

套管 - 水泥环 - 地层应力分布的理论解¹⁾

殷有泉* 陈朝伟† 李平恩*,2)

*(北京大学工学院力学与空天技术系, 北京 100871)

†(北京大学地球与空间科学学院地球物理系, 北京 100871)

摘要 利用弹性力学理论研究地应力场中套管 - 水泥环 - 地层系统应力分布的理论解, 在求解过程中, 将原问题分解为两个相对简单的子问题. 考虑到套管井系统是层状结构的特点, 且各层受力情况具有相似性, 进一步地, 基于两个弹性力学平面应变基本问题的解, 采用结构力学的求解思想, 由位移连续条件分别求得了两个子问题的解, 最后由叠加原理得到了原问题的理论解.

关键词 套管 - 水泥环 - 地层系统, 应力分布, 理论解, 平面应变问题, 叠加原理

中图分类号: O346 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2006)06-0835-08

引 言

在石油工业中广泛采用套管井, 固井后油水井在使用过程中经常发生套管损坏. 这是由于地层多少具有流变性质, 在地应力的作用下, 套管承受不断变化的压力, 在充分长的时间内这种压力趋于稳定, 这种稳定压力就是用弹性力学方法确定的套管载荷. 为了预防套损, 研究地应力场中套管 - 水泥环 - 地层的应力分布在石油工业中显得非常重要. 由于要获得该问题的理论解难度较大, 目前主要采用数值方法来进行研究. 殷有泉等^[1]采用有限元方法研究了地应力场中蠕变地层中套管的载荷, 但是没有考虑水泥环的影响. 房军等^[2]采用有限元数值方法, 分析计算了地应力作用下套管 - 水泥环结构的受力与变形. 采用数值方法只能针对具体问题进行计算, 难以对所得结果做深入分析, 给出规律性的结论. 房军等^[3,4]力图用弹性理论方法解决这个问题, 他们提出了正确的思路, 但由于过程过于繁琐和推导有误, 没能得到正确的解析表达式.

本文采用弹性力学的方法, 致力于求解套管 - 水泥环 - 地层应力分布的理论解. 针对所研究问题的特点, 将原问题分解为两个相对简单的子问题. 在求解子问题过程中, 基于两个弹性力学平面应变基本问题的解, 利用套管 - 水泥环 - 地层各层之间的位移连续条件, 求得了套管、水泥环载荷参数的解

析表达式. 最后由叠加原理全面获得了套管 - 水泥环 - 地层应力分布的解析解.

1 平面应变问题的提出

在地层深处的套管, 其纵向变形受到限制, 如不考虑地应力沿纵深的变化, 问题可简化为平面应变问题, 取图 1 所示的地层 - 水泥环 - 套管系统为研究对象. 设套管、水泥环和地层的内半径分别为 a_0 , a 和 a_1 . 为了研究的方便, 引入地层外半径 b , 则有 $b \gg a_1$. 在一般情况下, 水平最大主压应力 σ_H 和最小主压应力 σ_h 不相等. 采用弹性力学的符号约定,

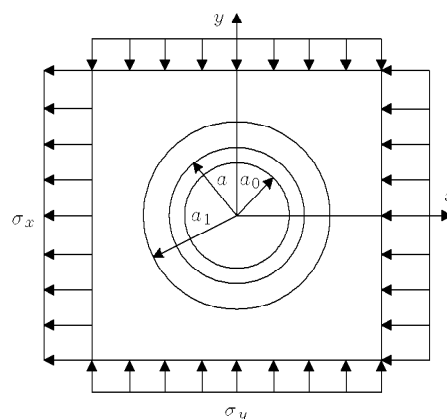


图 1 地应力场套管井受力模型

Fig.1 The loading model of cased hole

2005-12-14 收到第 1 稿, 2006-07-31 收到修改稿.

1) 教育部博士点专项科研基金资助项目 (20050001016).

2) E-mail: pingen@pku.edu.cn

以拉应力为正, 压应力为负, σ_H 和 σ_h 仅表示主压应力的数值.

取最大主压应力方向为 x 轴方向, 引入平均地应力 $\sigma = (\sigma_H + \sigma_h)/2$ 和偏差地应力 $s = (\sigma_H - \sigma_h)/2$. 地应力在直角坐标下可表示为 $\sigma_x = -\sigma_H$, $\sigma_y = -\sigma_h$. 在极坐标下, 应力可以分解为

$$\sigma_r = -\sigma, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (1)$$

和

$$\sigma_r = -s \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = s \sin 2\theta \quad (2)$$

在平均地应力条件 (1) 下求解套管 - 水泥环 - 地层应力分布是一个轴对称问题, 下文称为问题 A, 在偏差地应力条件 (2) 下求解的问题称为问题 B. 分别求解这两个问题, 将它们的解叠加, 便得到原问题的解.

对于弹性力学平面应变问题, 非零应力分量有 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 和 σ_z ; 非零应变分量有 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{r\theta}$; 非零位移分量有 u_r, u_θ . 不考虑体积力, 有平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

几何方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

在平面应变情况, $\varepsilon_z = 0$, 有本构关系

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 E 和 ν 分别是材料的弹性模量和泊松比.

