

压 - 剪混合型定常扩展裂纹尖端的弹黏塑性场¹⁾

梁文彦²⁾ 王振清 周 博

(哈尔滨工程大学建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要 假定黏性系数与塑性等效应变率的幂次成反比, 考虑其黏性和裂纹面摩擦接触效应建立了压 - 剪混合型定常扩展裂纹尖端弹黏塑性场的渐近方程, 求得了裂纹尖端场不含应力、应变间断的数值解. 并讨论了压 - 剪混合型裂纹数值解随各个参数的变化规律, 计算结果和分析表明, 压 - 剪混合型裂纹尖端场是满塑性的, 不含弹性卸载区, 黏性效应是研究扩展裂纹尖端场时的一个重要因素. 无论混合裂纹趋近 I 型还是趋近 II 型, 静水压力随摩擦系数的增加都是增加的, 裂纹面摩擦效应是阻止裂纹扩展速度的因素, 且摩擦作用越强, 裂纹尖端场的韧性越高.

关键词 压 - 剪混合型裂纹, 定常扩展, 黏性效应, 弹黏塑性材料

中图分类号: O346.1 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2006)05-0618-08

引 言

裂纹尖端场附近由于大范围塑性变形和材料黏性效应的存在^[1], 使得动态扩展裂纹尖端应力、应变场的研究变得更为复杂. 在扩展裂纹尖端还存在着一些难以解决的问题, 如裂纹尖端场存在应力应变的间断线, 动态解不能退化为准静态解^[2~4], 其原因在于忽略材料的黏性效应.

裂纹在扩展过程中由于较高应变率的出现并产生大量不可逆的变形能, 一部分变形能以热的形式释放出来, 导致裂纹尖端局部温度升高, 此时材料具有黏性特征, 因而材料的黏性性质对材料断裂性能影响的研究受到越来越多的重视, 在此基础上文献[5]研究了 III 型裂纹问题, 讨论了弹性、塑性及黏性三者的匹配条件, 文献[6,7]研究了 I 型和 II 型裂纹问题, 讨论了 I 型和 II 型裂纹数值解的性质随各参数的变化规律. 但是, 上述认为裂纹面是光滑的, 无摩擦接触, 即忽略了裂纹面摩擦作用, 但是这种假设虽然解决了纯 I, II 型裂纹问题, 但是与实际工程情况并不相符, 实际工程有些情况是在混合荷载作用下裂纹扩展, 工程的实际要求力学工作者必须给出相应的理论基础来解释和解决物体在混合荷载作用下裂纹尖端场各个参数的变化情况, 文献[8]研究了压剪混合型裂纹准静态扩展的裂纹尖端场,

在裂纹面摩擦接触的条件下, 裂纹面间的摩擦作用越强, 裂尖区的断裂韧性越高, 文献[9]研究各向异性纤维复合材料板混合型裂纹尖端场. 但是在裂纹面摩擦接触的条件下, 压 - 剪混合型定常扩展裂纹尖端场各个参数具有怎样的变化形式? 摩擦系数对静水压力有何影响? 本文考虑裂纹尖端场的黏性效应, 假定黏性系数与塑性等效应变率的幂次成反比, 考虑其黏性和裂纹面摩擦接触效应对压 - 剪混合型定常扩展裂纹尖端弹黏塑性场进行渐近分析, 并讨论了压 - 剪混合型裂纹数值解随各个参数的变化规律, 分析了黏性和摩擦效应对裂尖场的影响.

1 基本方程

图 1 给出了压 - 剪混合型定常扩展裂纹的力学模型, 考虑一条半无限大的裂纹在无限大的固体中以恒定速度 V 沿 X_1 方向扩展, X_2 与裂纹面垂直, $X_\alpha (\alpha = 1, 2)$ 表示平面上的固定坐标系, 与裂纹尖端一起移动的随动坐标系为 oxy 和 $or\theta$. 对于定常扩展, 裂纹尖端场中任何物理量 Ω 的物质导数为

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{dt} = -V \frac{\partial \Omega}{\partial x} = V \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) \Omega \quad (1)$$

假定裂纹尖端场的黏性效应与等效塑性应变率

2005-11-18 收到第 1 稿, 2006-07-21 收到修改稿.

1) 哈尔滨工程大学基础研究基金资助项目 (002020260707).

