

# 基于凸模型的结构非概率可靠性优化<sup>1)</sup>

亢 战<sup>2)</sup> 罗阳军

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

**摘要** 基于不确定性的凸模型描述, 研究考虑非概率可靠性指标约束的结构优化问题. 该优化模型是一个内层优化为极小极大问题的嵌套优化模型. 为了有效地求解该模型, 提出了一种基于目标性能的优化方法, 通过寻找目标性能点来判断约束的满足情况, 从而避免直接计算以极小极大 (min-max) 问题定义的非概率可靠性指标. 提出的数值方法可处理材料、几何及载荷等不确定性参数, 并且目标性能值的灵敏度计算公式简便, 算法稳定. 数值算例验证了所提出方法的正确性, 也表明算法比文献中已有方法更为有效.

**关键词** 结构优化, 凸模型, 非概率可靠性, 灵敏度分析, 目标性能方法

中图分类号: O224, TU311.4 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2006)06-0807-09

## 引 言

随着结构优化方法和理论研究的深入以及数值计算能力的不断增强, 非确定性结构优化的研究正引起广泛重视. 非确定性结构优化问题的提法主要包括结构可靠性优化和近年来发展的结构稳健性优化<sup>[1~3]</sup>. 其中, 基于可靠性理论的优化设计是考虑非确定性结构在极限状态下失效问题的有效途径.

从 20 世纪 40 年代开始, 基于概率模型的可靠性优化设计<sup>[4,5]</sup> 在结构设计中得到了成功的应用, 取得了丰硕的研究成果. 概率可靠性模型需要不确定参数完整的概率分布信息, 而这些数据在工程实际中通常难以获得. 没有足够的描述概率模型时, 概率可靠性计算的结果是不可靠的. 有研究表明, 概率可靠性对概率模型参数很敏感, 概率数据的小误差可能导致结构可靠性计算出现较大误差<sup>[6]</sup>. 这些难以克服的局限性限制了概率可靠性理论在工程实际中的推广和应用.

在许多情况下, 虽无法得到不确定参数的精确概率分布数据, 但参数不确定性的幅度或界限则易于确定. 研究表明, 凸模型 (convex model, 包括超立方盒模型和超椭球模型等) 适于处理这类不确定但有界 (uncertain-but-bounded) 的参数. 20 世纪 90 年代以来, Ben-Haim<sup>[7,8]</sup> 和 Elishakoff<sup>[9]</sup> 采用凸模型描述结构中不确定但有界的参数, 并提出了结构非

概率可靠性概念. 其基本思想是: 若系统能容许较大的不确定性而不失效, 则系统是可靠的, 反之, 若系统只能容许很小的不确定性, 则系统是不可靠的. 系统的可靠度可由系统所能容许的最大不确定程度来衡量. Qiu 等<sup>[10]</sup> 基于区间扰动方法, 通过反优化技术来处理不确定但有界参数问题, 并已用于桁架结构优化设计<sup>[11]</sup>. Lombardi 等<sup>[12]</sup> 将反优化技术用于不确定性载荷下复合材料优化设计. 反优化过程通常只用于处理载荷的不确定性, 限制了以上方法的应用. Ganzerli 等<sup>[13]</sup> 尝试利用凸模型的叠加方法, 避免了反优化计算, 一定程度上减少了计算量. 但他们提出的算法只适用于处理线性结构中载荷的不确定性. 郭书祥等<sup>[14,15]</sup> 基于区间分析, 提出一种非概率可靠性度量指标, 来衡量不确定参数为区间变量时系统的安全性, 并将其用于结构优化, 但对于其它凸模型 (如椭球模型) 情况, 区间算术计算结果趋于保守. 曹鸿钧等<sup>[16]</sup> 在区间可靠性指标的基础上, 提出一衡量超椭球模型与区间模型并存情况下的非概率可靠性指标. 由于非概率可靠性指标是用一个极小极大模型定义的, 虽然可以采用增广设计变量的方法转化为常规极值问题, 但以该指标为设计约束的优化问题求解时仍然十分困难. 曹鸿钧等<sup>[17]</sup> 提出序列线性化方法, 将目标函数与可靠性指标线性近似来求解. 该方法属于近似方法, 且初始点必须为可行设计, 当初始点的可靠性指标

2005-12-15 收到第 1 稿, 2006-02-28 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (90305019, 10421002), 教育部长江学者和创新团队发展计划资助项目.

2) E-mail: zhankang@dlut.edu.cn

较低的情况下算法可能失败. 应该指出, 采用非概率可靠度定义的非确定性结构优化问题在提法上与基于反优化的途径有本质区别.

本文采用凸模型理论, 研究考虑非概率可靠性指标约束时的优化设计问题. 为了求解该嵌套的优化问题, 提出一种基于目标性能的优化方法, 通过寻找目标性能点来判断约束是否被满足, 而不是直接计算用极小极大模型定义的非概率可靠性指标. 本文方法可处理材料、几何及荷载等不确定性参数, 并且外层结构优化问题中可靠度约束的灵敏度计算公式简便, 算法稳定性良好. 数值算例也对本文所提算法的正确性及有效性进行了验证.