采用应力函数法进行求解, 应力函数 $\Phi(r, \theta)$ 应满足双调和方程

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (6)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (7)$$

在极坐标下, Airy 应力函数 $\Phi(r, \theta)$ 与应力分量的关系可写成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

于是在平面应变问题中求解应力问题归结为求解满足双调和方程 (6) 的应力函数 Φ . 一旦 Φ 被求出, 由式 (8) 可求出应力分量, 进而由式 (5) 求出应变分量, 由式 (4) 求出位移分量.

考虑套管、水泥环和地层胶结良好的情况, 对于问题 A, 由于是轴对称问题, 有应力边界条件

$$\sigma_{rr}^c(a_0) = 0 \quad (r = a_0), \quad \sigma_{rr}^s(b) = -\sigma \quad (r = b) \quad (9)$$

以及各区域界面的位移和应力的连接条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^c(a) &= \sigma_{rr}^s(a), \quad u_r^c(a) = u_r^s(a) \quad (r = a) \\ \sigma_{rr}^c(a_1) &= \sigma_{rr}^s(a_1), \quad u_r^c(a_1) = u_r^s(a_1) \quad (r = a_1) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

用指标 c, s 分别表示属于套管 (casing) 和属于地层 (stratum) 的量, 未注明指标的量是属于水泥环的量. 建立如图 2 所示的三区域受力模型.

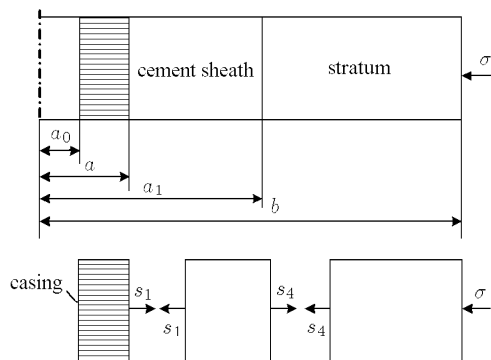


图 2 问题 A 三区域受力模型

Fig.2 Three-zone loading model of problem A

设 s_1 为套管载荷, s_4 为水泥环载荷. s_1 和 s_4 都是代数值, 在计算结果中, 它们为负值时, 表示为压力. 在远场地层边界 $r = b$ 上作用以均布地应力 σ , 它本身取算数值, 方向表示在图中. 各区域的受力情况画在图 2 中, 这样在 3 个区域的界面上应力连续条件自动满足, 以后仅需考虑位移的连续条件. 由图 2 可以看出, 3 个区域的受力情况其实是相同的, 都可以用厚壁圆筒内外边界受均布载荷的力学模型来模拟, 不同的只是载荷和材料参数的差异.

对于问题 B, 有应力边界条件

$$\left. \begin{aligned} r = \sigma_{rr}^c(a_0) = 0, \quad \tau_{r\theta}^c(a_0) = 0 \quad (r = a_0) \\ \sigma_{rr}^s(b) = -s \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^s(b) = s \sin 2\theta \quad (r = b) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

以及各区域界面的应力和位移的连接条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}^c(a) = \sigma_{rr}^s(a), \quad \tau_{r\theta}^c(a) = \tau_{r\theta}^s(a) \quad (r = a) \\ u_r^c(a) = u_r^s(a), \quad u_\theta^c(a) = u_\theta^s(a) \\ \sigma_{rr}(a_1) = \sigma_{rr}^s(a_1), \quad \tau_{r\theta}(a_1) = \tau_{r\theta}^s(a_1) \\ u_r(a_1) = u_r^s(a_1), \quad u_\theta(a_1) = u_\theta^s(a_1) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

理论上已经证明, 偏差地应力条件下套管和地层内部的径向应力有余弦形式, 切向应力有正弦形式 [5]. 因此, 如果将水泥环单独隔离, 设在水泥环的内外边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(a) = -s_2 \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}(a) = -s_3 \sin 2\theta \quad (r = a) \\ \sigma_r(a_1) = s_5 \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}(a_1) = s_6 \sin 2\theta \quad (r = a_1) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

隔离套管, 则套管的内外边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^c(a_0) = 0, \quad \tau_{r\theta}^c(a_0) = 0 \quad (r = a_0) \\ \sigma_r^c(a) = s_2 \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^c(a) = s_3 \sin 2\theta \quad (r = a) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

隔离地层, 则地层的内外边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^s(a_1) = s_5 \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^s(a_1) = s_6 \sin 2\theta \quad (r = a_1) \\ \sigma_r^s(b) = -s \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^s(b) = s \sin 2\theta \quad (r = b) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

取各区域为隔离体, 则式 (13)~(15) 的边界条件与式 (11),(12) 的应力边界条件和各区域界面的应力连接条件等价, 因此以后仅需要考虑式 (12) 中的位移连续条件. 同时由式 (13)~(15) 也可以看出, 各区域的受力情况相同, 都是厚壁圆筒内外边界受余弦和正弦形式的载荷, 只是载荷参数和材料参数不同. 于是, 经过以上分析可知, 对于问题 A 和 B, 可以通过两个平面应变基本问题的解, 利用位移连接条件较容易地得到原问题的解. 这两个平面应变基本问题是: (1) 厚壁圆筒内外边界受均布载荷问题; (2) 厚壁圆筒内外边界受余弦和正弦形式的载荷问题. 下面分别给出它们的解.

