 结构. 这里的射流是指在空间中运动的具有一个自由面的液柱或具有两个自由面的液膜. 当液体从孔口或管嘴喷射向周围的气体环境时即可形成这样的流动，它们广泛出现于化工、制冷、冶金等工业部门. 按照喷嘴的不同几何形状，最简单的射流包括：圆射流 (round liquid jet), 环状射流 (annular liquid jet) 或环状液膜 (annular liquid sheet), 液膜 (liquid sheet). 当两股圆射流迎面相撞或一股圆射流喷射到圆片状障碍物后也能形成环状射流，如喷水池中常见的钟形射流. Taylor 曾研究过钟形射流 [9~11], 他称之为液钟 (liquid bell).

当液体或气体喷射向同为液体或气体的环境时出现的经常以湍流输运与挟带为特点的流动也称为射流，这与本文所关注的以自由面的演化与破碎为特点的流动形态有巨大区别. 在下文中，射流一词专指具有自由面的情况.

射流的运动极为丰富和复杂，以射流失稳破碎为中心的诸多研究涉及流动不稳定性和非线性波相互作用的多种机制，所以相关研究多年来一直是流体力学的经典题目 [12~14]. 值得注意的是，尽管液体与气体的黏性在射流运动中起重要作用，定量研究

2005–10–13 收到第 1 稿， 2007–02–26 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10372006).

2) E-mail: zhili@pku.edu.cn

流动不稳定性必须考虑黏性，但是，对于高 Weber 数所表征的射流破碎问题，黏性的主要作用是降低扰动增长率，从而抑制不稳定性 [15]. Lin 因而在其专著 [14] 中特别指出，忽略黏性的理论仍然抓住了射流破碎问题的本质. 此外，在对液膜进行的许多实验中 [9~11,16~18], 射流的黏性效应确实是可以忽略的. 因此，采用理想流体模型 [19~23] 甚至假设流动有势 [22,23] 来研究射流仍然不失为一种经常采用的理论方法. 本文在理想流体有势流动的框架下研究射流的 Hamilton 表述，其理论基础正在于此.

过去 30 多年的研究表明, 利用 Hamilton 表述来研究某些带自由面的流体力学问题是十分有效的. 例如，由此可以直接推导浅水表面波的演化方程，包括经典的 Boussinesq 方程、KdV 方程及其高阶修正 [24~28], 水底面不是平面时的控制方程 [29~32], 甚至复杂的骑行波方程 [33]. 在推导控制方程时，把 Hamilton 函数 (通常是系统的总能量，即动能与势能之和) 显式地通过正则变量表示出来是最重要的一步. 尽管只能近似地给出该表达式, 但是应用 Hamilton 表述推导演化方程的便捷性是毋庸置疑的. 1993 年 Gatin'ol' 和 Sibgatullin 将水波的 Hamilton 结构推广到了 N 层分层流体的一般情形 [34]. 此后，关于分层流体的 Hamilton 结构的研究并无本质上的进展，作者见到的文献或者在某种程度上重复了文献 [34] 的工作 [35~38] 或者仅给出了长波近似下的相关结果 [39]. Sibgatullin 和 Sibgatullina 利用 Hamilton 表述研究了液膜的演化方程与稳定性问题 [40]. 其实，液膜的 Hamilton 表述以及 Zakharov 在 1968 年得到的结果都可以看作是分层流体的 Hamilton 表述的特例. 文献 [41, 42] 进一步研究了液膜的 Hamilton 表述和演化方程，所得一阶近似演化方程在变量变换后与文献 [19] 中用来进行数值模拟的方程相同.

Hamilton 结构的存在性与系统具有某种形式的对称性和守恒性有关. 在研究可能具有 Hamilton 结构的系统时，关键的一步是寻找该系统的 Hamilton 函数与正则变量. 尽管 Zakharov, Kuznetsov[4], Goncharov, Pavlov[7] 等已经初步探讨了发现 Hamilton 结构的一些一般规律，但是长期以来，正则变量的发现还是经常要依靠特殊的技巧与直觉. 本文首先证明轴对称圆射流的控制方程具有 Hamilton 结构，找到相应的正则变量, 并进一步将结果推广到轴对称环状射流的情形. 射流与水波的 Hamilton 描述相比，相同之处在于 Hamilton 函数都是系统的总能量，并且正则变量之一都是自由面上的速度势 (在不同提法中可能相差一个因子), 但是另一正则变量有所不同.