2) E-mail: liangwenyan@hrbeu.edu.cn

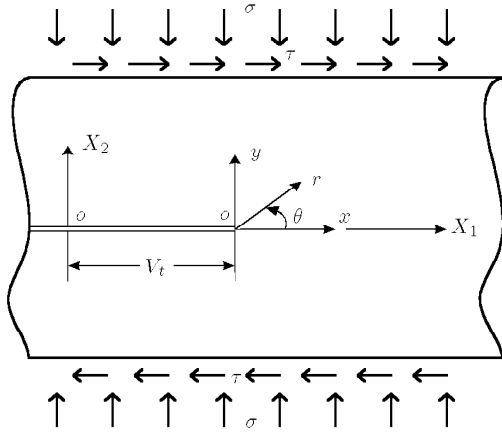


图 1 压 - 剪混合型裂纹力学模型

Fig.1 Mechanical model of mixed-mode crack-tip under compression and shear

有关, 设黏性系数 η 的形式为

$$\eta = C(\dot{\varepsilon}_p)^{-\beta} \quad (0 < \beta < 1) \quad (2)$$

式中 C 为非负常数, 图 2 给出了弹黏塑性材料的力学本构模型, 经过整理后可得理想塑性材料的弹黏塑性本构关系为^[10]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3S_{ij}}{2\bar{\sigma}} \left(\frac{2}{3C} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \cdot \frac{1}{H[\bar{\sigma} - \sqrt{3}K][\bar{\sigma} - \sqrt{3}K]^{\frac{1}{1-\beta}}} \quad (3)$$

其中 Heaviside 阶跃函数为

$$H[\bar{\sigma} - \sqrt{3}K] = \begin{cases} 1, & \text{当 } \bar{\sigma} - \sqrt{3}K > 0 \\ 0, & \text{当 } \bar{\sigma} - \sqrt{3}K \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

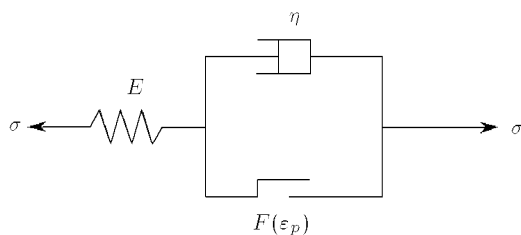


图 2 弹黏塑性力学模型

Fig.2 Elastic-viscoplastic constitutive model

假设应力具有如下形式的幂奇异性

$$\sigma_{ij} \sim r^{-\delta} \quad (0 < \delta < 1/2) \quad (5)$$

并进一步假定在裂纹尖端, 黏性应力和塑性应力同量级, 且弹性应变和塑性应变同量级, 可得

$$\delta = \frac{1}{\beta} - 1 \quad (6)$$

由 $0 < \delta < 1/2$, 可知仅考虑 $2/3 < \beta < 1$ 的情况即可。

2 压 - 剪混合型裂纹尖端场的渐近方程

对于平面应变压 - 剪混合型裂纹, 在极坐标下, 本构方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= -\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{4\mu} (\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta) + \\ &\quad \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2\bar{\sigma}} B(\bar{\sigma} - \sqrt{3}K)^{\frac{1}{1-\beta}} \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{r\theta} + \frac{\sigma_{r\theta}}{\bar{\sigma}} B(\bar{\sigma} - \sqrt{3}K)^{\frac{1}{1-\beta}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 $B = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3C} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}$ 。

裂纹尖端场应力张量 σ_{ij} 具有 $r^{-\delta}$ 的奇异性, 则应力分量可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= r^{-\delta} [P(\theta) + S(\theta)] \\ \sigma_\theta &= r^{-\delta} [P(\theta) - S(\theta)] \\ \sigma_{r\theta} &= r^{-\delta} T(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

等效应力则为

$$\bar{\sigma} = \Sigma(\theta) r^{-\delta}, \quad \Sigma(\theta) = \sqrt{3(S^2 + T^2)}^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$P(\theta)$, $S(\theta)$, $T(\theta)$ 和 $\Sigma(\theta)$ 为尖端场的角分布函数。

引入下列无量纲量, $\Delta = \Phi r^{-\delta}$, 式中 Φ 为非负常数。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{T}{\Delta}, \quad \tilde{S} = \frac{S}{\Delta}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{\Delta}, \quad \tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma}{\Delta} \\ M^2 &= \frac{\rho V^2}{\Delta}, \quad f = \frac{K}{\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

把各相关量代入运动方程和本构方程, 经无量纲化并整理得到混合型裂纹尖端场的控制方程

$$\tilde{S}' = \frac{2\delta h'}{\sin \theta} - \frac{2D^* \tilde{S}}{\tilde{\Sigma} \sin \theta} (\tilde{\Sigma} - \sqrt{3}f)^{\frac{1}{1-\beta}} - \delta \tilde{S} \cot \theta + 2\tilde{T} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}' &= \frac{2\delta h'}{\sin \theta} - \frac{2D^* \tilde{S}}{\tilde{\Sigma} \sin \theta} (\tilde{\Sigma} - \sqrt{3}f)^{\frac{1}{1-\beta}} - \delta \tilde{S} \cot \theta + \delta \tilde{T} - \\ &\quad \delta M^2 [h' \sin \theta - (1 - \delta) h \cos \theta] \end{aligned} \quad (12)$$

$$(1 - M^2 \sin^2 \theta) \tilde{T}' = M^2 \sin \theta [2\tilde{S} \sin \theta + \delta \tilde{T} \cos \theta +$$