1.1 厚壁圆筒受均布载荷

首先讨论厚壁圆筒内外边界受均布载荷问题,

这是个轴对称问题, 已有现成解, 最早由 Lamé 给出, 因此称为 Lamé 问题 [6]. 如图 3 所示, 圆筒内外半径分别为 a 和 b , 其内外壁分别承受内外压力 q_1 , q_4 , 这里 q_1 和 q_4 都是边界应力的数值, 令 $m = a/b$, 其边界条件可写为

$$\sigma_r(a) = -q_1 \quad (r = a), \quad \sigma_r(b) = q_4 \quad (r = b) \quad (16)$$

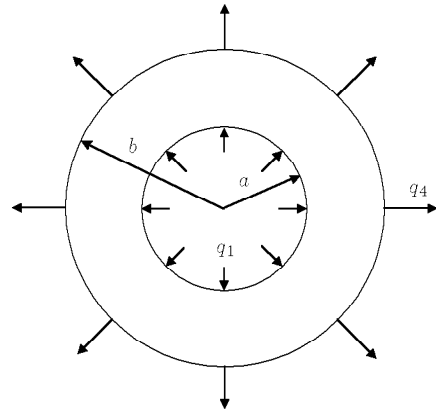


图 3 承受内外压力的厚壁圆筒示意图

Fig.3 A thick cylinder under pressure

直接给出应力分布的解析表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r) &= \frac{m^2}{1-m^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) q_1 + \frac{1}{1-m^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) q_4 \\ \sigma_\theta(r) &= \frac{m^2}{1-m^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) q_1 + \frac{1}{1-m^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) q_4 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

将应力式 (17) 中的应力分量代入本构关系式 (5), 得到应变分量 ε_θ , 再由几何关系式 (3) 得位移

$$u_r = \frac{(1+\nu)r}{E(1-m^2)} \left[(1-2\nu)(m^2 q_1 + q_4) + \frac{a^2}{r^2} (q_1 + q_4) \right] \quad (18)$$

将 $r = a$ 和 $r = b$ 代入上式, 引入厚壁筒的柔度系数

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= \frac{(1-2\nu)m^2 + 1}{1-m^2} \frac{(1+\nu)a}{E} \\ c_{12} &= \frac{2(1-\nu)}{1-m^2} \frac{(1+\nu)a}{E} \\ c_{21} &= \frac{2(1-\nu)m^2}{1-m^2} \frac{(1+\nu)b}{E} \\ c_{22} &= \frac{(1-2\nu) + m^2}{1-m^2} \frac{1}{m} \frac{(1+\nu)a}{E} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

可将内外边界的位移表示为

$$u_r(a) = c_{11} q_1 + c_{12} q_4, \quad u_r(b) = c_{21} q_1 + c_{22} q_4 \quad (20)$$

1.2 厚壁圆筒受余弦和正弦形式分布载荷

这个问题的解析解目前还没有见到, 利用弹性理论, 首先求解了该问题的理论解. 考虑一受余弦和正弦形式分布载荷的厚壁圆筒, 如图 4 所示, 其内半径为 a , 外半径为 b , 取极坐标形式, 则内外壁上的应力边界条件可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -q_2 \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = -q_3 \sin 2\theta \quad (r=a) \\ \sigma_r &= q_5 \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = q_6 \sin 2\theta \quad (r=b) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

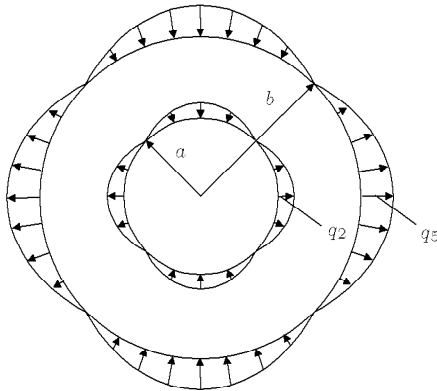


图 4 厚壁圆筒受余弦和正弦形式分布载荷

Fig.4 Thick cylinder under cosine and sine distribution load

应力函数 Φ 可取为

$$\Phi(r, \theta) = f(r) \cos 2\theta \quad (22)$$

将上式代入双调和方程式 (6), 待定函数 $f(r)$ 应满足

$$f'''' + \frac{2}{r}f''' - \frac{9}{r^2}f'' + \frac{9}{r^3}f' = 0 \quad (23)$$

这是一个四阶欧拉常微分方程, 它的通解是

$$f(r) = A\left(\frac{r}{a}\right)^2 + B\left(\frac{a}{r}\right)^2 + C\left(\frac{r}{a}\right)^4 + D \quad (24)$$

