

Stokes 流问题中的辛本征解方法¹⁾徐新生²⁾ 王隼平

(大连理工大学工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 通过引入哈密顿体系, 将二维 Stokes 流问题归结为哈密顿体系下的本征值和本征解问题. 利用辛本征解空间的完备性, 建立一套封闭的求解问题方法. 研究结果表明零本征值本征解描述了基本的流动, 而非零本征值本征解则显示着端部效应影响特点. 数值算例给出了辛本征值和本征解的一些规律和具体例子. 这些数值例子说明了端部非规则流动的衰减规律. 为研究其它问题提供了一条路径.

关键词 不可压缩, Stokes 流, 哈密顿体系, 辛本征解

中图分类号: O357.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2006)05-0682-06

引 言

Stokes 流描述的是不可压小雷诺数黏性流问题, 其在工程中是最常见和最基本的流体力学问题. 对 Stokes 流问题的研究一直没有间断. 除了简单的流动外很难得到解析解. Joseph 等^[1] 借鉴了 Smith^[2] 弹性薄板问题的双正交关系, 并将 Stokes 问题中流函数与薄板的挠度进行比拟, 提出 Stokes 流平面问题的正交本征函数方法. Khuri^[3] 等将这种方法推广到极坐标中, 并分区域分别用直角坐标和极坐标的形式描述和求解问题. Gurcan^[4] 用 Joseph 的方法讨论了由于流场区域不同而出现的不同的流动特点. Shankar^[5] 引入光滑函数提出了处理边界奇点一种方法, 改善了本征函数方法. Knops 等^[6] 提出一种估计端部效应的方法并讨论了这种效应的衰减问题. Chirita 等^[7] 研究了平面 Stokes 流解的性质以及改进了衰减系数的估计方法. 然而以上的方法是以流函数为基本函数速度场、应力场和压强则需通过微分和积分才能得到. 这些求解方法属于拉格朗日体系, 是一类变量问题. 钟万勰^[8] 将哈密顿体系引入到弹性力学问题中, 开拓一个新的途径. 本文将哈密顿体系引入到 Stokes 流问题. 以速度为基本函数, 求得对偶函数, 该函数恰好就是问题的应力. 从而建立了哈密顿正则方程组, 将问题归结为辛本征值和本征解问题, 这样形成一种辛方法. 数值算例给出了流动情况并说明了边界效应及

率减特点. 这种辛方法为三维问题以及类似问题提供了一条路径.

1 哈密顿正则方程

考虑不可压定常小雷诺数黏性流的平面问题. 在平面直角坐标系 (x, y) 下, 流体有关系

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + G\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1)$$

其中 G 为动力黏性系数, p 为压强, v_i 为速度分量 (x 和 y 方向分别记 u 和 v), 函数 $\delta_{ij} = 1$ ($i = j$), $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$), τ_{ij} 为应力分量. 记两个方向的体力 f_x, f_y , ρ 为流体的密度. 让 x 模拟时间坐标, 并引入记号 $(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$. 相应的拉格朗日函数可表示为

$$L = G[\dot{u}^2 + (\partial_y v)^2] + G[(\partial_y u)^2 + \dot{v}^2]/2 + G\dot{v}\partial_y u - p\dot{u} - p\partial_y v - \rho f_x u - \rho f_y v \quad (2)$$

如果对上式进行变分, 可以得到通常意义下的基本方程. 为建立哈密顿体系, 引入对偶变量

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \delta L / \delta \dot{u} = -p + 2G\dot{u} = \sigma_x \\ p_2 &= \delta L / \delta \dot{v} = G(\partial_y u + \dot{v}) = \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

可见速度的对偶就是应力. 若记向量 $\mathbf{q} = \{u, v\}^T$, 其对偶向量 $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}^T$, 于是哈密顿函数 $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) =$

2005-11-16 收到第 1 稿, 2006-06-02 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10272024, 50579005).

2) E-mail: xsxu@dlut.edu.cn

$p^T \dot{q} - L(q, \dot{q})$. 利用变分原理可得对偶方程

$$\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta H / \delta p \\ -\delta H / \delta q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ B & -A^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (4)$$

其中算子矩阵

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & -\partial_y \\ -\partial_y & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & \partial_y \\ \partial_y & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4G\partial_y^2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/G \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