$$\frac{2D^* \tilde{T}}{\tilde{\Sigma}} (\tilde{\Sigma} - \sqrt{3}f)^{\frac{1}{1-\beta}} + (1 - \delta^2) h] -$$

$$M^2[(1-\delta)h\sin\theta+\delta h'\cos\theta]+\delta(\tilde{P}+\tilde{S})-2\tilde{S} \quad (13)$$

$$(1-M^2\sin^2\theta)h''=$$

$$-(1-\delta^2)h-\delta\tilde{T}\cos\theta-\frac{2D^*\tilde{T}}{\tilde{\Sigma}}(\tilde{\Sigma}-\sqrt{3}f)^{\frac{1}{1-\beta}}-\delta(\tilde{P}+\tilde{S})\sin\theta+M^2\sin\theta[(1-\delta)h\sin\theta+\delta h'\cos\theta] \quad (14)$$

$$D^*=D\cdot\Delta^{\frac{1}{1-\beta}}=\frac{\tilde{H}}{V}\left(\frac{2\Delta}{3C}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \quad (15)$$

3 混合型裂纹的表征参数和边界条件

3.1 表征参数

本文引入 Shih^[11] 提出载荷混合参数 M_P , 来表征裂纹尖端的应力状态, 则 M_P 表达式为

$$\left. \begin{aligned} M_P &= \frac{2}{\pi} \arctg \left(\lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{\sigma_\theta(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right| \right) \\ M_P &= \frac{2}{\pi} \arctg \left(\left| \frac{P(0) - F(0)}{T(0)} \right| \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

当 $M_P = 1$ 时, 裂纹尖端承受拉(压)载荷, 属于 I 型裂纹问题; 当 $M_P = 0$ 时, 裂纹尖端承受剪切载荷, 属于 II 型裂纹问题; 当 $0 < M_P < 1$ 时, 裂纹尖端同时承受拉(压)载荷与剪切载荷, 属于混合型裂纹问题. 在压应力下, 裂纹发生闭合, 且闭合的裂纹表面还会对沿面产生摩擦力.

3.2 边界条件

压 - 剪混合型裂纹的边界条件包括裂纹前方 ($\theta = 0$) 的连接条件、裂纹面 ($\theta = \pi$) 的摩擦接触条件:

(1) 裂纹前方 ($\theta = 0$) 的连接条件

$$\left\{ \begin{aligned} g'(\pm 0) &= 0, \quad g(\pm 0) = 0 \\ \tilde{P}(\pm 0) + \tilde{S}(\pm 0) &= 0, \quad \tilde{P}(\pm 0) - \tilde{S}(\pm 0) < 0 \\ \tilde{T}(\pm 0) &> 0 \end{aligned} \right.$$

(2) 裂纹面 ($\theta = \pi$) 的摩擦接触条件

假设裂纹表面的摩擦符合 Coulomb 摩擦律, 则摩擦接触的边界条件为

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{P}(\pm\pi) - \tilde{S}(\pm\pi) &\leq 0 \\ \tilde{T}(\pm\pi) &= -\mu[\tilde{P}(\pm\pi) - \tilde{S}(\pm\pi)] \\ g(\pm\pi) &= 0 \end{aligned} \right.$$

4 数值计算与结果分析

满足裂纹连接条件和摩擦接触条件的数值解中共有 5 个参数需要选择: 反映裂纹扩展速度的参数 M , 反映材料黏性的系数 D^* , 指数 β , 摩擦系数 μ 和荷载混合参数 M_P . 控制方程组的求解属于两点边值问题, 由于定解条件不足, 将 $h'(0)$ 和 $T(0)$ 作为可调参数, 通过双参数打靶法将边值问题化为初值问题进行求解. 本文取 $M_P = 0.84$ 和 $M_P = 0.34$ 两个固定, 即趋近 I 型和 II 型裂纹. 随着参数的变化, 弹黏塑性材料混合型动态扩展裂纹的应力场、应变场和位移场也随之发生变化. 表 1~ 表 4 给出 $M_P = 0.84$ 时解随着参数的变化数值, 图 3~ 图 6 给出 $M_P = 0.84$ 和 $M_P = 0.34$ 时裂纹尖端场各个物理量的变化情况.

表 1 解随 M 的变化

Table 1 Variations of solution according to different M ($D^* = 10, \beta = 0.8, \mu = 0.2, M_P = 0.84$)

	0.001	0.01	0.1	0.3
$\tilde{T}(0)(e^{-1})$	1.133 1	1.133 2	1.138 2	1.181 1
$h'(0)(e^{-2})$	-9.375 5	-9.376 9	-9.521 0	10.866

表 2 解随 D^* 的变化

Table 2 Variations of solution according to different D^* ($M = 0.1, \beta = 0.8, \mu = 0.2, M_P = 0.84$)

	2.0	5.0	10	100
$\tilde{T}(0)(e^{-1})$	1.701 9	1.353 5	1.138 15	0.640 0
$h'(0)(e^{-2})$	-14.238	-11.323	-0.952 1	-0.535 1