将通解取为上面形式, 优点是待定常数 A, B, C, D 有相同的量纲. 由式 (8) 可得用应力函数表示的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left[-\frac{2A}{a^2} - \frac{6B}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \frac{4D}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \left[\frac{2A}{a^2} + \frac{6B}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{12C}{a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \left[\frac{2A}{a^2} - \frac{6B}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \frac{6C}{a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{2D}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

将式 (25) 代入边界条件式 (21), 并令 $m = a/b$, 可以解得

$$\left. \begin{aligned} \frac{2A}{a^2} &= \frac{1}{(1-m^2)^3} [-(2m^2 + m^4 + m^6)q_2 + 2m^2q_3 - \\ &\quad (1 + m^2 + 2m^4)q_5 + 2m^4q_6] = n_1 \\ \frac{6B}{a^2} &= \frac{1}{(1-m^2)^3} [-(1 + 3m^2)q_2 + 2q_3 - \\ &\quad (3 + m^2)q_5 + 2m^2q_6] = n_2 \\ \frac{6C}{a^2} &= \frac{1}{(1-m^2)^3} [(3m^4 + m^6)q_2 - (3m^4 - m^6)q_3 + \\ &\quad (m^2 + 3m^4)q_5 + (m^2 - 3m^4)q_6] = n_3 \\ \frac{2D}{a^2} &= \frac{1}{(1-m^2)^3} [(1 + m^2 + 2m^4)q_2 - (1 + m^2)q_3 + \\ &\quad (2 + m^2 + m^4)q_5 - (m^2 + m^4)q_6] = n_4 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

引用新的参数 n_1, n_2, n_3 和 n_4 , 如上式所示, 应力分量 (25) 可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left[-n_1 - n_2\left(\frac{a}{r}\right)^4 - 2n_4\left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \left[n_1 + n_2\left(\frac{a}{r}\right)^4 + 2n_3\left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \left[n_1 - n_2\left(\frac{a}{r}\right)^4 + n_3\left(\frac{r}{a}\right)^2 - n_4\left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

利用本构关系式 (5) 求出应变分量 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ 和 $\varepsilon_{r\theta}$, 再利用几何关系式 (3) 可求出位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{(1+\nu)a}{E} \left[-n_1\frac{r}{a} + \frac{n_2}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 - \frac{2}{3}\nu n_3\left(\frac{r}{a}\right)^3 + \right. \\ &\quad \left. 2(1-\nu)n_4\left(\frac{a}{r}\right) \right] \cos 2\theta \\ u_\theta &= \frac{(1+\nu)a}{E} \left[n_1\frac{r}{a} + \frac{n_2}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1}{3}(3-2\nu)n_3\left(\frac{r}{a}\right)^3 - \right. \\ &\quad \left. (1-2\nu)n_4\left(\frac{a}{r}\right) \right] \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

上式中分别令 $r = a$ 和 $r = b$, 并利用式 (27), 将 n_1, n_2, n_3 和 n_4 的具体表达式代入, 可得到在内外边界上的位移为

$$\left. \begin{aligned} u_r(a) &= \frac{(1+\nu)a}{(1-m^2)^3 E} [c'_{11}q_2 + c'_{12}q_3 + \\ &\quad c'_{13}q_5 + c'_{14}q_6] \cos 2\theta \\ u_\theta(a) &= \frac{(1+\nu)a}{(1-m^2)^3 E} [c'_{21}q_2 + c'_{22}q_3 + \\ &\quad c'_{23}q_5 + c'_{24}q_6] \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (29a)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r(b) &= \frac{(1+\nu)b}{(1-m^2)^3 E} [c'_{31}q_2 + c'_{32}q_3 + \\ &\quad c'_{33}q_5 + c'_{34}q_6] \cos 2\theta \\ u_\theta(b) &= \frac{(1+\nu)b}{(1-m^2)^3 E} [c'_{41}q_2 + c'_{42}q_3 + \\ &\quad c'_{43}q_5 + c'_{44}q_6] \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (29b)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} c'_{11} &= \left(\frac{5}{3} - 2\nu\right) + (3 - 2\nu)m^2 + (5 - 6\nu)m^4 + \\ &\quad \left(1 - \frac{2\nu}{3}\right)m^6 \\ c'_{12} &= -\left(\frac{4}{3} - 2\nu\right) - 2(2 - \nu)m^2 + 2\nu m^4 - \frac{2}{3}\nu m^6 \\ c'_{13} &= 4(1 - \nu) + \frac{8}{3}(1 - \nu)m^2 + 4(1 - \nu)m^4 \\ c'_{14} &= -\frac{4}{3}(1 - \nu)m^2 - 4(1 - \nu)m^4 \\ c'_{21} &= -\left(\frac{4}{3} - 2\nu\right) - 2(2 - \nu)m^2 + 2\nu m^4 - \frac{2}{3}\nu m^6 \\ c'_{22} &= \left(\frac{5}{3} - 2\nu\right) + (3 - 2\nu)m^2 - (3 - 2\nu)m^4 + \\ &\quad \left(1 - \frac{2\nu}{3}\right)m^6 \\ c'_{23} &= -4(1 - \nu) - \frac{4}{3}(1 - \nu)m^2 \\ c'_{24} &= \frac{8}{3}(1 - \nu)m^2 \\ c'_{31} &= 4(1 - \nu)m^2 + \frac{8}{3}(1 - \nu)m^4 + 4(1 - \nu)m^6 \\ c'_{32} &= -4(1 - \nu)m^2 - \frac{4}{3}(1 - \nu)m^4 \\ c'_{33} &= \left(1 - \frac{2\nu}{3}\right) + (5 - 6\nu)m^2 + (3 - 2\nu)m^4 + \\ &\quad \left(\frac{5}{3} - 2\nu\right)m^6 \\ c'_{34} &= -\frac{2}{3}\nu + 2\nu m^2 - 2(2 - \nu)m^4 - 2\left(\frac{2}{3} - \nu\right)m^6 \\ c'_{41} &= -\frac{4}{3}(1 - \nu)m^4 - 4(1 - \nu)m^6 \\ c'_{42} &= \frac{8}{3}(1 - \nu)m^4 \\ c'_{43} &= -\frac{2}{3}\nu + 2\nu m^2 - 2(2 - \nu)m^4 - 2\left(\frac{2}{3} - \nu\right)m^6 \\ c'_{44} &= \left(1 - \frac{2\nu}{3}\right) - (3 - 2\nu)m^2 + (3 - 2\nu)m^4 + \\ &\quad \left(\frac{5}{3} - 2\nu\right)m^6 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