1 轴对称圆射流

考虑具有自由面的理想不可压缩流体轴对称圆射流的无旋运动，不计质量力与周围气体的影响. 取圆柱坐标系 r,θ,z, 其中 z 轴是射流的对称轴. 由对称性可知，所有运动参量都与极角 θ 无关. 设射流的自由面方程为 $r=h(z,t)$, t 为时间.

系统的控制方程为速度势 $\varphi(r,z,t)$ 所满足的 Laplace 方程

$$\Delta\varphi(r,z,t)=\varphi_{rr}+\varphi_{zz}=0, \quad r<h(z,t) \tag{1}$$

(以时间与空间坐标为下标表示对该变量的偏导数) 以及自由面上的两个边界条件. 自由面上的运动学条件为

$$h_t=\varphi_r-\varphi_z h_z, \quad r=h(z,t) \tag{2}$$

而动力学条件来自 Lagrange 积分

$$\varphi_t+\frac{1}{2}(\varphi_r^2+\varphi_z^2)+\frac{p}{\rho}=f(t) \tag{3}$$

式中 p 为液体的压强， ρ 为密度. 实际上，自由面上的压强 $p=p_0+p_\sigma$, 式中 p_0 为假设不变的环境压强， p_σ 为表面张力引起的压强. 根据 Laplace 公式和微分几何中有关曲面曲率的结果，有

$$p_\sigma=\sigma\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)=\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{n}$$

式中 σ 为表面张力系数， R_1 和 R_2 为射流表面的主曲率半径， $\boldsymbol{n}$ 为射流表面的单位外法线矢量，∇ 为 Hamilton 算子. 设 $\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{k}$ 分别为 r,z 轴的单位矢量，则显然

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_0-h_z\boldsymbol{k}}{\sqrt{1+h_z^2}}$$

直接计算可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{h\sqrt{1+h_z^2}}-\frac{h_{zz}}{\sqrt{(1+h_z^2)^3}}$$

将上述表达式代入式 (3), 即得自由面上的动力学条件. 为方便起见, 在所得方程中引入一新的速度势 φ' 来代替 φ, 使常量 p_0/ρ 及函数 $f(t)$ 包含于 φ' 中，并仍记 φ' 为 φ, 则有

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_t+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+\frac{\sigma}{\rho}\Big[\frac{1}{h\sqrt{1+h_z^2}}-\frac{h_{zz}}{\sqrt{(1+h_x^2)^3}}\Big]=0\\&r=h(z,t)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

以下定理表明上述系统具有 Hamilton 结构.

定理 1　理想不可压缩流体轴对称圆射流的自由面上的边界条件 (2) 与 (4) 在 Laplace 方程 (1) 的条件下等价于以下 Hamilton 正则方程

$$A_t=\frac{\delta H}{\delta \varPhi},\quad \varPhi_t=-\frac{\delta H}{\delta A} \tag{5}$$

式中两个正则变量分别为自由面上的速度势与密度之积和射流横截面面积，即

$$\varPhi=\rho\varphi(r=h(z,t),z,t),\quad A=\pi h^2 \tag{6}$$

而 Hamilton 函数为系统的总能量，即

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}(K+\varPi)\mathrm{d}z$$

$$K=\pi\rho\int_0^h(\nabla\varphi)^2r\mathrm{d}r$$

$$\varPi=2\pi\sigma h\sqrt{1+h_z^2}$$

其中 K 与 $\varPi$ 分别表示系统的动能密度和表面张力所对应的势能 (表面能) 密度.

证明：由 $\varPhi$ 与 A 的定义，有

$$\left.\begin{aligned}&\varPhi_t=\rho(\varphi_rh_t+\varphi_z)|_{r=h(z,t)}\\&\varPhi_z=\rho(\varphi_rh_z+\varphi_z)|_{r=h(z,t)}\\&\delta\varPhi=\rho(\varphi_r\delta h+\delta\varphi)|_{r=h(z,t)}\\&A_t=2\pi hh_t,\ \delta A=2\pi h\delta h\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

利用这些等式与变分导数的定义直接计算 $\delta H/\delta\varPhi$ 和 $\delta H/\delta A$, 即可证明边界条件 (2) 与 (4) 在条件 (1) 下能够写为式 (5) 的形式. 实际上

$$\delta H=\int_{-\infty}^{\infty}\big[\pi h\rho(\nabla\varphi)^2|_{r=h(z,t)}+2\pi\sigma\sqrt{1+h_z^2}\big]\delta h\mathrm{d}z+\delta H_0+\delta H_1$$

式中

$$\delta H_0=\pi\rho\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^h\delta(\nabla\varphi)^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$\delta H_1=2\pi\sigma\int_{-\infty}^{\infty}h\delta\sqrt{1+h_z^2}\mathrm{d}z$$

下面分别计算 δH_0 与 δH_1.