表 3 解随 β 的变化

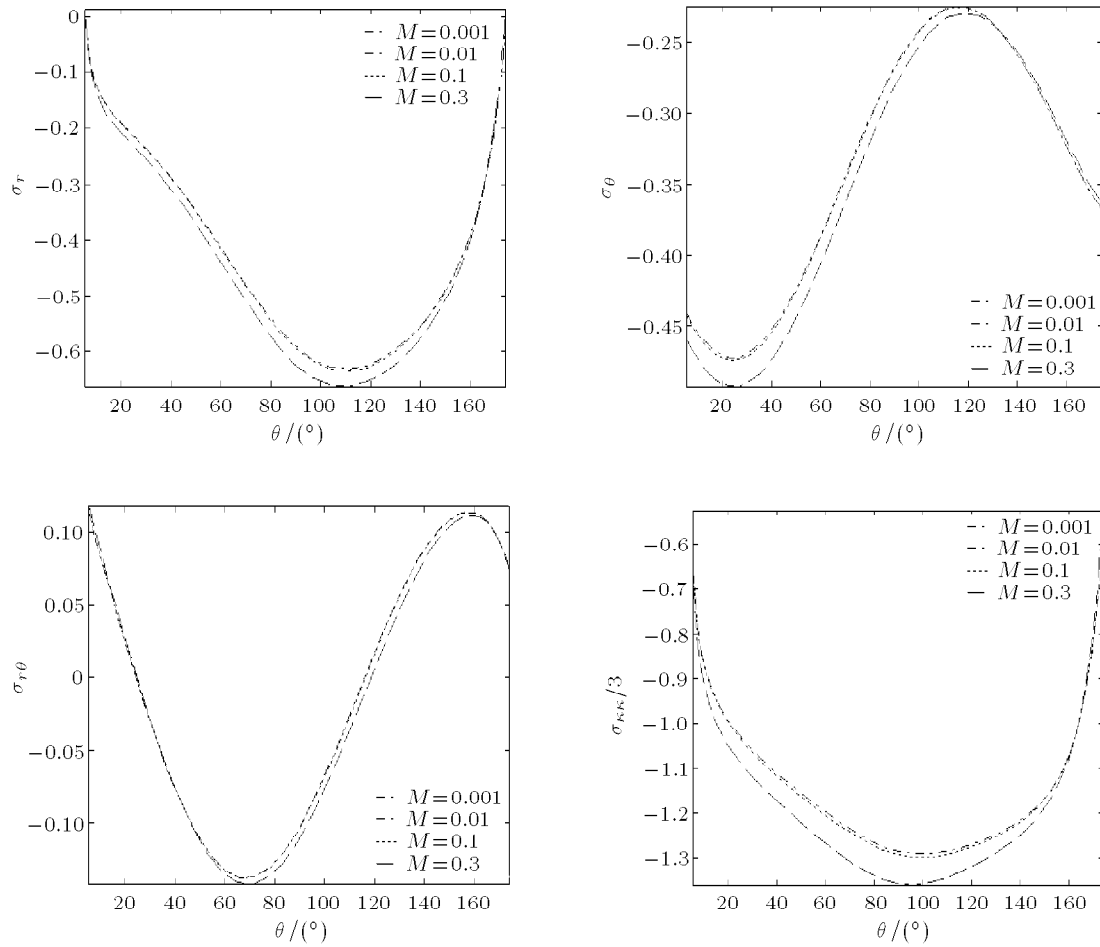
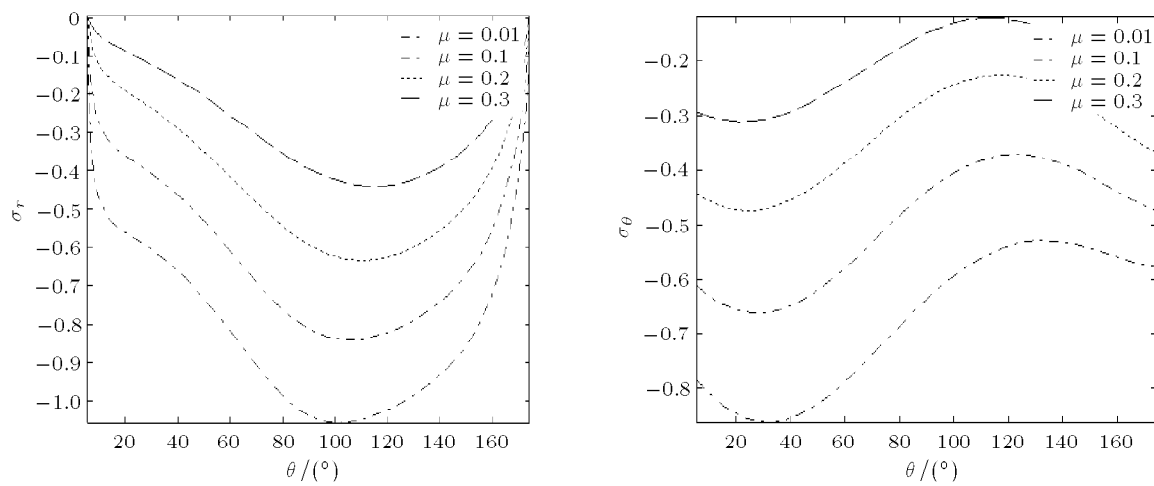
Table 3 Variations of solution according to different β ($M = 0.1, D^* = 10, \mu = 0.2, M_P = 0.84$)

