

基于 Erdogan 基本解边界元法计算应力强度因子

苏 成¹⁾ 郑 淳

(华南理工大学土木工程系, 广州 510640)

摘要 引入含裂纹问题基本解 (Erdogan 基本解), 提出了基于 Erdogan 基本解的样条虚边界元法, 并阐述了该法在实施过程中的特点与具体做法. 采用该方法详细分析了若干典型裂纹问题, 全面考察了方法的计算精度和收敛情况, 以及在求解复杂裂纹问题方面的能力. 结果显示, 该方法具有精度高、收敛快、计算能力强等优点, 是裂纹问题分析中一种具有竞争力的通用计算方法.

关键词 断裂力学, 应力强度因子, Erdogan 基本解, 边界元法, 样条函数

中图分类号: O343.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)01-0093-07

引 言

断裂力学在现代材料强度理论中所占据的重要地位是众所周知的事实. 它在结构、机械、岩土、抗震等工程领域已得到越来越广泛的应用. 由于应力强度因子是裂纹体分析中的关键参量, 所以应力强度因子的计算是线弹性断裂力学的一项重要工作. 但是, 只有极少数断裂力学问题存在解析解, 绝大多数工程实际中所遇到的断裂力学问题都要借助于数值分析的方法才能解决. 目前常用的数值方法包括有限元法、边界配置法和边界元法等^[1]. 相对于有限元法运算量庞大的缺点, 边界元法具有只需较少的自由度就能达到相当高的精度的优势. 此外, 由于基本解具有一般性, 对于不同类型的裂纹问题可以统一考虑, 因而克服了边界配置法中需因具体问题选用不同应力函数的不足.

从已有的文献看, 目前采用边界元法计算裂纹体平面问题应力强度因子时, 一般基于常规的不含裂纹问题的基本解, 即 Kelvin 基本解^[2]. 此时裂纹表面零应力边界条件无法自动满足, 裂纹表面需作为应力边界处理. 但由于裂纹尖端应力的奇异性, 因此常规边界元法并不能直接应用于裂纹体的分析中, 需发展特殊的边界单元 (如 1/4 等参奇异元^[1]等) 来计算应力强度因子, 或采用小单元方法获取裂纹尖端位移场并结合位移外推法间接求解应力强度因子^[3]. 上述方法在使用上并不方便, 对于复杂裂纹问题, 精度也有限. 为此, 本文采用含裂纹问题基

本解, 即 Erdogan 基本解^[4], 对裂纹体问题进行边界元法列式. 此时裂纹表面零应力边界条件可以自动精确满足, 裂纹表面无需作为应力边界处理, 且可以直接计算应力强度因子. 但由于 Erdogan 基本解采用复变应力函数表示, 形式相对复杂, 如采用常规奇异边界元法, 在处理奇异边界积分时将会更加困难. 为此, 本文进一步采用可以完全避开奇异积分的样条虚边界元法, 提出基于 Erdogan 基本解的裂纹体分析的样条虚边界元法, 成功地对 I 型和 II 型裂纹问题进行了分析.

1 含裂纹问题基本解 (Erdogan 基本解)

在无限大含裂纹平面内任意点 ($z_0 = x_0 + iy_0$) 处沿 x 轴、 y 轴方向作用一对集中力 Q, P , 如图 1 所示. Erdogan 在文献 [4] 中给出了上述问题的复变函数解答. 平面内任意点 ($z = x + iy$) 处的应力、位移以及裂纹右端应力强度因子分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\phi(z) + \overline{\phi(z)}] \\ \sigma_y + i\tau_{xy} &= \overline{\phi(z)} + \overline{\Omega(z)} + (\bar{z} - z)\phi'(z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa \int_0^z \phi(z) dz - \int_0^{\bar{z}} \Omega(\bar{z}) d\bar{z} + (\bar{z} - z)\overline{\phi(z)} \quad (2)$$

$$K = K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} [(\sqrt{z-a})\phi(z)] =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \frac{1}{(1 + \kappa)} \left\{ (Q + iP) \left[\left(\frac{a + z_0}{\sqrt{z_0^2 - a^2}} - 1 \right) - \right. \right.$$

2006-01-25 收到第 1 稿, 2006-07-18 收到修改稿.