这里 $f = \{-\rho f_x, -\rho f_y\}^T$. 令全状态向量 $w = \{q^T, p^T\}^T$ 对偶正则方程组 (4) 可简写为

$$\dot{w} = Hw + b \quad (6)$$

考虑哈密顿体系下正则方程 (6) 的齐次方程 (非齐次方程问题仅需叠加一个特解), 其解可表示为 $w = Y_n(y)e^{\mu_n x}$, 特征方程 $HY_n(y) = \mu_n Y_n(y)$, 这里 μ_n 是本征值. 从上式知 Y_n 是全状态函数向量的本征解. 定义泛函 $\langle Y_n^T, J, Y_m \rangle = \int Y_n^T J Y_m dy$, 这里 J 为换位旋转单位算子. 可以证明^[8] 本征解自然被划分成两个集合, 即 $\{\mu_{\alpha_j} : \text{Re}(\mu_{\alpha}) < 0 \text{ 或 } \text{Re}(\mu_{\alpha}) = 0, \text{Im}(\mu_{\alpha}) < 0\}$ 和 $\{\mu_{\beta_j} : \mu_{\beta} = -\mu_{\alpha}\}$; 存在辛共轭正交归一关系

$$\begin{aligned} \langle (Y_n^{(\alpha)})^T, J, Y_m^{(\beta)} \rangle &= \delta_{nm}, \quad \langle (Y_n^{(\beta)})^T, J, Y_m^{(\alpha)} \rangle = \\ &= -\delta_{nm} \\ \langle (Y_n^{(\alpha)})^T, J, Y_m^{(\alpha)} \rangle &= \langle (Y_n^{(\beta)})^T, J, Y_m^{(\beta)} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

因而问题的解可由本征解展开

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n Y_n^{(\alpha)} e^{\mu_n x} + b_n Y_n^{(\beta)} e^{-\mu_n x}) \quad (8)$$

由共轭辛正交归一关系得到

$$\begin{aligned} a_n &= -\langle (Y_n^{(\beta)})^T, J, Y \rangle e^{-\mu_n x} \\ b_n &= \langle (Y_n^{(\alpha)})^T, J, Y \rangle e^{\mu_n x} \end{aligned}$$

2 本征解

先讨论零本征值对应的方程 $HY = 0$. 考虑侧边条件: $y = \pm b, u = v = 0$ 时, 可解出基本本征向量 $Y_1^{(0)} = \{0, 0, 1, 0\}^T$ 和它的约当型的本征向量 $Y_2^{(0)} = \{(b^2 - y^2)/(2G), 0, x, -y\}^T$. 物理意义分别表示静止流体和 Poiseuille 流. 可以验证这两个是辛共

轭本征向量并且在这种侧边条件下不存在下一阶约当型本征向量. 如果考虑其它的侧边条件, 讨论基本本征向量和各阶约当型的本征向量以及它们的线性组合可以得到各种基本流动的解, 包括 Couette 流等.

对于非零本征值问题, 根据特征方程可解得

$$\begin{aligned} Y_u &= A_u \cos(\mu y) + B_u \sin(\mu y) + C_u y \sin(\mu y) + \\ &\quad D_u y \cos(\mu y) \\ Y_v &= A_v \sin(\mu y) + B_v \cos(\mu y) + C_v y \cos(\mu y) + \\ &\quad D_v y \sin(\mu y) \\ Y_{p_1} &= A_{\sigma} \cos(\mu y) + B_{\sigma} \sin(\mu y) + C_{\sigma} y \sin(\mu y) + \\ &\quad D_{\sigma} y \cos(\mu y) \\ Y_{p_2} &= A_{\tau} \sin(\mu y) + B_{\tau} \cos(\mu y) + C_{\tau} y \cos(\mu y) + \\ &\quad D_{\tau} y \sin(\mu y) \end{aligned} \quad (9)$$

注意到 A 与 C 组解是关于 y 轴对称的, 而 B 与 D 组解是反对称解. 将方程 (9) 代入式 (6), 可解出 $C_v = C_u, C_{\sigma} = C_{\tau} = 2\mu G C_u, A_v = -A_u - C_u/\mu, A_{\tau} = -2\mu G A_u, A_{\sigma} = 2\mu G A_u - 2G C_u, D_v = -D_u, D_{\sigma} = -D_{\tau} = 2\mu G D_u, B_v = -D_u/\mu + B_u, B_{\tau} = 2\mu G B_u, B_{\sigma} = 2G D_u + 2\mu G B_u$, 分别对应对称解与反对称解的系数关系式. 给定边界条件: $y = \pm b, u = v = 0$ 时, 对称问题和反对称问题的本征值方程分别是

$$2\mu b \mp \sin(2\mu b) = 0 \quad (10)$$

从式 (10) 可得全部的本征值, 分别记 μ_n 和 μ_n^* . 此时 $A_u = -\sin^2(\mu_n b), C_u = \mu_n, B_u = \cos^2(\mu_n^* b), D_u = \mu_n^*$. 一般的流动问题总可以用零本征值本征解和非零本征值本征解叠加得到, 即

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Y_n^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n Y_n^{(\alpha)} e^{\mu_n x} + b_n Y_n^{(\beta)} e^{-\mu_n x}) \quad (11)$$