	0.75	0.769 2	0.8	0.833 3
$\tilde{T}(0)(e^{-1})$	0.456 8	0.683 8	1.138 2	1.772 3
$h'(0)(e^{-2})$	-5.590 1	-7.258 6	-9.521 2	-10.940 4

表 4 解随 μ 的变化

Table 4 Variations of solution according to different μ ($M = 0.1, D^* = 10, \beta = 0.8, M_P = 0.84$)

	0.01	0.1	0.2	0.3
$\tilde{T}(0)(e^{-1})$	2.014 9	1.569 0	1.138 2	0.752 7
$h'(0)(e^{-2})$	-17.158	-13.342	-9.521 2	-6.082 5

图 3 应力分量及静水压力随 M 的变化曲线 ($\beta = 0.8, D^* = 10, M_P = 0.84, \mu = 0.2$)Fig.3 Angular variations of stress components and hydro-static stresses according to different M ($\beta = 0.8, D^* = 10, M_P = 0.84, \mu = 0.2$)图 4 应力分量及静水压力随 μ 的变化曲线 ($\beta = 0.8, D^* = 10, M = 0.1, M_P = 0.84$)Fig.4 Angular variations of stress components and hydro-static stresses according to different μ ($\beta = 0.8, D^* = 10, M = 0.1, M_P = 0.84$)

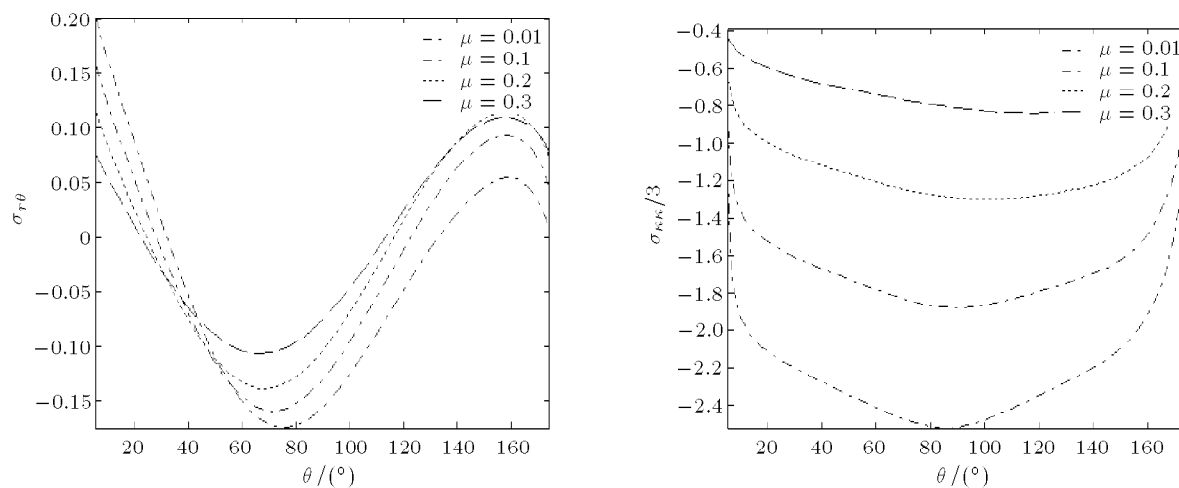


图 4 应力分量及静水压力随 μ 的变化曲线 ($\beta = 0.8, D^* = 10, M = 0.1, M_P = 0.84$) (续)

Fig.4 Angular variations of stress components and hydro-static stresses according to different μ

($\beta = 0.8, D^* = 10, M = 0.1, M_P = 0.84$) (continued)