1) E-mail: cvchsu@scut.edu.cn

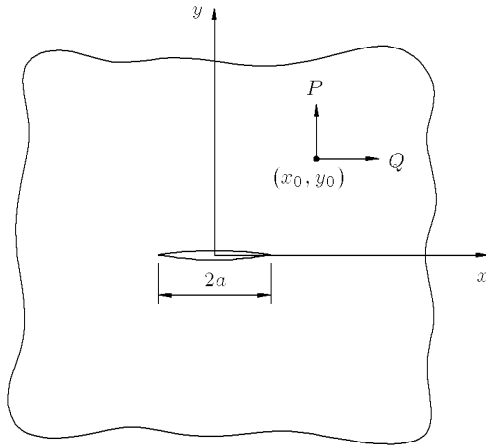


图 1 无限大含裂纹平面

Fig.1 Infinite plane with a crack

$$\kappa \left(\frac{a + \bar{z}_0}{\sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}} - 1 \right) \Bigg] + \frac{a(Q - iP)(\bar{z}_0 - z_0)}{(\bar{z}_0 - a)\sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}} \Bigg\} \quad (3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \phi(z) &= -\frac{S}{z - z_0} + \phi_0(z) \\ \Omega(z) &= \frac{\kappa S}{z - \bar{z}_0} + \frac{\bar{S}(\bar{z}_0 - z_0)}{(z - \bar{z}_0)^2} + \phi_0(z) \\ \phi_0(z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \left\{ \frac{S}{z - z_0} [I(z) - I(z_0)] - \right. \\ &\quad \left. \frac{\kappa S}{z - \bar{z}_0} [I(z) - I(\bar{z}_0)] - \right. \\ &\quad \left. - \bar{S}(\bar{z}_0 - z_0) \left[\frac{I(z) - I(\bar{z}_0)}{(z - \bar{z}_0)^2} - \frac{J(\bar{z}_0)}{z - \bar{z}_0} \right] \right\} \\ I(z) &= \pi[\sqrt{z^2 - a^2} - z] \\ J(z) &= \pi \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right] \\ S &= \frac{Q + iP}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad \kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & (\text{平面应变}) \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & (\text{平面应力}) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

上述式子中 a 为半裂纹宽度, μ 为剪切模量, ν 为材料的泊松比. 当点 z 落在裂纹表面, 即 $z = x_a$ ($-a \leq x_a \leq a$) 时, 式 (4) 中的 $I(z)$ 和 $J(z)$ 在裂纹上下表面的定义有所区别, 分别为: 当点 z 位于裂纹上表面时, $I(z)$ 和 $J(z)$ 中的根号前取正号; 当点 z 位于裂纹下表面时, $I(z)$ 和 $J(z)$ 中的根号前取负号.

值得注意的是, 式 (3) 和 (4) 中的平方根部分 $\sqrt{z^2 - a^2}$ 是一个双值函数, 由复数运算法则可知,

$(z^2 - a^2)$ 的平方根为

$$w_k = \sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{r_0} \left[\cos \left(\frac{\theta_0}{2} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta_0}{2} + k\pi \right) \right] \quad (k = 0, 1) \quad (5)$$

式中 r_0 和 θ_0 分别为 $(z^2 - a^2)$ 的模和辐角. 由式 (5) 可知, $\sqrt{z^2 - a^2}$ 实际上包含了两个相异的平方根 w_0, w_1 , 分别称为 $\sqrt{z^2 - a^2}$ 的主值和副值, 而且 $w_1 = -w_0$. 但是文献 [4] 中并未对式 (4) 中平方根部分的取值作出明确的说明, 严重影响了对公式的正确使用. 本文对该问题进行了详细研究, 发现 $\sqrt{z^2 - a^2}$ 的合理取值是根据 z 所在的象限或坐标轴位置来确定的. 当 z 分布在第 1 象限、第 4 象限、 y 轴正半轴或 x 轴正半轴除裂纹外的地方时, $\sqrt{z^2 - a^2}$ 取其主值 w_0 ; 而当 z 分布在第 2 象限、第 3 象限、 y 轴负半轴或 x 轴负半轴除裂纹外的地方时, $\sqrt{z^2 - a^2}$ 取其副值 w_1 . 上述发现为 Erdogan 基本解在边界元法中的成功应用扫除了障碍.

令图 1 中的 $P = 0, Q = 1$ 或 $P = 1, Q = 0$, 相应的解即为含裂纹问题的基本解, 它们可以直接由式 (1)~(4) 获得, 分别记为 $\sigma_x^{(l)}(z; z_0), \sigma_y^{(l)}(z; z_0), \tau_{xy}^{(l)}(z; z_0), u^{(l)}(z; z_0), v^{(l)}(z; z_0), K_I^{(l)}(z_0)$ 和 $K_{II}^{(l)}(z_0)$ ($l = 1, 2$). 其中 $l = 1$ 相应于 $P = 0, Q = 1$ 的情况; $l = 2$ 相应于 $P = 1, Q = 0$ 的情况.