首先，$\delta(\nabla\varphi)^2=2\nabla\varphi\cdot\nabla(\delta\varphi)$. 再利用任意标量函数 a 与 b 都满足的恒等式 $\nabla\cdot(a\nabla b)=a\Delta b+\nabla a\cdot\nabla b$ 和方程 (1), δH_0 可表示为

$$\delta H_0=\rho\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^h\int_0^{2\pi}\nabla\cdot(\delta\varphi\nabla\varphi)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

根据奥 - 高公式，此体积分可转化为沿射流表面 S 的面积分，即

$$\delta H_0=\rho\iint_S\boldsymbol{n}\cdot(\delta\varphi\nabla\varphi)|_{r=h}\mathrm{d}S$$

显然

$$\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\varphi)|_{r=h}=\frac{(\varphi_r-\varphi_zh_z)|_{r=h}}{\sqrt{1+h_z^2}}$$

$$\mathrm{d}S=2\pi h\sqrt{1+h_z^2}\mathrm{d}z$$

再利用式 (7), 有

$$\delta H_0=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}h[(\varphi_r-\varphi_zh_z)(\delta\varPhi-\rho\varphi_r\delta h)]|_{r=h}\mathrm{d}z$$

对于 δH_1, 有

$$\delta H_1=2\pi\sigma\int_{-\infty}^{\infty}h\frac{h_z}{\sqrt{1+h_z^2}}\delta h_z\mathrm{d}z=2\pi\sigma\int_{-\infty}^{\infty}h\frac{h_z}{\sqrt{1+h_z^2}}\mathrm{d}(\delta h)$$

分部积分后即得

$$\delta H_1=-\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+h_z^2}}\Big(\frac{h_z^2}{h}+\frac{h_{zz}}{1+h_z^2}\Big)\delta A\mathrm{d}z$$

综合以上结果

$$\delta H=\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\frac{\rho}{2}(\nabla\varphi)^2|_{r=h(z,t)}-\rho[(\varphi_r-\varphi_zh_z)\varphi_r]|_{r=h(z,t)}+\sigma\Big[\frac{1}{h\sqrt{1+h_z^2}}-\frac{h_{zz}}{\sqrt{(1+h_z^2)^3}}\Big]\Big\}\delta A\mathrm{d}z+\int_{-\infty}^{\infty}2\pi h(\varphi_r-\varphi_zh_z)|_{r=h(z,t)}\delta\varPhi\mathrm{d}z$$

再根据变分导数的定义，有

$$\frac{\delta H}{\delta A}=\frac{\rho}{2}(\nabla\varphi)^2\big|_{r=h(z,t)}-\rho[(\varphi_r-\varphi_zh_z)\varphi_r]\big|_{r=h(z,t)}+\sigma\Big[\frac{1}{h\sqrt{1+h_z^2}}-\frac{h_{zz}}{\sqrt{(1+h_z^2)^3}}\Big]$$

$$\frac{\delta H}{\delta\varPhi}=2\pi h(\varphi_r-\varphi_zh_z)\big|_{r=h(z,t)}$$

利用式 (7), 显然式 (5) 中的第 1 式即为式 (2), 从而式 (5) 中的第 2 式即为式 (4). 证毕.

通过系统的 Hamilton 表述可以进一步研究系统的性质. 如果能够得到 $\varphi_r|_{r=h}$ 通过 $\varPhi,A$ 的表达式,

结合一定的边界条件和初始条件，就可以从式 (5) 出发来研究系统的演化. 我们指出，从方程 (2) 和方程 (4) 以及关系式 (7) 直接可得

$$A_t = \Big(2\sqrt{\pi A} + \frac{A_z^2}{2\sqrt{\pi A}}\Big)\varphi_r\Big|_{r=h} - A_z \varPhi_z$$

$$\varPhi_t = \frac{\rho}{2}\Big(1 + \frac{A_z^2}{4\pi A}\Big)\varphi_r^2\big|_{r=h} - \frac{\rho}{2}\varPhi_z^2 - 2\pi\sigma\Big[\frac{1}{\sqrt{4\pi A + A_z^2}} - \frac{2AA_{zz} - A_z^2}{\sqrt{(4\pi A + A_z^2)^3}}\Big]$$

这是正则方程 (5) 在展开后的形式.