## 1 凸模型

给定不确定参数向量  $x \in \mathbf{R}^n$ , 凸模型将  $x$  的变差范围用超椭球集合来界定, 即

$$x \in E = \{x | (x - \bar{x})^T \mathbf{W} (x - \bar{x}) \leq \varepsilon_e^2\} \quad (1)$$

其中,  $\bar{x}$  为不确定参数的名义值向量,  $\mathbf{W}$  为一对称正定矩阵, 称为凸模型的特征矩阵, 它确定了超椭球体主轴的方向, 并与  $\varepsilon_e$  共同定义了超椭球体的大小即参数的不确定程度.

对  $\mathbf{W}$  进行特征值分解

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{W} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} \quad (2)$$

其中  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{\Lambda}$  为特征值组成的对角矩阵.

引入向量

$$\mathbf{u} = (1/\varepsilon_e) \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{Q}^T (x - \bar{x}) \quad (3)$$

将式 (3) 代入式 (1), 原凸模型  $E$  可以转换为

$$E_C = \{\mathbf{u} | \mathbf{u}^T \mathbf{u} \leq 1\} \quad (4)$$

称  $\mathbf{u}$  为与不确定参数向量  $x$  对应的标准化向量,  $E_C$  为  $\mathbf{u}$  空间的一个单位超球集合.

在实际情况下, 常常将不确定参数向量  $x$  无量纲化为相对变差向量  $\delta$  (相对于其名义值), 两者的分量元素有如下关系式

$$x_i = \bar{x}_i \times (1 + \delta_i) \quad (5)$$

用无量纲化的凸模型来描述不确定性, 即

$$\delta \in E = \{\delta | \delta^T \mathbf{W} \delta \leq \varepsilon_e^2\} \quad (6)$$

注意, 式 (6) 中的特征矩阵与式 (1) 中的特征矩阵在数值上并不相等, 两者能够相互转换.

此时的标准化向量则表示为

$$\mathbf{u} = (1/\varepsilon_e) \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{Q}^T \delta \quad (7)$$

对于不确定区间参数  $x \in \mathbf{R}$ , 若仅知道其上下界  $x^U, x_L$ , 用区间变量形式表示为

$$x \in x^I = [x_L, x^U] \quad (8)$$

对应的名义值 (区间中点)  $\bar{x} = (x_L + x^U)/2$ , 区间半径为  $\Delta x = (x^U - x_L)/2$ . 用名义值与区间半径可将不确定参数表示为

$$x \in E^I = \{x | (x - \bar{x})^2 \leq \Delta x^2\} \quad (9)$$

比较式 (9) 与式 (1) 可知, 区间变量是超椭球模型的一种特殊情况, 即“一维椭圆模型”, 其特征矩阵为标量 1, 对应的标准化参数为  $u = (x - \bar{x})/\Delta x$ .

设系统的所有不确定参数向量为  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ , 按照参数间变差的相关性, 可将其分为若干组不确定参数, 各组参数之间的变差是相互独立的, 而属于同一组的不确定参数, 其变差具有相关性, 即每个组可用一个超椭球凸模型来描述<sup>[17]</sup>, 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}^T &= \{\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_k^T\} \\ \mathbf{y}_i \in E_i &= \{\mathbf{y}_i | (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}_i)^T \mathbf{W}_i (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}}_i) \leq \varepsilon_{ci}^2\} \\ & \quad i = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

各凸模型对应的标准化向量集合为

$$E_{ci} = \{\mathbf{u}_i | \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i \leq 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (11)$$

## 2 非概率可靠性指标

在结构可靠度分析中, 结构的极限状态一般由功能函数或者极限状态函数  $g(x)$  来描述, 方程  $g(x) = 0$  称为结构的极限状态方程, 它是结构可靠度分析的重要依据. 经标准化变换后, 极限状态方程将标准  $\mathbf{u}$  空间划分成可靠区 (对应  $g(x) > 0$ ) 与失效区 (对应  $g(x) < 0$ ) 两部分. 图 1 所示为单个凸模型二维  $\mathbf{u}$  空间的情形, 图中曲线为极限状态曲线, 单位圆为不确定变量对应的标准化凸域, 记  $\eta$  为原点到极限状

态曲线的最短距离。从图上可以看出，若  $\eta = 1$ ，则失效区与凸集区域刚好相切，结构处于“临界”失效的状态。当  $\eta > 1$ ，则不确定变量的变差均处于可靠区内，此时结构是可靠的，且容易理解， $\eta$  值越大，结构所能容许的不确定参数变差程度越大，结构越可靠。因而可选  $\eta$  作为结构非概率可靠性的度量指标。

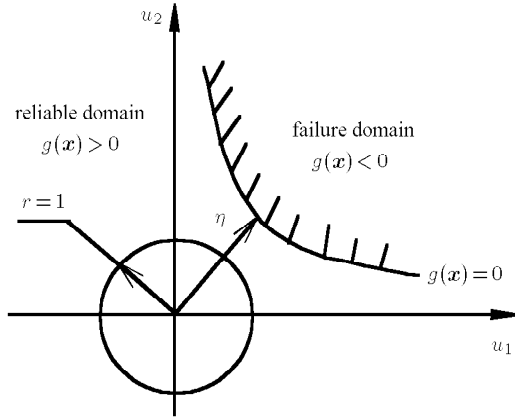


图 1 非概率可靠性指标示意图

Fig.1 Schematic diagram of non-probabilistic reliability index

对于系统中有  $k$  个超椭球凸模型的情况，可定义其非概率可靠性指标  $\eta$  为<sup>[16]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \max_{i=1, \dots, k} \eta_i = \sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i} \\ \text{s.t.} \quad & g(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