值得注意的是, 由式 (1)~(4) 显式表示出 $\sigma_x^{(l)}, \sigma_y^{(l)}, \tau_{xy}^{(l)}, u^{(l)}, v^{(l)}, K_I^{(l)}$ 和 $K_{II}^{(l)}$ ($l = 1, 2$) 是很困难的, 也是不必要的. 具体使用时, 可以先把源点和场点坐标代入上述公式的右端式子, 求出右端项后再根据复数运算法则分离出单独的应力、位移和应力强度因子基本解的数值.

2 基于 Erdogan 基本解的样条虚边界元法

样条虚边界元法与常规间接边界元法的主要区别在于: (1) 样条虚边界元法将奇点的分布位置由边界移到域外, 建立的积分方程是非奇异的, 从而完全避开奇异积分的计算问题, 并能有效地克服边界层效应问题, 提高了边界及其附近区域上解的精度, 尤其适用于基本解形式相对复杂 (如 Erdogan 基本解) 时的情况; (2) 在对积分方程进行求解时, 采用性能良好的 B 样条函数去逼近未知虚荷载函数, 并采用性能稳定的边界子段法消除边界余量, 在求解精度方面优于采用多项式插值及边界配点技术的常规间接边界元法.

样条虚边界元法已成功地应用于弹性力学平面

问题的分析^[5,6], 在工程方面则分别在高层建筑上部结构与筏板基础分析方面得到应用^[7,8]. 在上述应用中, 样条虚边界元法均是基于常规的 Kelvin 基本解. 为了对平面裂纹问题进行分析, 本文进一步将 Erdogan 基本解引入样条虚边界元法中.

对于弹性力学平面裂纹问题, 设所研究的弹性域为 Ω , 其边界为 L (不含裂纹表面边界), 域内体力为 F_l ($l = 1, 2$), a 为半裂纹宽度 (内部裂纹问题) 或裂纹宽度 (边界裂纹问题), 如图 2 所示. 将 Ω 嵌入到无限大含裂纹域 (裂纹宽度为 $2a$) 中, 在 Ω 域外作虚边界 S , 并在其上分布密度未知的虚荷载 X_l ($l = 1, 2$). 根据叠加原理, 在真实荷载 F_l 和虚荷载 X_l ($l = 1, 2$) 的共同作用下, 无限域内任意一点 P_0

处的位移或应力为

$$\left. \begin{aligned} R(P_0) = & \sum_{l=1}^2 \int_S R^{(l)}(P_0; Q) X_l(Q) ds + \\ & \sum_{l=1}^2 \iint_{\Omega} R^{(l)}(P_0; Q_0) F_l(Q_0) d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$(R = \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v)$$

式中 $Q \in S$, $Q_0 \in \Omega$, $R^{(l)}$ ($l = 1, 2$) 为 Erdogan 基本解, 详见第 1 节.

由于利用了 Erdogan 基本解的叠加, 式 (6) 除自然满足 Ω 域内的控制微分方程外, 还同时满足裂纹表面零应力边界条件, 因此仅需考虑余下边界 L 上的边界条件. 将式 (6) 代入 L 上的边界条件得

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^2 \int_S G_k^{(l)}(P; Q) X_l(Q) ds + \\ & \sum_{l=1}^2 \iint_{\Omega} G_k^{(l)}(P; Q_0) F_l(Q_0) d\Omega = \\ & H_k(P) \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $P \in L$, H_k 为边界上的已知函数; $G_k^{(l)}$ 为由 Erdogan 基本解 $R^{(l)}$ ($l = 1, 2$) 所组成的核函数, $G_k^{(l)}$ 的具体表达式由不同的边界条件确定; $k = 1, 2$ 表示对于平面问题, 边界上存在两个边界条件.