2 套管井系统应力分布的理论解

有了上面两个弹性力学平面应变基本问题的解以后, 下面开始求解套管 - 水泥环 - 地层的应力分布. 根据图 2, 取套管的弹性常数为 E_c, ν_c , 内外半径比 $m_c = a_0/a$; 地层的弹性常数为 E_s, ν_s , 内外半径比 $m_s = a_1/b$; 水泥环的弹性常数为 E, ν , 内外半径比 $m = a/a_1$.

2.1 问题 A 的求解

式 (19) 和式 (20) 直接给出了环形区域边界位移和边界力关系的一般表达式. 利用这两个公式可直接得到套管、水泥环和地层的相应公式. 对套管, 只要令 $q_1 = 0, q_2 = s_1$, 并用 a_0 代替 a , 用 a 代替 b , 考虑到 $m_c = a_0/a$, 则得套管位移和受力的关系为

$$u_r^c(a) = c^c s_1, \quad c^c = \frac{[(1 - 2\nu_c) + m_c^2] a(1 + \nu_c)}{1 - m_c^2 E_c} \quad (31)$$

对水泥环, 只要令 $q_1 = -s_1, q_2 = s_2$, 并用 a_1 代替 b , 则得水泥环位移与受力的关系为

$$u_r(a) = c_{11}(-s_1) + c_{12}s_4, \quad u_r(a_1) = c_{21}(-s_1) + c_{22}s_4 \quad (32)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= \frac{[(1 - 2\nu)m^2 + 1](1 + \nu)a}{(1 - m^2)E} \\ c_{12} &= \frac{2(1 - \nu)(1 + \nu)a}{1 - m^2 E} \\ c_{21} &= \frac{2(1 - \nu)m^2(1 + \nu)a_1}{1 - m^2 E} \\ c_{22} &= \frac{[(1 - 2\nu) + m^3](1 + \nu)a_1}{1 - m^2 E} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

对地层, 只要令 $q_1 = -s_4, q_2 = -\sigma$, 并用 a_1 代替 a , 则得地层位移与受力的关系为

$$\left. \begin{aligned} u_r^s(a_1) &= c_{11}^s(-s_4) + c_{12}^s(-\sigma) \\ u_r^s(b) &= c_{21}^s(-s_4) + c_{22}^s(-\sigma) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

注意到 $b^2 \gg a_1^2$, 即 $m_s^2 = (a_1/b)^2 \rightarrow 0$, 则在上式中, 有

$$\left. \begin{aligned} c_{11}^s &= \frac{(1 + \nu_s)a_1}{E_s}, \quad c_{12}^s = 2(1 - \nu_s)\frac{(1 + \nu_s)}{E_s}a_1 \\ c_{21}^s &= \frac{2(1 - \nu_s)m_s^2(1 + \nu_s)b}{1 - m_s^2 E_s} \\ c_{22}^s &= \frac{[(1 - 2\nu_s) + m_s^2](1 + \nu_s)b}{1 - m_s^2 E_s} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

将式 (31), (32) 和式 (34) 代入套管和水泥环的界面, 水泥环和地层的界面处的位移连续条件式 (10) 可解出套管载荷 s_1 和 s_4 为

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{-c_{12}c_{12}^s\sigma}{c^c c_{11}^s + c^c c_{22} + c_{11}^s c_{11} + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})} \\ s_4 &= \frac{-(c^c + c_{11})c_{12}^s\sigma}{c^c c_{11}^s + c^c c_{22} + c_{11}^s c_{11} + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

在以上各式中, c_{11}^s , c_{12}^s 和 c_{11} , c_{12} , c_{22} 等分别由式 (35) 和式 (33) 给出. 将套管载荷 s_1 , s_4 代入式 (16), 并利用各区域参数与基本解参数之间的关系, 可以得到平均地应力 σ 条件下套管 - 水泥环 - 地层的应力分布.