这是一个极小极大问题，采用增广设计变量的方法，可以将上式转化为下面等价形式

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \eta} \quad & \eta \\ \text{s.t.} \quad & g(\mathbf{x}) = 0 \\ & \sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i} \leq \eta, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

### 3 结构非概率优化设计

类似于概率可靠性优化，结构的非概率可靠性优化问题可以描述为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & f(\mathbf{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \eta[g_j(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \geq 0] \geq \eta_{j, \text{target}}, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中， $\mathbf{d}$  为设计变量， $\mathbf{x}$  为不确定性参数向量。 $f$  为目标函数， $g$  为功能函数或者极限状态函数， $\eta[g_j(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \geq 0]$  为该功能函数下的非概率可靠性指

标， $p$  为约束个数。 $\eta_{j, \text{target}} \geq 1$  为预先给定的非概率可靠性指标的目标值。事实上，如果给定  $\eta_{j, \text{target}} > 1$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ )，相当于要求在将非确定性参数对应的凸域进行相应扩张后，最优设计仍然能够满足所有约束条件。在本文所考虑的优化问题中，设计变量既可以是确定性参数，也可以是不确定性参数的名义值。

上述优化问题中，第  $j$  个功能函数的非概率可靠性指标  $\eta[g_j(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \geq 0]$  的计算也是一个优化问题，即

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \max_{i=1, \dots, k} \eta_i = \sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i} \\ \text{s.t.} \quad & g_j(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

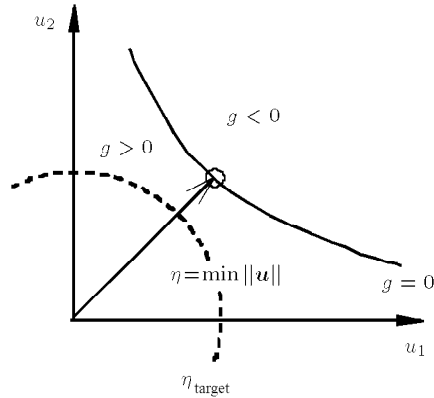
其中， $\mathbf{u}_i$  为不确定性参数  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个凸模型标准化向量， $k$  为超椭球凸模型的个数。

可见，该模型为一个嵌套的优化问题，外层优化最小化结构的目标函数，同时满足给定的非概率可靠性指标要求，内层优化则进行非概率可靠性分析。由于内层优化问题为一极小极大问题，求解该嵌套的优化问题极为困难，收敛速度通常难以令人满意。另外，外层优化中非概率可靠性指标对设计变量的灵敏度不易求得，即使采用后优化技术仍然需要较大的计算量，为优化问题的求解带来不便。

#### 3.1 基于目标性能的优化方法

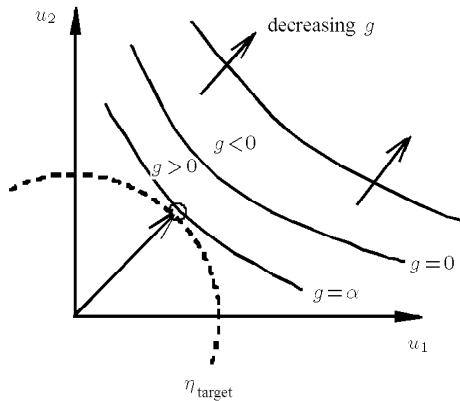
对于基于凸模型的非确定性结构优化问题，为解决常规算法中处理非概率可靠性指标约束的困难，并增加外层结构优化迭代过程的稳定性和提高收敛速率，本文提出一种基于目标性能的优化方法。与文献中已有方法不同的是，目标性能方法并不关心当前设计点对应的非概率可靠性指标与其目标指标值的比较，而是根据目标性能值的符号判断可靠性约束是否被满足。目标性能方法中，首先在标准化参数空间中原点距离不大于给定非概率可靠性指标目标值  $\eta_{\text{target}}$  所构成的超球中，选出使极限状态函数值最小的点（见图 2(b)）。该点处的极限状态函数值  $\alpha$  称为当前设计点对应的目标性能值。因为极限状态方程为负时表示结构失效，故由目标性能值  $\alpha$  的符号能够判断非概率可靠性指标约束是否被满足。当  $\alpha \geq 0$  表明不确定参数构成的超椭球与失效区不相交或者正好相切，约束满足；否则超椭球与失效区相交，对于不确定参数的某些组合，约束无法满足。由此推断有等价性存在

$$\eta \geq \eta_{\text{target}} \Leftrightarrow \alpha \geq 0 \quad (16)$$



(a) 文献中方法

(a) Existing approach in literatures



(b) 基于目标性能的方法

(b) Target-performance-based approach

图 2 标准化  $U$  空间下极限状态函数示意图

Fig.2 Schematic illustration of limit state function in the standard  $U$ -space

对于  $p$  个非概率可靠性指标约束的情况，与原优化问题 (14) 等效的基于目标性能的优化问题可以描述如下

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & f(\mathbf{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \alpha_j(\mathbf{d}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中，目标性能值  $\alpha_j$  的计算如下