式 (7) 中的核函数中的源点和场点是永远不会重合的, 因此核函数不会出现奇异的情况, 即式 (7) 为非奇异积分方程. 积分方程 (7) 一般不能获得解析解, 它们需要通过数值方法求解^[5,6]. 首先将域外虚边界离散为若干个虚边界元, 并将分布在虚边界 S 上的未知虚荷载函数展开成三次 B 样条函数, 样条函数节点取为虚边界元节点; 然后将真实边界也离散为若干个边界子段, 并令各子段上边界余量的积分为零, 据此消除边界 L 上的余量; 最后建立起式 (7) 的离散化方程为

$$AX + B = C \quad (8)$$

式中 X 是由 S 上未知虚荷载样条节点参数组成的列阵; A 是 X 的影响矩阵, 其中的元素为核函数与 B 样条函数乘积的二维非奇异积分, 可以用高斯数值积分求出; B 和 C 为已知列阵, 分别取决于 Ω 内的体力和 L 上的边界条件. 为了保证边界余量的消除效果, 同时充分发挥样条函数很强的逼近未知虚荷载函数的能力, 边界子段数和虚边界元数可分

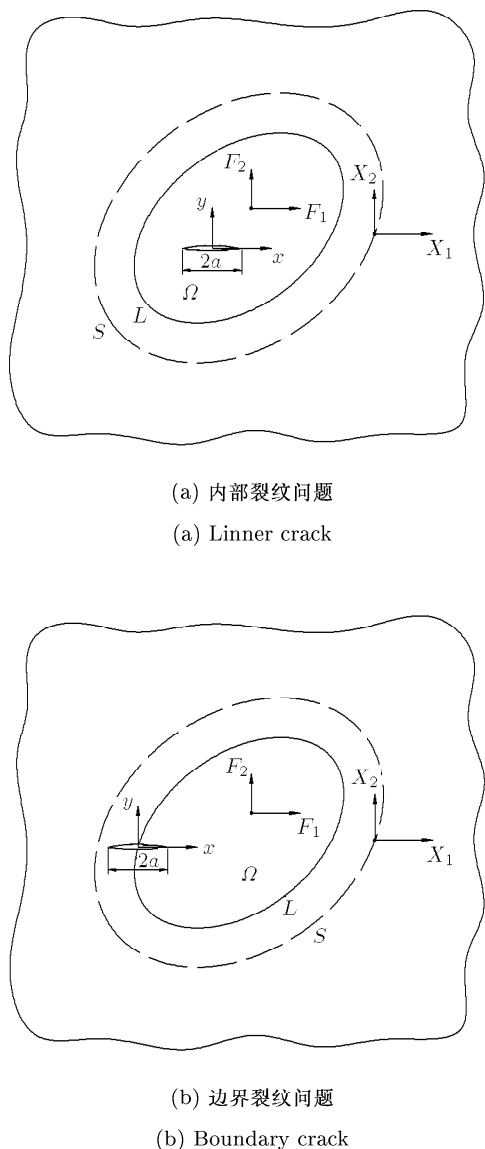


图 2 平面域与虚边界

Fig.2 Plane domain and fictitious boundary

别单独考虑. 一般采用超额配段方法, 即边界子段数大于虚边界元数, 此时式 (8) 是一个矛盾方程组, 需采用最小二乘法或广义逆矩阵理论进行求解.

求解式 (8) 得出 $\mathbf{X}$ 后, 进一步可由下式的离散型式求出应力强度因子

$$K = K_I - iK_{II} = \sum_{l=1}^2 \int_S K^{(l)}(Q) X_l(Q) ds + \sum_{l=1}^2 \iint_{\Omega} K^{(l)}(Q_0) F_l(Q_0) d\Omega \quad (9)$$

式中 $K^{(l)} = K_I^{(l)} - iK_{II}^{(l)}$, $K_I^{(l)}$ 和 $K_{II}^{(l)}$ ($l = 1, 2$) 为应力强度因子基本解, 详见第 1 节. 可见, 由于 Erdogan 基本解包含应力强度因子基本解, 因此采用本文方法可以直接获得裂纹问题的应力强度因子. 无量纲应力强度因子如下式定义

$$F_{I,II} = \frac{K_{I,II}}{\sigma \sqrt{\pi a_0}} \quad (10)$$

式中 σ 为远场均匀拉应力, a_0 为全裂纹宽度.

3 中心 I 型裂纹矩形板问题

考察图 3 所示的中心 I 型裂纹矩形板问题, 图中 a , W 和 H 分别是半裂纹宽度、半板宽度和半板高度. 将矩形板嵌入含裂纹无限大板中, 并在矩形板外围布置矩形虚边界, 它与真实边界的间距为 $d = 4.0$.