2.2 问题 B 的求解

下面求解问题 B, 套管、水泥环和地层在几何上都是环形区域, 它们所受的外力和相应位移的关系, 均可使用式 (29) 和式 (30) 得到. 首先, 将前面的结果用于水泥环. 根据前面的符号规定, 水泥环的内外半径分别是 a 和 a_1 , 因而在使用式 (29) 和式 (30) 时, 将 b 改写为 a_1 . 考虑到水泥环的内外边界条件式 (13), 则在使用式 (29) 时, 取 $q_2 = -s_2$, $q_3 = -s_3$, $q_5 = s_5$, $q_6 = s_6$, 于是得到水泥环的边界位移是

$$\left. \begin{aligned} u_r(a) &= \frac{(1+\nu)a}{(1-m^2)^3 E} [A_{11}s_2 + A_{12}s_3 + A_{13}s_5 + A_{14}s_6] \cos 2\theta \\ u_\theta(a) &= \frac{(1+\nu)a}{(1-m^2)^3 E} [A_{21}s_2 + A_{22}s_3 + A_{23}s_5 + A_{24}s_6] \sin 2\theta \\ u_r(a_1) &= \frac{(1+\nu)a_1}{(1-m^2)^3 E} [A_{31}s_2 + A_{32}s_3 + A_{33}s_5 + A_{34}s_6] \cos 2\theta \\ u_\theta(a_1) &= \frac{(1+\nu)a_1}{(1-m^2)^3 E} [A_{41}s_2 + A_{42}s_3 + A_{43}s_5 + A_{44}s_6] \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

其中 $A_{ij} = -c'_{ij}$ ($i = 1, 4; j = 1, 2$); $A_{ij} = c'_{ij}$ ($i = 1, 4; j = 3, 4$), c'_{ij} ($i, j = 1, 4$) 的具体表达式见式 (30).

其次, 将前面的结果用于地层. 地层的内外半径分别是 a_1 和 b , 因而使用式 (29) 时, 需将 a 改写为 a_1 , 并用 $m_s = a_1/b$ 代替 $m = a/b$. 注意到地层内外边界条件式 (15), 则在使用式 (19) 时, 应取 $a_1 \ll b$, $q_2 = -s_5$, $q_3 = -s_6$, $q_5 = -s$, $q_6 = s$, 考虑到地层的径向尺度较大, 即可取 $m_s = a_1/b = 0$, 地层

泊松比记为 ν_s , 于是得到地层内边界的位移是

$$\left. \begin{aligned} u_r^s(a_1) &= \frac{(1+\nu_s)a_1}{(1-m_s^2)^3 E_s} (A_{33}^s s_5 + A_{34}^s s_6 + r_3) \cos 2\theta \\ u_\theta^s(a_1) &= \frac{(1+\nu_s)a_1}{(1-m_s^2)^3 E_s} (A_{43}^s s_5 + A_{44}^s s_6 + r_4) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

考虑到地层的径向尺度较大, $a_1 \ll b$, 即可取 $m_s = a_1/b = 0$, 则上式中系数可表示为

$$\begin{aligned} A_{33}^s &= -\left(\frac{5}{3} - 2\nu_s\right), \quad A_{34}^s = \frac{4}{3} - 2\nu_s \\ A_{43}^s &= \frac{4}{3} - 2\nu_s, \quad A_{44}^s = -\left(\frac{5}{3} - 2\nu_s\right) \\ r_3 &= -4(1-\nu_s)s, \quad r_4 = 4(1-\nu_s)s \end{aligned}$$

最后, 将式 (29) 用于套管. 其中将 a 改写为 a_0 , b 改写为 a , m 改写为 $m_c = a_0/b$, 泊松比记为 ν_c . 考虑到套管的边界条件式 (14), 应取 $q_2 = q_3 = 0$, $q_5 = s_2$, $q_6 = s_3$, 于是套管外边界的位移是

$$\left. \begin{aligned} u_r^c(a) &= \frac{(1+\nu_c)a}{(1-m_c^2)^3 E_c} (A_{11}^c s_2 + A_{12}^c s_3) \cos 2\theta \\ u_\theta^c(a) &= \frac{(1+\nu_c)a}{(1-m_c^2)^3 E_c} (A_{21}^c s_2 + A_{22}^c s_3) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{11}^c &= \left(1 - \frac{2}{3}\nu_c\right) + (5 - 6\nu_c)m_c^2 + (3 - 2\nu_c)m_c^4 + \left(\frac{5}{3} - 2\nu_c\right)m_c^6 \\ A_{12}^c &= -\frac{2}{3}\nu_c + 2\nu_c m_c^2 - 2(2 - \nu_c)m_c^4 - \left(\frac{4}{3} - 2\nu_c\right)m_c^6 \\ A_{21}^c &= -\frac{2}{3}\nu_c + 2\nu_c m_c^2 - 2(2 - \nu_c)m_c^4 - \left(\frac{4}{3} - 2\nu_c\right)m_c^6 \\ A_{22}^c &= \left(1 - \frac{2}{3}\nu_c\right) - (3 - 2\nu_c)m_c^2 + (3 - 2\nu_c)m_c^4 + \left(\frac{5}{3} - 2\nu_c\right)m_c^6 \end{aligned}$$