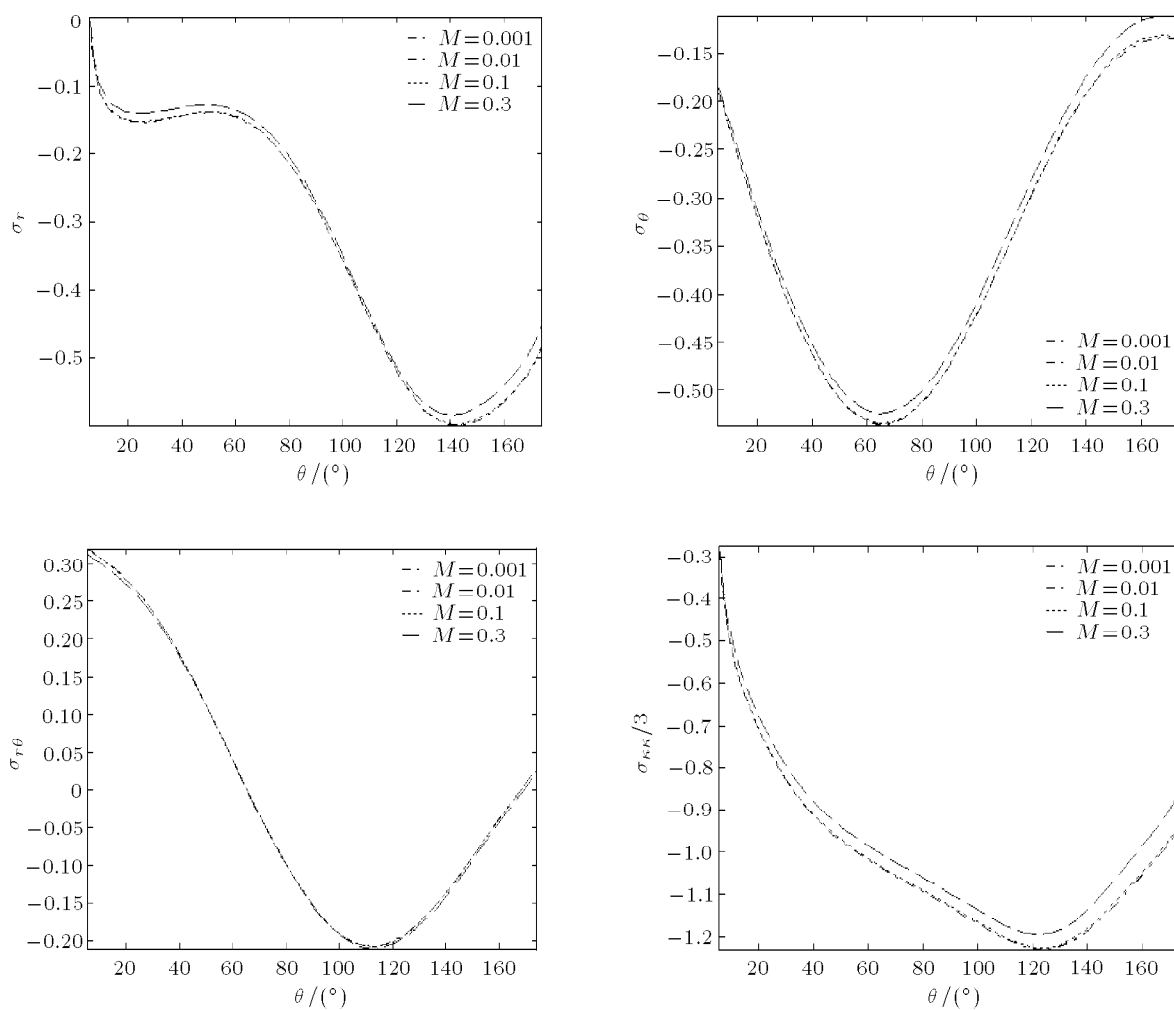
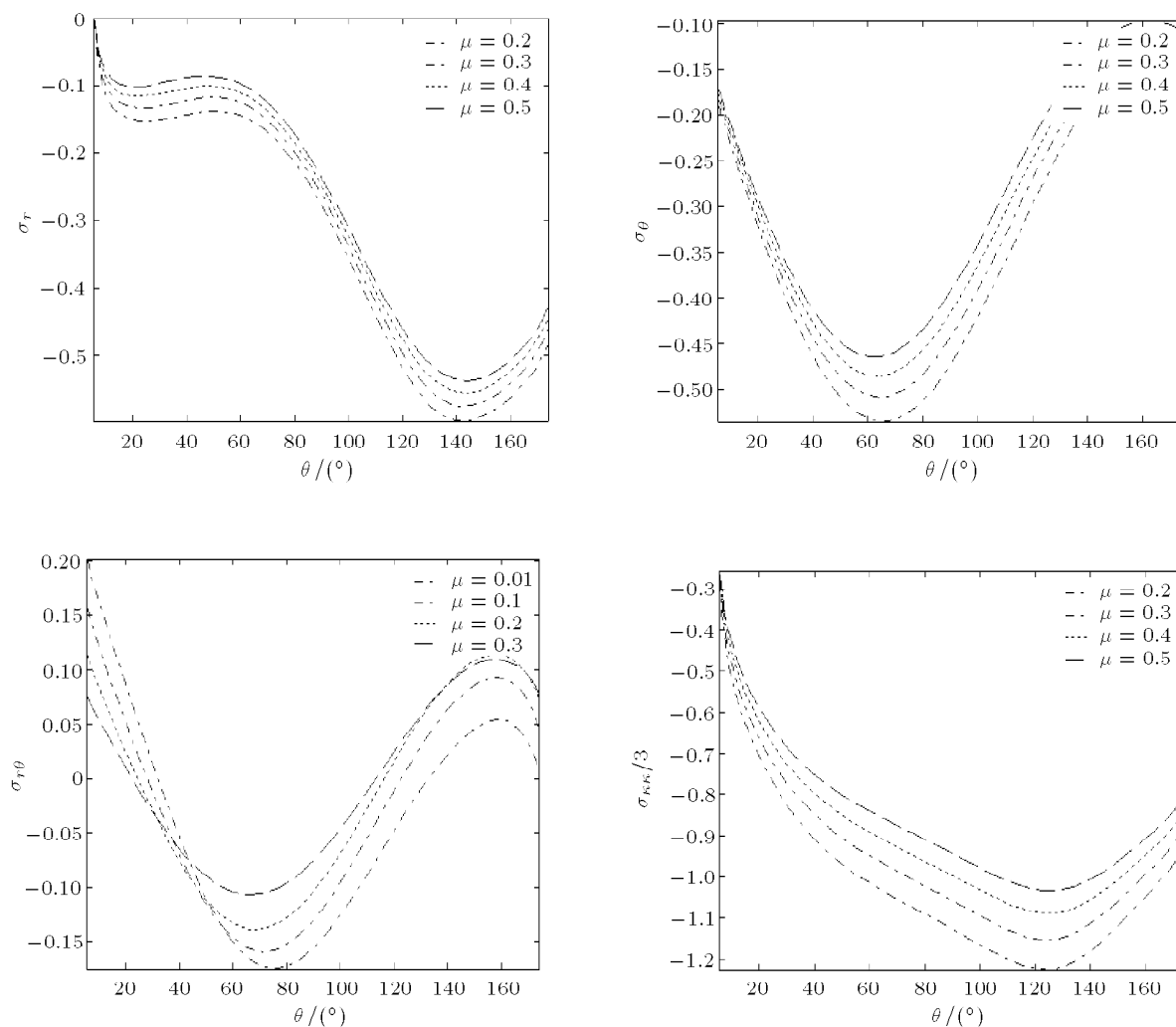