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \alpha_j = g_j(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & |\mathbf{u}_i| = \sqrt{\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i} \leq \eta_{j,\text{target}}, \quad i = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

### 3.2 目标性能值的灵敏度计算

基于梯度的优化算法例如序列二次规划法等需

要用到目标函数和约束函数对设计变量的灵敏度信息。不失一般性，作者考虑任意一种非概率可靠性指标约束的情况。由于目标性能值  $\alpha$  为极限状态函数  $g(\bullet)$  在目标性能点的计算值，目标性能值对于设计变量的灵敏度即等于极限状态函数在该点的导数

$$\frac{d\alpha}{d\mathbf{d}} = \mathbf{G}\mathbf{d} = \frac{dg(\mathbf{d}, \mathbf{x}^*)}{d\mathbf{d}} \quad (19)$$

式中目标性能点  $\mathbf{x}^*$  与设计变量  $\mathbf{d}$  有关，看似难以求解，但由于作者构造的内层优化问题的特殊性，可以推导出其具体表达式非常简单，计算相当容易。

考虑设计变量  $\mathbf{d}$  的两种情况，一种是确定性设计变量  $z$ ，另一种是不确定性参数向量  $\mathbf{x}$  的名义值  $\bar{\mathbf{x}}$ 。根据式 (18)，目标性能值的计算可以写为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \alpha = g(z, \mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i \leq \eta_{\text{target}}^2, \quad i = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

根据优化灵敏度分析的相关理论 [18]，可以如下推导极限状态函数在目标性能点对设计变量导数的具体表达式。

优化问题 (20) 满足 Kuhn-Tucker 条件，即在最优优点  $\mathbf{x}^*$  处，有

$$\frac{\partial g(z, \mathbf{x}^*)}{\partial x_m} + 2 \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (21a)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i - \eta_{\text{target}}^2 = 0, \quad i \in I(\mathbf{x}^*) \quad (21b)$$

其中  $\lambda_i$  为相应约束对应的 Lagrange 乘子， $n$  为不确定参数个数， $I(\mathbf{x}^*)$  为最优点紧约束的指标集。

当设计变量  $\mathbf{d}$  发生微小扰动时，式 (21b) 恒成立，且其紧约束的指标集仍保持不变，故该式对  $\mathbf{d}$  的导数为 0，即

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i - \eta_{\text{target}}^2)}{d\mathbf{d}} = \\ 2 \frac{\mathbf{u}_i^T \partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{d}} + 2 \sum_{m=1}^n \frac{\mathbf{u}_i^T \partial \mathbf{u}_i}{\partial x_m} \frac{dx_m}{d\mathbf{d}} = 0, \quad i \in I(\mathbf{x}^*) \end{aligned} \quad (22)$$

由式 (21a) 和式 (22)，可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dg(z, \mathbf{x}^*)}{d\mathbf{d}} = \frac{\partial g(z, \mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{d}} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial g(z, \mathbf{x}^*)}{\partial x_m} \frac{dx_m}{d\mathbf{d}} = \\ \frac{\partial g(z, \mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{d}} + \sum_{i \in I} 2\lambda_i \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{d}} \end{aligned} \quad (23)$$

(1) 当对某确定性设计变量  $z_j$  求导时, 有

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial z_j} = 0 \quad (24)$$

代入式 (23) 得

$$\frac{dg(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*)}{dz_j} = \frac{\partial g(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*)}{\partial z_j} \quad (25)$$

(2) 当对某不确定参数的名义值  $\bar{x}_m$  求导时, 由式 (3) 可以得到

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \bar{x}_m} = -\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_m} \quad (26)$$

另外有

$$\frac{\partial g(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*)}{\partial \bar{x}_m} = 0 \quad (27)$$

再由式 (23) 及式 (21a) 得

$$\frac{dg(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*)}{d\bar{x}_j} = -\sum_{i \in I} 2\lambda_i \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \quad (28)$$

优化问题 (14) 中的非概率可靠性指标  $\eta$  的灵敏度不容易计算, 而由式 (25), (28) 可以看出, 无论设计变量为确定性参数或者不确定性参数的名义值, 目标性能值  $\alpha$  对于设计变量的灵敏度计算都非常容易.

### 4 数值算例

例 1: 10 杆平面桁架

某 10 杆桁架如图 3 所示. 杆的弹性模量为 1000, 水平和垂直杆长为 360. 优化目标为材料总体积最小, 设计变量为杆件截面积, 其下限均为 0.1, 取初始设计值为 20.0. 不确定参数为载荷的大小, 均对于其名义值有 10% 的扰动, 考虑两种不同载荷及约束的优化设计情况.