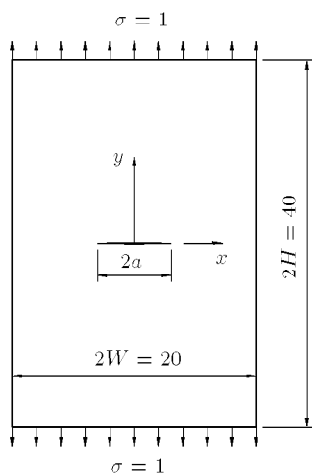


图 3 中心 I 型裂纹矩形板

Fig.3 Rectangular plate with a center crack

采用样条虚边界元法分别计算短裂纹 ($a/W = 0.2$) 和长裂纹 ($a/W = 0.8$) 情况时的应力强度因子 K_I , 在计算过程中采用 60 个边界子段, 并分别采用不同数量的虚边界元. 将计算结果与应力强度因子

手册 [9] 中的结果进行对比, 得到不同虚边界元数时的 K_I 相对误差, 如图 4 所示. 由图可见, 随着虚边界元数的增加, 样条虚边界元法的计算精度得到迅速提高, 结果收敛速度快. 此外还发现, 对于短裂纹 ($a/W = 0.2$) 情况只需 4 个虚边界元就使得 K_I 相对误差小于 0.5%, 而对于长裂纹 ($a/W = 0.8$) 情况则需 12 个虚边界元. 造成这种现象的原因是: 随着裂纹宽度的增大, 裂纹尖端区域的应力奇异性变得更加强烈, 当裂纹宽度到达板宽度一半 ($a/W > 0.5$) 以上时, 裂纹尖端逐渐接近板的边界, 使边界附近的应力变化加剧, 从而需要更多的虚边界元数方能保证结果的精度.

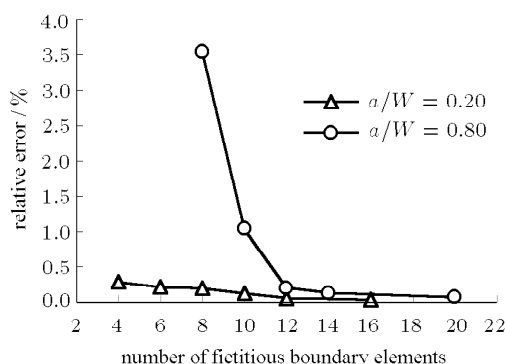


图 4 两种裂纹宽度的 K_I 相对误差

Fig.4 Relative errors of K_I corresponding to two widths of crack

采用样条虚边界元法求出裂纹宽度在 $a/W = 0.1 \sim 0.9$ 范围内的应力强度因子 K_I , 并根据式 (10) 换算得到无量纲应力强度因子 F_I , 如图 5 所示. 文献 [9] 中采用边界配置法求得的结果也示于图中. 由图可见, 本文计算结果与文献 [9] 的结果相当吻合, 其中最大相对误差仅为 0.48%. 计算时, 对于短裂纹 ($a/W = 0 \sim 0.5$) 情况, 最多采用 60 个边界子段和

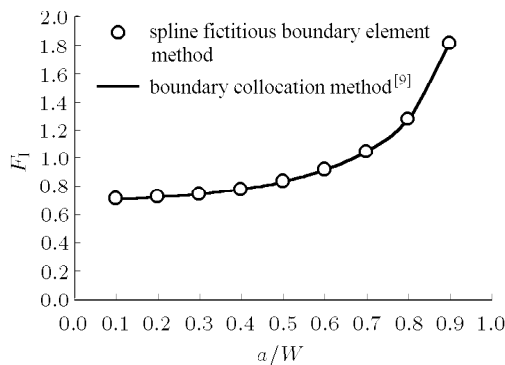


图 5 不同裂纹宽度情况下的 F_I 值

Fig.5 Values of F_I corresponding to different crack widths

8 个虚边界元即可满足相对误差小于 0.5% 的精度要求. 而对于长裂纹 ($a/W > 0.5$) 情况, 根据前面讨论的裂纹宽度与所需虚边界元数的关系, 随着裂纹宽度增大需适当增加边界子段数和虚边界元数. 在最大裂纹宽度 ($a/W = 0.9$) 情况下, 需要采用 70 个边界子段和 36 个虚边界元才能满足同样的精度要求.

4 单边斜裂纹矩形板问题

考察图 6 所示的单边斜裂纹 ($0^\circ < \beta \leq 90^\circ$) 矩形板单向受拉问题, 图中 a 和 W 分别是裂纹宽度和板宽, 板高是 $2.5H$. 由于斜裂纹的存在, 因此单边斜裂纹矩形板问题一般属于混合型 (I 型和 II 型) 的裂纹问题. 将矩形板嵌入含裂纹无限大板中, 并在矩形板的域外布置矩形虚边界, 如图 7 所示, 虚边界与真实边界的间距取为 $d = 4.0$.