图 5 应力分量及静水压力随 M 的变化曲线 ($\beta = 0.8, D^* = 10, M_P = 0.34, \mu = 0.2$)

Fig.5 Angular variations of stress components and hydro-static stresses according to different M

($\beta = 0.8, D^* = 10, M_P = 0.34, \mu = 0.2$)

图 6 应力分量及静水压力随 μ 的变化曲线 ($\beta = 0.8, D^* = 10, M = 0.1, M_P = 0.34$)Fig.6 Angular variations of stress components and hydro-static stresses according to different μ ($\beta = 0.8, D^* = 10, M = 0.1, M_P = 0.34$)

通过对计算结果的分析与比较可知，当其它参数固定时：

(1) 无论参数怎样变化，数值结果均满足压 - 剪混合型裂纹前方的连接条件和裂纹面的摩擦接触条件。

(2) 随着 M 单调递增，即裂纹扩展速度增加，当 $M_P = 0.84$ 时应力幅值单调递减，解稍有变化但不大，静水压力也是单调递减。但当 $M_P = 0.34$ 时随着 M 单调递增，应力幅值和静水压力是单调增加的。

(3) 随着 μ 单调递增，此时裂纹场面的摩擦效应单调递增，两种情况下正应力幅值和静水压力单调递增，但剪应力幅值在前段区域为单调递减，在后段区域则为单调递增。但当 $M_P = 0.84, \mu > 0.3$ 时，方

程组无解，可以解释为当由于裂纹面的静水压力产生摩擦效应的增加并大于裂纹扩展所需要的能量，裂纹不能扩展，而当 $M_P = 0.34$ 时， $\mu > 0.3$ 方程组仍然有解。

5 结 论

(1) 由于考虑裂纹尖端场黏性效应的存在，裂纹尖端场数值解是完全连续的，不含有一些无黏性模型中存在的塑性激波，这表明黏性效应是研究扩展裂纹尖端场时的一个重要因素。

(2) 黏性系数与塑性等效应变率的幂次成反比，为角度函数，没有失去材料的均匀性，更符合材料本身的性质。

(3) 随着表征参数 M_P 的变化，混合型裂纹变化

的性质是不同的. 当 $M_P = 0.84$, 即趋近 I 型裂纹时, 当 $\mu > 0.3$ 时, 方程组无解, 可以解释为当由于裂纹面的静水压力产生摩擦效应的增加并大于裂纹扩展所需要的能量, 裂纹不能扩展; 而当 $M_P = 0.34$ 时, 即趋近 II 型裂纹时, $\mu > 0.3$ 方程组仍然有解. 说明了混合型裂纹如果趋近于 I 型裂纹时, 即使摩擦系数很小的情况下完全可以阻止裂纹的扩展.