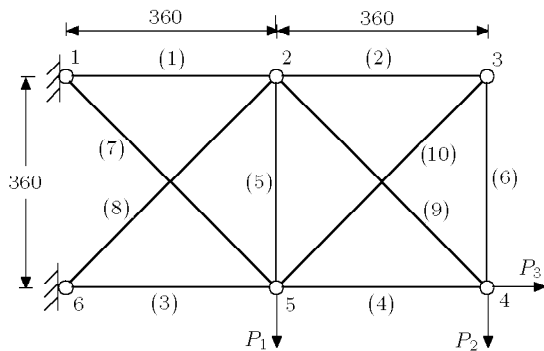


图 3 10 杆桁架结构

Fig.3 Ten-bar truss structure

情况 1: 载荷名义值为  $P_1 = P_2 = 100, P_3 = 400$ . 对所有杆件施加应力约束, 杆件的受拉与受压容许应力相同, 第 9 杆的容许应力为 75, 其余杆的容许应力为 25; 对节点 4 垂直方向位移施加约束, 容许位移为 5. 考虑非概率可靠性指标分别为 1.0 和 1.5 的情况.

情况 2: 载荷名义值为  $P_1 = P_2 = 100, P_3 = 0$ . 只对所有杆件施加应力约束, 应力约束情况与情况 1 相同. 考虑非概率可靠性指标分别为 1.0 和 1.5 的情况.

两种情况的优化结果分别如表 1 和表 2 所示, 表中第 2 列为不确定参数取名义值时的确定性优化结果, 其它列为不确定性优化结果. 当非概率可靠性指标为 1.0 时, 结构处于可靠与不可靠的“临界”状态, 此时的优化结果与文献 [13] 中采用凸模叠加优化方法的计算结果一致, 验证了本文算法的正确性. 应该指出, 当可靠性指标  $\eta = 1.5$  时, 最优设计允许参数有更大的变异程度. 收敛历程分别如图 4 和图 5 所示, 可见该算法稳定性好.

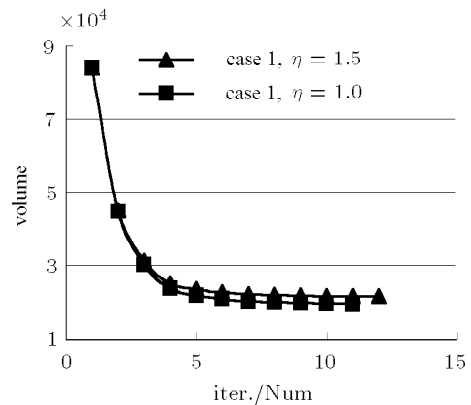


图 4 情况 1 的迭代过程

Fig.4 Iteration history of case 1

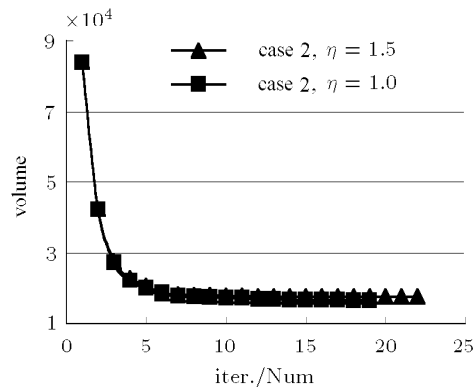


图 5 情况 2 的迭代过程

Fig.5 Iteration history of case 2

表 1 情况 1: 应力和位移约束下的体积优化结果

Table 1 Case 1: Optimal volume solutions with stress and displacement constraints for the 10-bar truss

Quantity	Cross-sectional area			
	Nominal case	Convex model in Ref.[13]	$\eta = 1.0$	$\eta = 1.5$
Member number				
1	4.055 8	4.460 5	4.508 3	5.013 2
2	0.100 0	0.100 0	0.100 0	0.100 0
3	4.040 6	6.821 7	6.826 7	8.305 3
4	12.346 5	14.040 9	14.106 8	15.056 6
5	3.864 4	4.312 6	4.305 6	4.352 4
6	0.100 0	0.100 0	0.100 0	0.100 0
7	11.263 4	12.382 7	12.379 0	12.637 3
8	0.100 0	0.100 0	0.100 0	0.526 9
9	2.768 1	4.634 3	4.613 9	5.674 47
10	0.140 7	0.100 0	0.100 0	0.100 0
Volume	16 089	19 506	19 534	21 496

表 2 情况 2: 只有应力约束下的体积优化结果

Table 2 Case 2: Optimal volume solutions with stress constrains for the 10-bar truss

Quantity	Cross-sectional area			
	Nominal case	Convex model in Ref.[13]	$\eta = 1.0$	$\eta = 1.5$
Member number				
1	7.991 9	8.709 7	8.810 3	9.217 0
2	0.100 0	0.100 0	0.100 7	0.100 6
3	8.007 4	8.890 3	8.789 3	9.182 7
4	3.734 2	4.309 8	4.147 5	4.345 1
5	0.100 0	0.100 0	0.106 8	0.354 6
6	0.100 0	0.100 0	0.100 0	0.100 0
7	5.824 3	6.350 3	6.379 7	6.660 9
8	5.491 3	6.094 9	6.067 2	6.351 7
9	3.746 2	4.658 7	4.733 4	5.079 0
10	0.135 9	0.144 5	0.136 1	0.136 2
Volume	14 950	16 775	16 756	17 668

另外, 我们取情况 1 中非概率可靠性指标  $\eta = 1.0$  时的优化结果作为杆件截面积, 分别按照式 (13)

和 (18), 来验算此时各个杆件应力约束的非概率可靠性指标以及目标性能值. 收敛判据为前后两次迭代的目标值之差小于  $10^{-4}$ , 并且最大迭代步数限制为 500. 计算结果见表 3, 通过比较两者的迭代步数, 可以看出求解目标性能值要比直接求解非概率可靠性指标容易, 收敛速度更快, 从而证明了本文算法更加有效.