对上述结果略加推广，即可进一步给出轴对称环状射流的 Hamilton 结构及其正则变量.

2 轴对称环状射流

考虑理想不可压缩流体轴对称环状射流的无旋运动，不计质量力及周围气体运动的影响. 同样取圆柱坐标系 r, θ, z, 其中 z 轴是射流的对称轴，且所有运动参量都与极角 θ 无关. 设射流的内、外自由面方程分别为 $r = h_1(z,t)$ 和 $r = h_2(z,t)$ (下面也用下标 1,2 来区分内、外自由面). 显然，该系统的控制方程为速度势 $\varphi(r,z,t)$ 所满足的 Laplace 方程

$$\Delta\varphi(r,z,t) = \varphi_{rr} + \varphi_{zz} = 0\,, \quad h_1(z,t) < r < h_2(z,t) \tag{8}$$

和自由面上的运动学条件

$$h_{it} = \varphi_r - \varphi_z h_{iz}\,, \quad r = h_i(z,t)\,,\ i = 1,2 \tag{9}$$

及动力学条件

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_r^2 + \varphi_z^2) \mp \frac{\sigma}{\rho}\Big(\frac{1}{h_i\sqrt{1+h_{iz}^2}} - \frac{h_{izz}}{\sqrt{(1+h_{iz}^2)^3}}\Big) = 0\,, \quad r = h_i(z,t)\,,\ i = 1,2 \tag{10}$$

式中 $i=1$ 时取负号， $i=2$ 时取正号.

利用相同的方法可以证明上述系统具有 Hamilton 结构，见定理 2.

定理 2 理想不可压缩流体轴对称环状射流的自由面上的边界条件 (9) 与 (10) 在 Laplace 方程 (8) 的条件下等价于如下 Hamilton 正则方程

$$A_{1t} = -\frac{\delta H}{\delta \varPhi_1}\,, \qquad A_{2t} = \frac{\delta H}{\delta \varPhi_2}$$

$$\varPhi_{1t} = \frac{\delta H}{\delta A_1}\,, \qquad \varPhi_{2t} = -\frac{\delta H}{\delta A_2}$$

式中正则变量为

$$\varPhi_i = \rho\varphi(r = h_i(z,t), z, t)$$

$$A_i = \pi h_i^2(z,t), \quad i = 1,2$$

Hamilton 函数为系统的总能量，即

$$H = \int_{-\infty}^{\infty}(K + \varPi)\mathrm{d}z$$

$$K = \int_{h_1}^{h_2}\int_0^{2\pi}\frac{\rho}{2}(\varphi_r^2 + \varphi_z^2)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

$$\varPi = 2\pi\sigma(h_2\sqrt{1+h_{2z}^2} + h_1\sqrt{1+h_{1z}^2})$$

其中 K 与 $\varPi$ 分别表示系统的动能密度和表面张力所对应的势能密度.

上述结果还可以推广到轴对称 N 层分层射流的情形，这类似于文献 [34] 中对 N 层分层流的 Hamilton 结构的讨论. 此时， Hamilton 函数仍为系统的总能量，而正则变量为相应密度与速度势之积在各自由面两侧取值之差，以及各自由面横截面所对应的圆的面积.

3 结　论

理想不可压缩流体的轴对称圆射流在运动无旋的情况下具有 Hamilton 结构，两个正则变量可取为自由面上的速度势与密度之积和射流横截面面积. 该结论可以类似地推广到轴对称环状射流以及更一般的轴对称分层射流的情形. 本文所得结果可以作为进行非线性稳定性分析和推导渐近控制方程的基础.

致谢 作者感谢曹浩瀚先生仔细核查了公式的推导，也感谢论文审阅人提供了部分国内的参考文献.