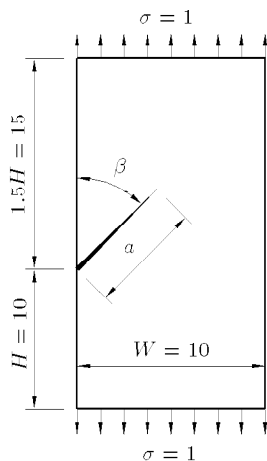


图 6 单边斜裂纹矩形板

Fig.6 Rectangular plate with a slant single-edge crack

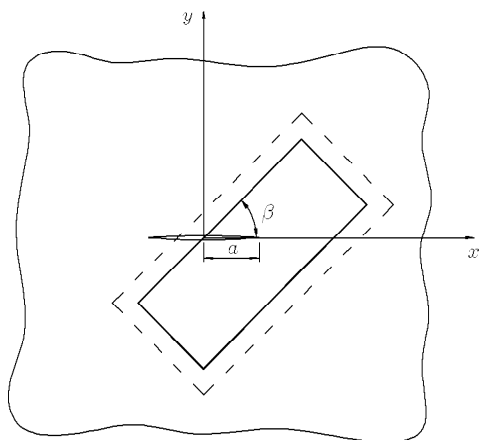


图 7 单边斜裂纹矩形板的计算模型

Fig.7 Computation model of rectangular plate with a slant single-edge crack

采用样条虚边界元法分别计算 $\beta = 45^\circ$, $\beta = 67.5^\circ$ 和 $\beta = 90^\circ$ 3 种裂纹情况下的应力强度因子 K_I 和 K_{II} , 所考察的裂纹宽度范围是 $a/W = 0.3 \sim 0.6$. 其中对于 $\beta = 45^\circ$ 情况最多采用了 70 个边界子段和 37 个虚边界元; 对于 $\beta = 67.5^\circ$ 情况最多采用了 90 个边界子段和 46 个虚边界元; 对于 $\beta = 90^\circ$ 情况最多采用了 90 个边界子段和 50 个虚边界元. 将 K_I 和 K_{II} 计算结果换算成无量纲应力强度因子 F_I 和 F_{II} , 分别如图 8 和图 9 所示. 文献 [10] 采用边界配置法求得的结果也示于图中. 由图可见, 本方法计算结果与文献 [10] 的结果相当吻合, 其中最大相对误差不超过 2.0%, 显示了样条虚边界元法在求解混合型裂纹问题中的有效性.

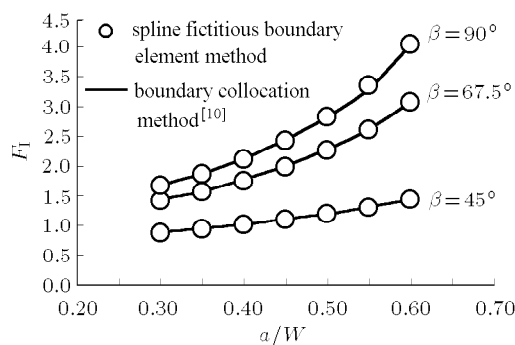


图 8 不同夹角情况下的 F_I 值

Fig.8 Values of F_I corresponding to different values of β

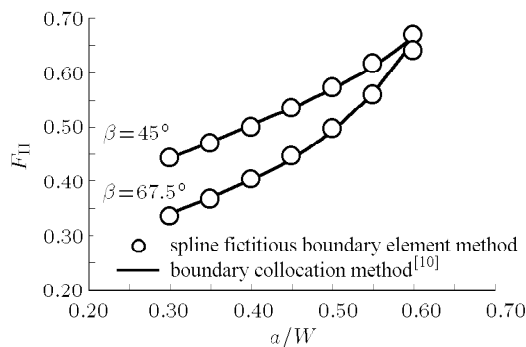


图 9 不同夹角情况下的 F_{II} 值

Fig.9 Values of F_{II} corresponding to different values of β

5 含半圆缺口单边 I 型裂纹矩形板问题

考察图 10 所示的含半圆缺口单边 I 型裂纹矩形板问题, 图中 a , R , W 和 H 分别为裂纹宽度、半圆缺口半径、板宽度和半板高度. 将图 10 所示裂纹板嵌入含裂纹无限大板中, 如图 11 所示.