表 3 非概率可靠性指标与目标性能值的计算结果比较

Table 3 Comparison between non-probability reliability index and target performance value

(based on the optimum results when  $\eta = 1.0$  in case 1)

Limit state function	Calculated by Eq.(13)		Calculated by Eq.(18)	
	Iteration number	$\eta$	Iteration number	$\alpha$
25-stress[1]	267	1.000	49	0.000
25-stress[2]	30	4.737	22	9.638
25-stress[3]	23	1.000	19	0.000
25-stress[4]	21	1.002	18	0.006
25-stress[5]	375	1.001	76	0.010
25-stress[6]	31	4.898	22	9.760
25-stress[7]	14	1.007	10	0.016
25-stress[8]	21	1.340	21	2.443
75-stress[9]	500	13.940	7	41.701
25-stress[10]	304	2.080	24	3.614

注: stress[i] 表示第  $i$  根杆件的应力值.

Notes: stress[i] denotes the stress value of the  $i$ th bar.

例 2: 25 杆平面桁架

结构如图 6 所示. 各杆件的弹性模量为 29 000, 4 个集中力载荷为不确定参数, 其中  $P_1$  和  $P_3$  为同一不确定参数, 名义值为 400;  $P_2$  的名义值为 500;  $P_4$  的名义值为 300. 载荷  $P_1, P_2, P_3$  的变差系数为 10%, 载荷  $P_4$  的变差系数为 20%. 优化目标为材料

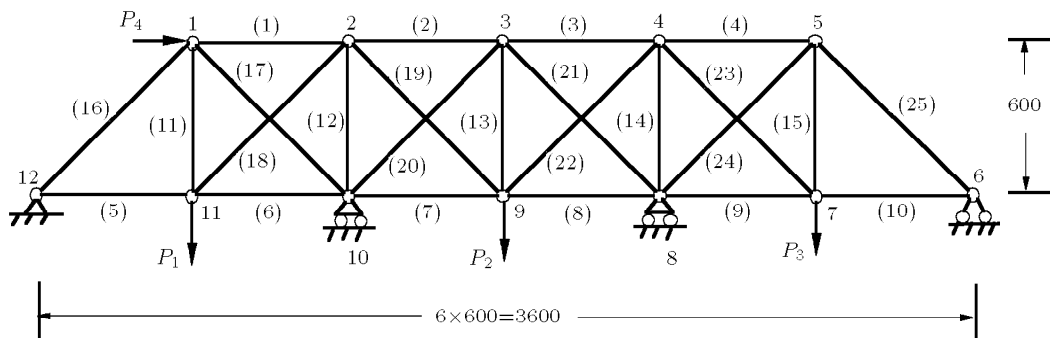


图 6 25 杆桁架结构

Fig.6 Twenty-five-bar truss structure

总体积最小，每根杆的应力小于 25 的非概率可靠性指标取为 1.0，设计变量为杆件截面积，下限为 0.10，初始值取 20。计算结果见表 4，表中第 2 列为名义值情况下确定性优化结果，第 3 列为文献 [13] 中采用凸模叠加方法的最不利工况优化结果，第 4 列为利用本文方法得到的“临界”情况 ( $\eta = 1.0$ ) 优化结果。通过 Monte-Carlo 模拟可以验证，非确定性优化结果能够完全避免结构失效。计算结果表明，对于该设计变量及约束较多的情况，本文优化结果与文献 [13] 中仍吻合较好，进一步证明了本文方法能够适用于较复杂的情况。

表 4 25 杆桁架结构应力约束下体积优化结果

Table 4 Optimal volume solutions with stress constraints for the 25-bar truss structure

Quantity	Cross-sectional area		
	Nominal case	Convex model in Ref.[13]	$\eta = 1.0$
1	2.8744	4.0955	3.9082
2	0.1000	0.1000	0.1000
3	0.1365	0.7931	0.7977
4	0.1000	0.6499	0.4649
5	11.5654	13.8747	13.9645
6	3.8216	5.5315	5.7773
7	0.1000	0.1000	0.1000
8	0.1880	0.4247	0.4493
9	0.1000	0.3266	0.3537
10	5.3702	6.1487	6.1645
11	8.2561	10.1273	10.3312
12	12.6462	14.2090	13.7982
13	9.9735	11.0647	11.0885
14	10.4378	11.4328	11.4166
15	10.6858	11.7323	11.8128
16	0.6148	3.9277	3.9451
17	12.2905	14.4725	14.6796
18	10.9514	12.1438	11.8530
19	6.9329	7.9949	7.9758
20	6.9328	7.9853	7.9573
21	7.1727	8.0676	8.0073
22	7.2453	7.8696	7.8310
23	7.5157	8.2979	8.3020
24	7.5176	8.2789	8.2753
25	7.5946	8.6956	8.6467
Volume	$1.0925 \times 10^5$	$1.2881 \times 10^5$	$1.2856 \times 10^5$