参 考 文 献

1 Zakharov VE. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Zh Prikl Mekh Tekh Fiz*, 1968, 9: 68～94 (*J Appl Mech Tech Phys*, 1968, 2: 190～194 (in Russian))

2 Salmon R. Hamiltonian fluid mechanics. *Ann Rev Fluid Mech*, 1988, 20: 225～256

3 Goncharov VP, Pavlov VI. Some remarks on the physical foundation of the Hamiltonian description of fluid motions. *Eur J Mech B*, 1997, 16: 509～555

4 Zakharov VE, Kuznetsov EA. Hamiltonian formalism for nonlinear waves. *Usp Fiz Nauk*, 1997, 167: 1137～1167

5 Morrison PJ. Hamiltonian description of the ideal fluid. *Rev Mod Phys*, 1998, 70: 467～521

6 张宝善，卢东强，戴世强等. 非线性水波 Hamilton 系统理论与应用研究进展. 力学进展， 1998, 28: 521～531 (Zhang

Baoshan, Lu Dongqiang, Dai Shiqiang, et al. Research progress on theories and applications of Hamiltonian system in nonlinear water waves. *Advances in Mechanics*, 1998, 28: 521∼531 (in Chinese))

7 Goncharov VP, Pavlov VI. Hamiltonian Description of Hydrodynamic Problems. Moscow: Moscow Univ Press, 1993 (in Russian)

8 Swaters GE. Introduction to Hamiltonian Fluid Dynamics and Stability Theory. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000

9 Taylor GI. The dynamics of thin sheets of fluid. I. Water bells. *Proc R Soc Lond A*, 1959, 253: 289∼295

10 Taylor GI. The dynamics of thin sheets of fluid. II. Waves on fluid sheets. *Proc R Soc Lond A*, 1959, 253: 296∼312

11 Taylor GI. The dynamics of thin sheets of fluid. III. Disintegration of fluid sheets. *Proc R Soc Lond A*, 1959, 253: 313∼321

12 Mehring C, Sirignano WA. Review of theory of distortion and disintegration of liquid streams. Prog Energy Combustion Sci, 2000, 26: 609∼655

13 Yarin AL. Free Liquid Jets and Films: Hydrodynamics and Rheology. Essex: Longman, 1993

14 Lin SP. Breakup of Liquid Sheets and Jets. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2003

15 Li X, Tankin RS. On the temporal instability of a two-dimensional viscous liquid sheet. *J Fluid Mech*, 1991, 226: 425∼443

16 de Luca L, Costa M. Stationary waves on plane liquid sheets falling vertically. *Eur J Mech B*, 1997, 16: 75∼88

17 Clanet C, Villermaux E. Life of a smooth liquid sheet. *J Fluid Mech*, 2002, 462: 307∼340

18 Villermaux E, Clanet C. Life of a flapping liquid sheet. *J Fluid Mech*, 2002, 462: 341∼363

19 Mehring C, Sirignano WA. Nonlinear capillary wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets. *J Fluid Mech*, 1999, 388: 69∼113

20 Kim I, Sirignano WA. Three-dimensional wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets. *J Fluid Mech*, 2000, 410: 147∼183

21 Lin SP, Jiang WY. Absolute and convective instability of a radially expanding liquid sheet. *Phys Fluids*, 2003, 15: 1745∼1754

22 de Luca L, Costa M. Instability of a spatially developing liquid sheet. *J Fluid Mech*, 1997, 331: 127∼144

23 Jazayeri SA, Li X. Nonlinear instability of plane liquid sheets. *J Fluid Mech*, 2000, 406: 281∼308

24 Miles JW. On Hamilton's principle for surface waves. *J Fluid Mech*, 1977, 83: 159∼163

25 Menyuk CR, Chen HH. On the Hamiltonian structure of ion-acoustic plasma waves and water waves in channels. *Phys Fluids*, 1986, 29: 998∼1003

26 Craig W, Groves MD. Hamiltonian long-wave approximations to the water-wave problem. *Water Motion*, 1994, 19: 367∼389

27 Li Z, Sibgatullin NR. An improved theory of long waves on the water surface. *Prik Mat Mekh*, 1997, 61: 184∼189 (*J Appl Math Mech*, 1997, 61: 177∼182 (in Russian))

28 张宝善，戴世强. 变分原理与非线性水波的 Hamilton 描述. 力学与实践，1997, 19: 20∼22 (Zhang Baoshan, Dai Shiqiang. Variational principles and Hamiltonian formulation for nonlinear water waves. *Mechanics in Engineering*, 1997, 19: 20∼22 (in Chinese))