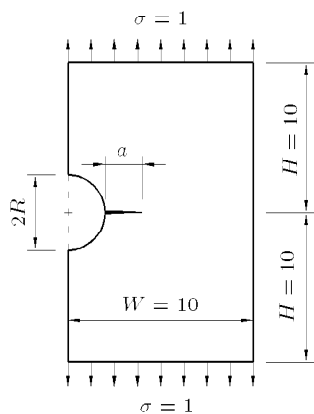


图 10 含半圆缺口单边 I 型裂纹矩形板

Fig.10 Rectangular plate with an edge crack emanating from a semi-circular hole

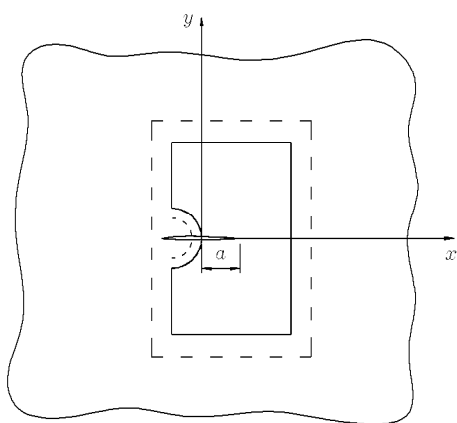
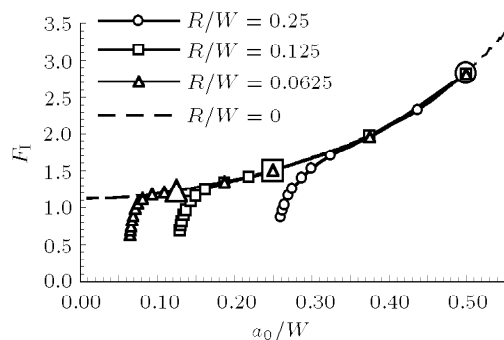


图 11 含半圆缺口单边 I 型裂纹矩形板计算模型

Fig.11 Computation model of rectangular plate with an edge crack emanating from a semi-circular hole

本问题中最重要和最敏感的地方是半圆缺口处。该处半圆弧边界十分接近裂纹开口,而且当裂纹很短时与裂纹尖端也很接近,半圆弧边界附近应力梯度较大,因此在布置虚边界以及划分边界子段和虚边界元时必须重点考虑半圆缺口。具体做法如图 11 所示,除在矩形板外围布置整体矩形虚边界外,还在半圆缺口处单独布置同圆心半圆弧虚边界,以局部加强半圆缺口处边界条件的满足程度。这种整体和局部结合的做法在建模时既不会太复杂,又能够有效地改善边界条件的满足程度。在划分边界子段和虚边界元时,需对半圆缺口边界和半圆弧虚边界进行加密划分,矩形边界与矩形虚边界只需划分为少量单元,具体的单元数目随裂纹宽度改变而有所不同。其中在求解最小裂纹宽度 ($a/R = 0.04$) 情况时采用了最多的 107 个边界子段和 68 个虚边界元。

分别考虑半圆缺口半径为 $R/W = 0.25$, $R/W = 0.125$ 和 $R/W = 0.0625$ 的 3 种情况,并计算不同裂纹宽度下的应力强度因子 K_I 。将计算结果换算成无量纲应力强度因子 F_I , 如图 12 所示。上节中采用本文方法求得的无缺口 ($R/W = 0$) 单边 I 型裂纹问题 ($\beta = 90^\circ$) 的结果也示于图中。其中为了方便与无缺口单边 I 型裂纹的结果进行比较,本节求得的 K_I 值在换算成无量纲应力强度因子 F_I 时,所采用的裂纹特征长度为 $a_0 = a + R$ 。

图 12 不同半圆缺口半径情况下的 F_I 值Fig.12 Values of F_I corresponding to different values of R/W

由图 12 可见,当裂纹宽度相对半圆缺口半径较小时,不同半圆缺口半径情况下的 F_I 值都明显比同裂纹宽度 (a_0/W) 的无缺口单边 I 型裂纹矩形板的结果小许多,而且小于 1.0;随着裂纹宽度的增大,缺口的影响会逐渐减小直至消失,此时含缺口的单边 I 型裂纹问题的应力强度因子与不含缺口的是一样的。经过分析可知,当裂纹宽度 a 大约增至半圆缺口半径 R 的一倍 (如图 12 中放大符号处对应的裂纹宽度) 后,半圆缺口对应应力强度因子的影响可以忽略不计。