例 3：10 杆斜桁架

某 10 杆斜桁架如图 7 所示。在节点 2,3 处受  $y$  向载荷  $P_1, P_2$  的作用。该结构的功能要求为节点 2,3 的  $y$  向位移的均方根值不超过  $0.5 \times 10^{-3} \text{m}$ ，即

$$g = \sqrt{(v_2^2 + v_3^2)/2} \leq 0.5 \times 10^{-3} \text{m}$$

其中， $v_2$  和  $v_3$  分别表示节点 2,3 的  $y$  向位移。设计变量为各杆件截面积，其下限为  $65 \times 10^{-6} \text{m}^2$ ，初始值取  $2 \times 10^{-2} \text{m}^2$ 。优化目标为材料总体积最小。

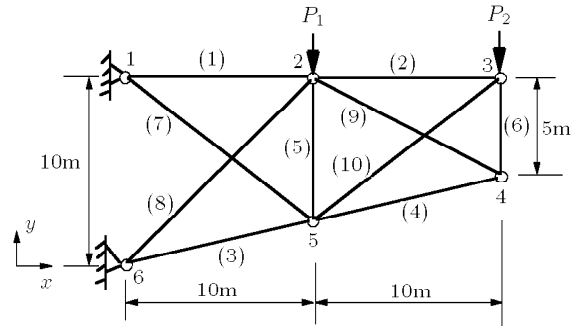


图 7 10 杆斜桁架结构

Fig.7 10-bar slope truss structure

设作用载荷  $P_1, P_2$  为不确定参数，两载荷的名义值均为  $1.0 \times 10^4 \text{N}$ ，用椭圆模型描述为

$$\delta_P = [\delta_{P1}, \delta_{P2}] \in E_P = \{\delta_P | \delta_P^T \mathbf{W}_P \delta_P \leq 1\}$$

其中  $\mathbf{W}_P = \begin{bmatrix} 19.7917 & -4.2098 \\ -4.2098 & 14.9306 \end{bmatrix}$ 。

杆件 1~6 的弹性模量为  $E_1$ ，杆件 7~10 的弹性模量为  $E_2$ ，均为不确定参量，其名义值分别为  $\bar{E}_1 = 2 \times 10^{11} \text{N/m}^2$  和  $\bar{E}_2 = 2.2 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ ，用椭圆模型描述为

$$\delta_E = [\delta_{E1}, \delta_{E2}] \in E_E = \{\delta_E | \delta_E^T \mathbf{W}_E \delta_E \leq 1\}$$

其中  $\mathbf{W}_E = \begin{bmatrix} 15.2706 & -2.4599 \\ -2.4599 & 18.1110 \end{bmatrix}$ 。

分别取非概率可靠性指标为 1.0, 1.5 的情况进行优化，计算结果见表 5。

表 5 中第 2 列为各个不确定变量取名义值时的确定性优化结果，第 3,4 列分别为  $\eta = 1.0$  和  $\eta = 1.5$  时，用本文方法计算得到的不确定性优化结果。当存在不确定性参数时，名义值情况下确定性优化的结果是不可靠的，随着可靠性指标的提高，最终的优化值也相应增加，结构也更加安全。

另外考虑一种预计最不利组合的情况，即两载荷同时达到最大值 ( $P_{1\_max} = 1.2318 \times 10^4 \text{N}$ ,  $P_{2\_max} = 1.2669 \times 10^4 \text{N}$ )，而弹性模量同时达到最小值 ( $E_{1\_min} = 1.4826 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ ,  $E_{2\_min} = 1.67728 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ )。该情况为上述非确定椭圆模型的外接方盒的角点。可以计算出此时非概率可靠

性指标大于“临界”状态指标 1.0, 为 1.32. 此时的优化结果见表 5 中第 5 列, 正如预计的, 对应的材料总体积介于本文方法指定  $\eta = 1.0$  和  $\eta = 1.5$  得到的两个结果之间.

表 5 10 杆斜桁架体积优化结果  
Table 5 Optimal volume solutions for  
the 10-bar slope truss

Quantity Member number	Cross-sectional area( $10^{-2}\text{m}^2$ )			
	Nominal case	$\eta = 1.0$	$\eta = 1.5$	Intending worst condition
1	1.306 5	2.104 1	2.597 0	2.165 7
2	0.812 2	1.248 9	1.564 8	1.407 8
3	1.323 5	2.118 5	2.672 3	2.186 7
4	0.006 5	0.006 5	0.006 5	0.006 5
5	0.006 5	0.006 5	0.006 5	0.006 5
6	0.006 5	0.006 5	0.006 5	0.006 5
7	0.492 4	0.699 4	0.885 9	0.832 0
8	0.580 5	0.819 1	0.938 7	0.962 1
9	0.006 5	0.006 5	0.006 5	0.006 5
10	0.973 1	1.409 9	1.770 5	1.654 5
Volume/ $\text{m}^3$	0.615 8	0.935 4	1.158 6	1.031 8

## 5 结 论

作为非确定性结构优化的一种重要模型, 非概率可靠性优化模型在缺乏足够数据实施概率可靠度分析时具有重要意义. 而不确定性的凸模型描述能够把超椭圆凸集与区间变量统一起来, 已成为结构非概率分析和设计中很有前途的发展方向. 本文用凸模型描述结构的不确定性, 研究了在非概率可靠性指标约束下的结构优化问题. 文中提出的基于目标性能的优化方法, 与文献中已有方法具有本质意义的区别. 该方法通过寻找目标性能点来判断约束的满足情况, 而不是直接计算非概率可靠性指标, 解决了原优化模型计算困难的问题. 与已有方法相比, 本文方法计算效率高, 收敛稳定. 同时, 作为外层优化问题的结构优化问题中的可靠性指标的灵敏度计算公式简便, 从而大大减少了优化问题求解的计算工作量.