在前面的分析和讨论中, s 是原场地应力的偏差分量, 它是事先已知的. 而 s_2 , s_3 , s_5 和 s_6 是未知的待定参数. 用这些待定参数可以表示所有的应力和位移. 要求解参数 s_2 , s_3 , s_5 和 s_6 具体数值 (代数数值), 要考虑式 (12) 中的套管水泥环界面 $r = a$ 以及水泥环地层界面 $r = a_1$ 上的位移连续条件. 总共有 4 个位移连续条件, 可以确定 4 个载荷参数 s_2 ,

s_3, s_5 和 s_6 . 将式 (37), (38) 和式 (39) 代入式 (12) 中的位移连续条件, 可写成如下便于解耦的方程组

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_{13} & \bar{C}_{14} \\ \bar{C}_{23} & \bar{C}_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

和

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} \\ \bar{C}_{41} & \bar{C}_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_{33} & \bar{C}_{34} \\ \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

其中

$$\bar{C}_{11} = A_{11} - \frac{(1-m^2)^3}{(1-m_c^2)^3} \frac{1+\nu_c}{1+\nu} \frac{E}{E_c} A_{11}^c$$

$$\bar{C}_{12} = A_{12} - \frac{(1-m^2)^3}{(1-m_c^2)^3} \frac{1+\nu_c}{1+\nu} \frac{E}{E_c} A_{12}^c$$

$$\bar{C}_{13} = A_{13}, \bar{C}_{14} = A_{14}$$

$$\bar{C}_{21} = A_{21} - \frac{(1-m^2)^3}{(1-m_c^2)^3} \frac{1+\nu_c}{1+\nu} \frac{E}{E_c} A_{21}^c$$

$$\bar{C}_{22} = A_{22} - \frac{(1-m^2)^3}{(1-m_c^2)^3} \frac{1+\nu_c}{1+\nu} \frac{E}{E_c} A_{22}^c$$

$$\bar{C}_{23} = A_{23}, \bar{C}_{24} = A_{24}, \bar{C}_{31} = A_{31}, \bar{C}_{32} = A_{32}$$

$$\bar{C}_{33} = A_{33} - \frac{(1+\nu_s)}{(1+\nu)} \frac{E}{E_s} (1-m^2)^3 A_{33}^s$$

$$\bar{C}_{34} = A_{34} - \frac{(1+\nu_s)}{(1+\nu)} \frac{E}{E_s} (1-m^2)^3 A_{34}^s$$

$$\bar{C}_{41} = A_{41}, \bar{C}_{42} = A_{42}$$

$$\bar{C}_{43} = A_{43} - \frac{(1+\nu_s)}{(1+\nu)} \frac{E}{E_s} (1-m^2)^3 A_{43}^s$$

$$\bar{C}_{44} = A_{44} - \frac{(1+\nu_s)}{(1+\nu)} \frac{E}{E_s} (1-m^2)^3 A_{44}^s$$

$$R = -4 \frac{(1+\nu_s)}{(1+\nu)} \frac{E}{E_s} (1-m^2)^3 (1-\nu_s) s$$

求解方程组式 (40) 有

$$\begin{bmatrix} s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\bar{C}_{13}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{14}\bar{C}_{23}} \cdot \begin{bmatrix} (\bar{C}_{11}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{21}\bar{C}_{14}) & (\bar{C}_{12}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{22}\bar{C}_{14}) \\ (\bar{C}_{13}\bar{C}_{21} - \bar{C}_{11}\bar{C}_{23}) & (\bar{C}_{13}\bar{C}_{22} - \bar{C}_{23}\bar{C}_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad (42)$$

将上式代入方程式 (41) 可解得

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= \frac{(B_{22} + B_{12})R}{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}} \\ s_3 &= -\frac{(B_{21} + B_{11})R}{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