3 端部条件的辛本征解表示

多数的端部条件是通过流量或速度分布给出的. 从零本征值本征解知在给定端部流量时基本流动是确定的. 而非零本征值本征解揭示端部效应, 也就是说距离端部越远速度分布越逼近基本流动. 这样就可以只考虑端部流量为零的速度分布, 其结

果叠加一个基本流动就是问题的解. 不妨讨论两端给定零流量的速度分布条件

$$q_{x=-l}(y) = q_{-l}, \quad q_{x=l}(y) = q_l \quad (12)$$

解方程 (11) (不考虑零本征值本征解) 应满足端部条件 (12)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{-\mu_n l} q_n^{(\alpha)} + b_n e^{\mu_n l} q_n^{(\beta)}) &= q_{-l} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{\mu_n l} q_n^{(\alpha)} + b_n e^{-\mu_n l} q_n^{(\beta)}) &= q_l \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

利用辛正交归一关系 (7) 可以得到

$$\sum_n A_{nj}^{(k)} a_n + \sum_n B_{nj}^{(k)} b_n = C_j^{(k)} \quad (k=1, 2; j=1, 2, \dots) \quad (14)$$

其中系数表示为

$$\begin{aligned} A_{nj}^{(1)} &= \int_{-b}^b e^{-\mu_n l} q_n^{(\alpha)} \cdot p_j^{(\beta)} dy \\ A_{nj}^{(2)} &= \int_{-b}^b e^{\mu_n l} q_n^{(\alpha)} \cdot p_j^{(\alpha)} dy \\ B_{nj}^{(1)} &= \int_{-b}^b e^{\mu_n l} q_n^{(\beta)} \cdot p_j^{(\beta)} dy \\ B_{nj}^{(2)} &= \int_{-b}^b e^{-\mu_n l} q_n^{(\beta)} \cdot p_j^{(\alpha)} dy \\ C_j^{(1)} &= \int_{-b}^b q_{-l} \cdot p_j^{(\beta)} dy \\ C_j^{(2)} &= \int_{-b}^b q_l \cdot p_j^{(\alpha)} dy \end{aligned}$$

如果式 (11) 和式 (14) 中取前 N 项, 则式 (14) 就给出 $2N$ 个代数方程, 这样就可确定 $2N$ 个待定系数 a_n 和 b_n ($n=1, 2, \dots, N$), 由此得到问题的近似解.

4 数值结果

先进行无量纲化, 取两板之间距离的一半 b 为特征长度, 特征时间为 $\sqrt{b/g}$ (g 为重力加速度), 特征应力为 $G\sqrt{g}/\sqrt{b}$. X 和 Y 分别为无量纲坐标. U 和 V 表示无量纲速度, σ 和 τ 为相应的无量纲应力. 由于本征值的实部决定了端部影响的大小, 因此这里按照实部绝对值由小到大进行排序. 数值结果表明随着 n 增大本征解波纹增多. 注意到 α 类和 β 类本征解分别对其中一端影响较大, 对另一端影响较小. 考虑两平行的平板间的流动问题, 问题归结为平面长矩形区域内的流动, 其一对长边是

固定边, 而另一对短边为流动的出入口端, 两端所给出的流场应满足流量守恒. 为了给出一个具体算例说明端部的影响, 不妨讨论入口 ($X = -L$) 只有速度 $\bar{U}_{-L}(Y) = (\pi/3)U_0 \cos(\pi Y/2)$, 而出口只有 $\bar{U}_L(Y) = U_0(1 - Y^2)$. 该问题相当于出口为无穷远. 根据问题的解可由零本征值本征解与非零本征值本征解的叠加而成. 为更清晰展示端部效应, 将问题的解减去零本征值本征解 $U = U_0(1 - Y^2)$, $V = 0$. 这样问题归结为非零本征值本征解问题, 相应的端部条件可描述为

$$\left. \begin{aligned} U_{-L} &= U_0[Y^2 - 1 + (\pi/3) \cos(\pi Y/2)], \quad V_{-L} = 0 \\ U_L &= V_L = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

原问题的解仅需叠加零本征值本征解即可. 以下考虑端部速度边界条件 (15) 的情况. 取 $L = 5$ 和 $U_0 = 3/\pi$, 根据式 (14) 可得到辛本征解的系数, 再由式 (11) 得到问题解的解析表达式. 注意到用非零本征值本征解展开描述原边界条件会有误差, 这个是与取几项有关. 为了说明这种误差, 引入相对误差 $[U_N(Y) - U_{-L}(Y)] / [\int_{-1}^1 U_{-L}(Y) dY/2]$, 这里 U_N 为取 N 项的速度表达式. 图 1 分别给出 $N = 3, 5, 7, 10, 15$ 边界各点相对误差函数的图像. 从该图可见 N 项取的越大相对误差越小, 当 $N > 5$ 以后的相对误差都小于 0.3% . 以 $N = 5$ 为例, 图 2 给出两个速度分量靠近入口处分布情况. 可以看出: 流动在入口处存在 x 方向的速度差, 并在很短的距离内, 速度就趋于近似于零. 在出口处, 速度在各个方向上数量级为 10^{-17} , 可以认为为零. 也就是端部效应基本上限制在一定的范围, 计算结果还表明其它物理量也是如此规律. 说明 Stokes 流符合圣维南原理.