## 参 考 文 献

- Zhan Kang. Robust Design Optimization of Structures under Uncertainties. Shaker Verlag, Aachen, Germany, 2005
- Doltsinis I, Zhan Kang. Robust design of structures using optimization methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193: 2221~2237
- Doltsinis I, Zhan Kang, Cheng Gengdong. Robust design of non-linear structures using optimization methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194: 1779~1795
- Frangopol DM, Corotis RB. Reliability-based structural system optimization: state-of-the-art versus state-of-the-practice. In: Cheng FY, ed. Analysis and Computation. New York: ASCE, 1996. 67~76
- Allen M, Maute K. Reliability-based design optimization of aeroelastic structure. AIAA Paper, 2002~5560, 2002
- Elishakoff I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from A M Freudenthal's criticisms to modern convex modelling. *Computers & Structures*, 1995, 56(6): 871~895
- Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability. *Structural Safety*, 1994, 14(4): 227~245
- Ben-Haim Y. A non-probabilistic measure of reliability of linear systems based on expansion of convex models. *Structural Safety*, 1995, 17(2): 91~109
- Elishakoff I. Discussion on a non-probabilistic concept of reliability. *Structural Safety*, 1995, 17(3): 195~199
- Qiu ZP, Elishakoff I. Anti-optimization of structures with large uncertain-but-non-random parameters via interval analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 152: 361~372
- Elishakoff I, Haftka RT, Fang J. Structural design under bounded uncertainty optimization with anti-optimization. *Computers & Structures*, 1994, 53: 1401~1405
- Lombardi M, Haftka RT. Anti-optimization technique for structural design under load uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 157: 19~31
- Ganzerli S, Pantelides CP. Optimum structural design via convex model superposition. *Computers & Structures*, 2000, 74: 639~647
- 郭书祥, 吕震宙. 基于非概率模型的结构可靠性优化设计. 计算力学学报, 2002, 19(2): 198~201 (Guo Shuxiang, Lu Zhenzhou. Optimization of uncertain structures based on non-probabilistic reliability. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, 19(2): 198~201 (in Chinese))
- 郭书祥, 吕震宙. 结构的非概率可靠性方法和概率可靠性方法的比较. 应用力学学报, 2003, 20(3): 107~110 (Guo Shuxiang, Lu Zhenzhou. Comparison between the non-probabilistic and probabilistic reliability methods for uncertain structure design. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2003, 20(3): 107~110 (in Chinese))
- 曹鸿钧, 段宝岩. 基于凸集合模型的非概率可靠性研究. 计算力学学报, 2005, 22(5): 546~549 (Cao Hongjun, Duan Baoyan. An approach on the non-probabilistic reliability of structures based on uncertainty convex models. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, 22(5): 546~549 (in Chinese))
- 曹鸿钧, 段宝岩. 基于非概率可靠性的结构优化设计研究. 应用力学学报, 2005, 22(3): 381~385 (Cao Hongjun, Duan Baoyan. Approach in optimization of uncertain structures based on non-probabilistic reliability. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2005, 22(3): 381~385 (in Chinese))



18 Jean-Fancois, Barthelemy M, Sobieszczanski-Sobieski J. nonlinear programming. *AIAA Journal*, 1983, 21(6): Optimum sensitivity derivatives of objective function in 913~915

## ON STRUCTURAL OPTIMIZATION FOR NON-PROBABILISTIC RELIABILITY BASED ON CONVEX MODELS<sup>1)</sup>

Kang Zhan<sup>2)</sup> Luo Yangjun

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

**Abstract** This paper discusses the setting and numerical solution of the non-probabilistic reliability-based structural optimization problem. Based on the convex model description for parameter scatters, the optimal design of non-deterministic structures is formulated as a nested optimization problem, in which the inner loop concerns a Min-max problem for evaluation of the reliability index. A performance measure-based method is proposed, where the feasibility of a design is determined through minimization of the performance function value within the parameter domain. The expensive computation of the non-probabilistic reliability index, as needed in the conventional approach, is thus avoided. The proposed approach is applicable to structural optimization problems accounting for deviations of material properties, geometrical dimensions and loading conditions. Moreover, the design sensitivity of the minimum performance function value can be readily evaluated. Numerical examples show the validity and efficiency of the present method.

**Key words** structural optimization, convex model, non-probabilistic reliability, sensitivity analysis, target performance approach

---

Received 15 December 2005, revised 28 February 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China(90305019, 10421002), the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University (PCSIRT).

2) E-mail: zhankang@dlut.edu.cn