(4) 无论混合裂纹趋近 I 型还是趋近 II 型, 静水压力随摩擦系数的增加都是增加的. 裂纹面摩擦效应的存在阻止裂纹的扩展速度, 且摩擦作用越强, 裂纹尖端场的韧性越高. 在工程实际中, 结合压 - 剪混合型裂纹不同的实际情况和裂纹开裂不同位置, 提高材料的摩擦效应, 来延缓和阻止裂纹的扩展, 但实际情况的复杂性, 还需要力学工作者不断的研究和探索.

参 考 文 献

- 1 Gao YC. Uniparameter plastic field near a dynamic crack-tip. *Mech Res Communications*, 1988, 15(5): 307~313
- 2 高玉臣, 韩斌, 黄克智. 扩展裂纹准静态渐近解中的矛盾. *力学学报*, 1986, 18 (1): 88~92(Gao Yuchen, Han Bin, Hwang Kehchih. The contradictions in the quasi-static asymptotic solution to a growing crack. *Acta Mechanica Sinica*, 1986, 18(1): 88~92(in Chinese))
- 3 Gao YC, Nemat-Nasser S. Dynamic fields near a crack tip growing in an elastic-perfectly-plastic material. *Mech of Materials*, 1983, 2 (1): 47~60
- 4 Gao YC, Nemat-Nasser S. Near-tip dynamic fields for a crack advancing in a power-law elastic-plastic material: mode I, II and III. *Mech of Materials*, 1983, 2 (3): 305~317
- 5 王振清. 弹黏塑性材料的动态裂尖场. *力学学报*, 1993, 25(3): 159~168(Wang Zhenqing. Fields near a propagating crack-tip in elastic-viscoplastic material. *Acta Mechanica Sinica*, 1993, 25(3): 159~168 (in Chinese))
- 6 Liang WY, Wang ZQ, Liu Y, et al. The dynamic growing tip field of mode II crack in elastic-viscoplastic materials. *Advances in Fracture and Damage Mechanics IV*. 2005, 7: 239~244
- 7 贾斌, 王振清, 李永东等. 稳恒扩展裂纹尖端的弹粘塑性场. *应用力学学报*, 2003, 20(1): 64~69 (Jia Bin, Wang Zhenqing, Li Yongdong, et al. The elastic-viscoplastic field of a steady propagating crack tip. *J Appl Mech*, 2003, 20(1): 64~69(in Chinese))
- 8 李永东, 张男, 唐立强等. 裂纹面摩擦接触引起的断裂韧性增长的研究. *力学学报*, 2005, 37(3): 280~286 (Li Yongdong, Zhang Nan, Tang Liqiang, et al. Researches on the enhancement of fracture toughness induced by friction between crack faces. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 37(3): 280~286(in Chinese))
- 9 张雪霞, 杨维阳. 关于各向异性纤维复合材料板 III, 混合型裂纹尖端的应变能释放率. *太原重型机械学院学报*, 2003, 24(3): 180~186(Zhang Xuexia, Yang Weiyang. On crack-tip strain energy rate of crack tips for anisotropic fiber composite plate. *Journal of Taiyuan Heavy Machinery Institute*, 2003, 24(3): 180~186(in Chinese))
- 10 贾斌, 王振清, 李永东. I 型定常扩展裂纹尖端的弹黏塑性场. *力学学报*, 2005, 37(4): 421~427 (Jia Bin, Wang Zhenqing, Li Yongdong. The elastic-viscoplastic field at mode I steadily propagating crack-tip. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2005, 37(4): 421~427 (in Chinese))
- 11 Shih CF. Small-scale yielding analysis of mixed mode plane-strain crack problems. American Society for Testing and Materials. Philadelphia. ASTM STP 560, 1974. 187~210

THE ELASTIC-VISCOPLASTIC FIELD AT THE MIXED-MODE STEADILY PROPAGATING CRACK-TIP UNDER COMPRESSION AND SHEAR¹⁾

Liang Wenyan²⁾ Wang Zhenqing Zhou Bo

(School of Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract Under the assumption that the artificial viscosity coefficient is inversely proportional to a power of the plastic strain rate, considering the friction contact effect between crack-tip surfaces and viscosity, the asymptotic solution is obtained for elastic-viscoplastic field at the mixed-mode propagating crack-tip under compression and shear. The numerical solution at the crack-tip is obtained without stress and strain jumps. The variations of the numerical solution with different parameters are discussed for the mixed-mode under compression and shear. It is shown that, for the mixed-mode crack-tip field under compression and shear, the whole region is plastic without elastic unloading parts, and the viscosity effect is an important factor when the propagating crack-tip field is studied. Whether the mixed-mode crack approaches mode I or to mode II, the hydro-static stresses are added according to the increase of the friction coefficient. The crack-tip propagation is stopped by the friction on the crack face. The toughness is higher if the friction is larger.

Key words mixed-mode crack-tip under compression and shear, steadily propagating, viscosity effect, elastic-viscoplastic materials

Received 18 November 2005, revised 21 July 2006.

1) The project supported by the Basic Research Foundation of Harbin Engineering University (002020260707).

2) E-mail: liangwenyan@hrbeu.edu.cn