其中

$$B_{11} = \bar{C}_{31} -$$

$$\frac{\bar{C}_{33}(\bar{C}_{11}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{21}\bar{C}_{14}) + \bar{C}_{34}(\bar{C}_{13}\bar{C}_{21} - \bar{C}_{11}\bar{C}_{23})}{\bar{C}_{13}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{14}\bar{C}_{23}}$$

$$B_{12} = \bar{C}_{32} -$$

$$\frac{\bar{C}_{33}(\bar{C}_{12}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{22}\bar{C}_{14}) + \bar{C}_{34}(\bar{C}_{13}\bar{C}_{22} - \bar{C}_{23}\bar{C}_{12})}{\bar{C}_{13}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{14}\bar{C}_{23}}$$

$$B_{21} = \bar{C}_{41} -$$

$$\frac{\bar{C}_{43}(\bar{C}_{11}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{21}\bar{C}_{14}) + \bar{C}_{44}(\bar{C}_{13}\bar{C}_{21} - \bar{C}_{11}\bar{C}_{23})}{\bar{C}_{13}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{14}\bar{C}_{23}}$$

$$B_{22} = \bar{C}_{42} -$$

$$\frac{\bar{C}_{43}(\bar{C}_{12}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{22}\bar{C}_{14}) + \bar{C}_{44}(\bar{C}_{13}\bar{C}_{22} - \bar{C}_{23}\bar{C}_{12})}{\bar{C}_{13}\bar{C}_{24} - \bar{C}_{14}\bar{C}_{23}}$$

将式 (43) 代入式 (42), 可得到 s_5 和 s_6 . 求得了套管和水泥环载荷 s_2, s_3, s_4 和 s_5 后, 代入式 (27) 中, 并注意到各区域材料参数与基本解参数之间的关系, 可以得到在偏差地应力 s 下的套管 - 水泥环 - 地层的应力分布.

将问题 A 和问题 B 的解叠加, 就得到原问题的理论解. 限于篇幅, 表达式的具体形式在这里就不给出了.

3 结 论

本文采用弹性力学理论, 由两个平面应变基本问题的解, 采用结构力学思想, 全面求解了地应力场中套管 - 水泥环 - 地层应力分布的解析解. 利用该理论解, 可以定量分析应力和位移场的分布规律. 通过定义有物理意义的参数, 还可以进一步分析材料参数对套管载荷的影响.

参 考 文 献

- 1 殷有泉, 李志明, 张广清. 蠕变地层套管载荷分析研究. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(14): 2381~2384 (Yin Youquan, Li Zhiming, Zhang Guangqing. Study on casing loading in creep formations. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(14): 2381~2384(in Chinese))
- 2 房军, 谷玉洪, 米丰珍. 非均匀载荷作用下套管挤压失效数值分析. 石油机械, 1999, 27(7): 34~37 (Fang Jun, Gu Yuhong,

- Mi Fengzhen. A numerical analysis of casing collapse under nonuniform load. *China Petroleum Machinery*, 1999, 27(7): 34~37 (in Chinese))
- 3 房军, 赵怀文, 岳伯谦. 非均匀地应力作用下套管与水泥环的受力分析. 石油大学学报, 1995, 19(6): 52~57 (Fang Jun, Zhao Huaiwen, Yue Boqian. Analysis of loading property of casing and cement sheath under nonuniform geologic stress. *Journal of University of Petroleum*, 1995, 19(6): 52~57 (in Chinese))
- 4 房军, 岳伯谦, 赵怀文. 非均匀地应力作用下套管和水泥环表面受力特征分析. 石油大学学报, 1997, 21(1): 46~48 (Fang Jun, Yue Boqian, Zhao Huaiwen. Analysis of surface loading on casing and cement sheath under nonuniform geologic stress. *Journal of University of Petroleum*, 1997, 21(1): 46~48 (in Chinese))
- 5 殷有泉, 蔡永恩, 陈朝伟. 非均匀地应力场中套管载荷的理论解. 石油学报, 2006, 27(4): 133~138 (Yin Youquan, Cai Yong'en, Chen Zhaowei. Theoretical solution of casing loading under nonuniform tectonic stress field. *Acta Petrolei Sinica*, 2006, 27(4): 133~138 (in Chinese))
- 6 王敏中, 王伟, 武际可. 弹性力学教程. 北京: 北京大学出版社, 2002 (Wang Minzhong, Wang Wei, Wu Jike. Elastic Mechanics. Beijing: Peking University Press, 2002 (in Chinese))

THEORETICAL SOLUTIONS OF STRESS DISTRIBUTION IN CASING-CEMENT AND STRATUM SYSTEM¹⁾

Yin Youquan* Chen Zhaowei[†] Li Ping'en*,²⁾

*(Department of Mechanics and Aerospace Engineering, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)

[†](Department of Geophysics, School of Earth and Space, Sciences, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract The theoretical solutions of a casing-cement-stratum system in the formation stress field are studied using the elasticity theory. The problem is divided into two relatively simple subproblems. The cased hole system is a cylindrical layer structure and the loading state of each layer is similar. The solutions of two plane strain basic problems can be used to obtain the analytic solutions of two subproblems through the continuity condition of displacement. The theoretical solutions for the stress distribution in casing-cement and stratum system are finally obtained by applying the superposition principle.

Key words casing-cement and stratum system, stress distribution, theoretical solution, plane strain problem, superposition principle

Received 14 December 2005, revised 31 July 2006.

1) The project supported by Doctoral Program Foundation of China Education Commission (20050001016).

2) E-mail: pingen@pku.edu.cn