29 Yoon SB, Liu PLF. A note on Hamiltonian for long water waves in varying depth. *Wave Motion*, 1994, 20: 359∼370

30 Xu X, Zhong W, Lu Y. Study of nonlinear long wave approximation in uniform channels via Hamiltonian structure. *J Hydrodyn*, *Ser B*, 1995, 1: 66∼76

31 徐新生，钟万勰，吕玉麟. Hamilton 体系下的二维非线性浅水波. 大连理工大学学报， 1995, 35: 796∼800 (Xu Xinsheng, Zhong Wanxie, Lu Yulin. Hamiltonian structure and two-dimensional nonlinear waves in shallow water. 1995, 35: 796∼800 (in Chinese))

32 de la Llave R, Panayotaros P. Gravity waves on the surface of the sphere. *J Nonlinear Sci*, 1996, 6: 147∼167

33 侯建军，乐嘉春，戴世强. 骑行波的非线性演化方程. 力学季刊， 2000, 21: 102∼109 (Hou Jianjun, Le Jiachun, Dai Shiqiang. Nonlinear evolution equations of riding waves. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2000, 21: 102∼109 (in Chinese))

34 Gatin'ol' R, Sibgatullin NR. Canonical variables and Hamilton's principle for a stratified heavy fluid. *Vestn Mosk Univ*, *Ser*.1, 1993 (3): 72∼76 (in Russian)

35 Ambrosi D. Hamiltonian formulation for surface waves in a layered fluid. *Wave Motion*, 2000, 31: 71∼76

36 马晨明，乐嘉春，戴世强. 二层流体中波动问题的 Hamilton 正则方程. 力学季刊， 2001, 22: 374∼377 (Ma Chenming, Le Jiachun, Dai Shiqiang. Hamiltonian canonical equations of wave motion in a two-layer fluid. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2001, 22: 374∼377 (in Chinese))

37 黄虎. 分层流界面波的 Hamilton 描述. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2002, 4: 106∼109 (Huang Hu. Hamiltonian formulation for surface waves in a layered flow. *Journal of East China Normal University* (Natural Science), 2002, 4: 106∼109 (in Chinese))

38 黄虎. 非平整运动海底上 n 层流动中波浪传播的 Hamilton 逼近. 力学学报，2003, 35: 606∼608 (Huang Hu. Hamiltonian approximation of water waves in a n-layer flow over uneven bottoms. *Acta Machanica Sinica*, 2003, 35: 606∼608 (in Chinese))

39 卢东强，戴世强，张宝善. 一个二流体系统中非线性波的 Hamilton 描述. 应用数学和力学， 1999, 20: 331∼336 (Lu Dongqiang, Dai Shiqiang, Zhang Baoshan. Hamiltonian formulation of nonlinear water waves in a two-fluid system. *Appl Math Mech*, 1999, 20: 331∼336 (in Chinese))

40 Sibgatullin NR, Sibgatullina AN. Instability of capillary waves in free thin films. *Vestn Mosk Univ*, *Ser* 1, 1997, (6): 35∼39 (in Russian)

41 Li Z. On the Hamiltonian formulation of thin free liquid sheets. In: Proceedings of 2001 ASME International Me-

chanical Engineering Congress and Exposition, November 11-16, 2001, New York, DE-Vol. 111, 377~380

42 Sibgatullin NR, Sibgatullina AN. Longwave approximation in film flow theory. *Izv Ros Acad Nauk*, *Mekh Zhidk Gaza*, 2003, (4): 111~121 (*Fluid Dyn*, 2003, 38: 601~611(in Russian))

HAMILTONIAN FORMULATION OF AXISYMMETRICAL LIQUID JETS [1)]

Li Zhi[2)]

(*State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, College of Engineering, Department of Mechanics and Aerospace Engineering, Peking University, Beijing* 100871, *China*)

Abstract It is shown that the governing equations describing the potential motion of axisymmetrical liquid jets have a Hamiltonian structure. Round and annular jets are discussed. The Hamiltonian is the total energy of the jet, and the expressions for the canonical variables are given.

Key words Hamiltonian variational principle in fluid mechanics, canonical variables, round jet, annular jet, liquid sheet

Received 13 October 2005, revised 26 February 2007.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10372006).

2) E-mail: zhili@pku.edu.cn