6 结 论

基于含裂纹问题 Erdogan 基本解,本文提出了计算平面裂纹体应力强度因子的样条虚边界元法。由于采用了 Erdogan 基本解,裂纹表面零应力边界条件可以自动精确满足,且可以直接求解 I 型、II 型或混合型裂纹问题的应力强度因子;非奇异虚边界元法可以完全避开边界奇异积分问题,克服了对形式相对复杂的 Erdogan 基本解作奇异积分的困难;采用样条函数逼近未知虚荷载函数及利用子段法消除边界余量等手段进一步提升了本文方法的精度。计算结果表明,本文方法具有计算精度高、收敛速

度快、求解能力强等优点, 是计算应力强度因子一种新的具竞争力的数值方法。

基于 Erdogan 基本解样条虚边界元法具有良好的数值稳定性, 虚边界与真实边界之间的距离可在较大范围内变动而不会对计算结果造成影响, 且该法还可以利用边界条件的满足程度作为误差的一种度量, 对计算结果的精度作出直观判断。这些优点与常规样条虚边界元法^[1]是一样的, 本文不再赘述。

参 考 文 献

- 黎在良等. 断裂力学中的边界数值方法. 北京: 地震出版社, 1996(Li Zailiang, et al. Boundary Numerical Method in Fracture Mechanics. Beijing: Earthquake Press, 1996(in Chinese))
- Banerjee PK, Butterfield R. Boundary Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1981
- 李庆斌等. 特解边界元法及其工程应用. 北京: 科学技术文献出版社, 1992(Li Qingbin, et al. Boundary Element Method Based on Particular Solutions and Its Engineering Application. Beijing: Science and Technology Literature Press, 1992(in Chinese))
- Erdogan F. On the stress distribution in a plate with collinear cuts under arbitrary loads. In: Proc. 4th US National Congress of Applied Mechanics, 1962. 547~553
- Su Cheng, Han Dajian. Multidomain SFBEM and its application in elastic plane problems. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 2000, 126(10): 1057~1063
- 苏成, 韩大建. 正交各向异性弹性力学平面问题的样条虚边界元法. 应用数学和力学, 2002, 23(4): 400~406(Su Cheng, Han Dajian. Elastic analysis of orthotropic plane problems by the spline fictitious boundary element method. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 23(4): 400~406(in Chinese))
- 苏成, 韩大建. 高层建筑侧向刚度计算的分域样条虚边界元法. 华南理工大学学报, 1998, 26(6): 81~85(Su Cheng, Han Dajian. Calculation of lateral stiffness of high rise buildings by multi-domain spline fictitious boundary element method. *Journal of South China University of Technology*, 1998, 26(6): 81~85(in Chinese))
- 苏成, 韩大建. 高层建筑筏板基础分析的样条虚边界元法. 土木工程学报, 2001, 34(1): 61~66(Su Cheng, Han Dajian. Analysis of raft foundation by spline fictitious boundary element method. *China Civil Engineering Journal*, 2001, 34(1): 61~66(in Chinese))
- 中国航空研究院. 应力强度因子手册(增订版). 北京: 科学出版社, 1993(Chinese Aeronautics Research Institute. Handbook of Stress Intensity Factors (revised edition). Beijing: Science Press, 1993(in Chinese))
- Rooke DP, Cartwright DJ. Compendium of Stress Intensity Factors. The Hillingdon Press, Uxbridge, Middx, 1976
- 苏成, 郑淳. 样条虚边界元法的数值稳定性与误差估计. 华南理工大学学报, 2003, 31(8): 53~56(Su Cheng, Zheng Chun. Numerical stability and error estimate of the spline fictitious boundary element method. *Journal of South China University of Technology*, 2003, 31(8): 53~56(in Chinese))

CALCULATION OF STRESS INTENSITY FACTORS BY BOUNDARY ELEMENT METHOD BASED ON ERDOGAN FUNDAMENTAL SOLUTIONS

Su Cheng¹⁾ Zheng Chun

(Department of Civil Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract The Erdogan fundamental solutions for infinite cracked plates are introduced in this paper. The spline fictitious boundary element method is then proposed and formulated for analysis of mode I and mixed mode (mode I and II) problems based on the above fundamental solutions. The proposed method is further applied to analyze certain crack problems, in which the computation accuracy, convergence rate and the versatility of the method are demonstrated in details.

Key words fracture mechanics, stress intensity factors, Erdogan fundamental solutions, boundary element method, spline function

Received 25 January 2006, revised 18 July 2006.

1) E-mail: cvchsu@scut.edu.cn