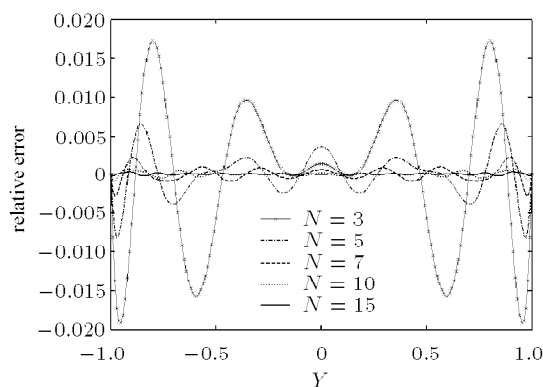
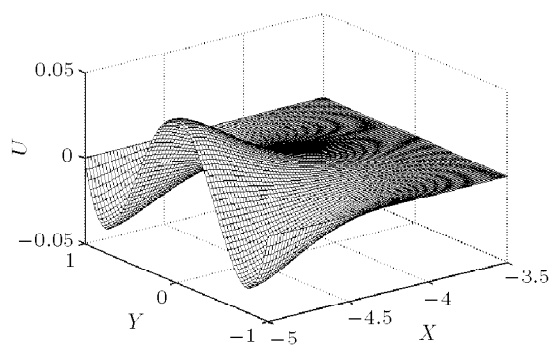
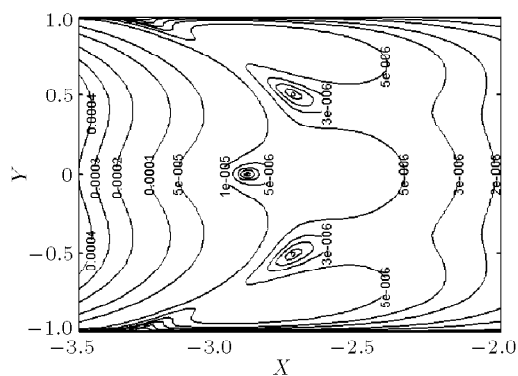


图 1 相对误差曲线

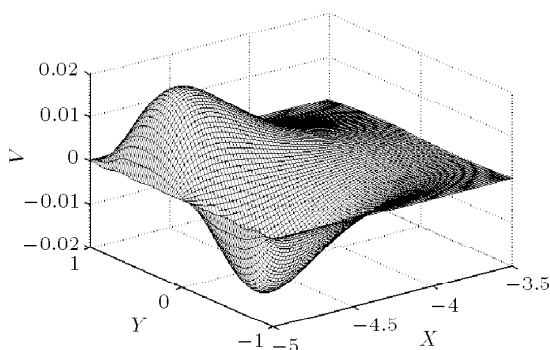
Fig.1 The relative error profiles of velocity



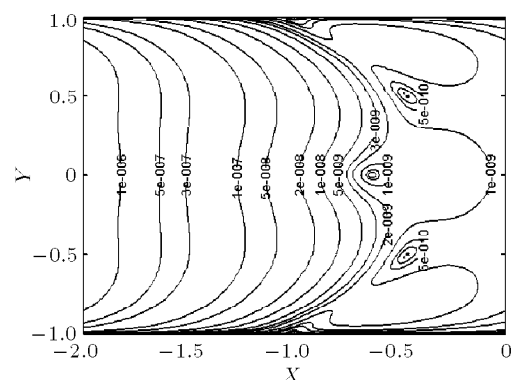
(a)



(b)



(b)



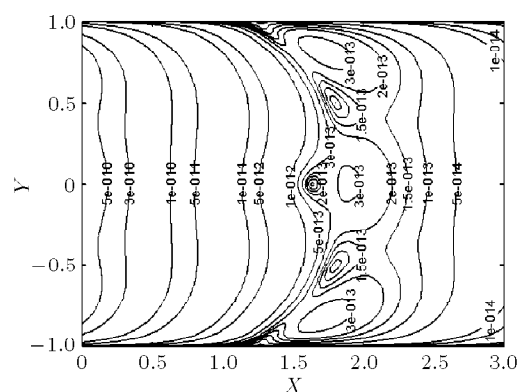
(c)

图 2 速度分量靠近入口处的分布

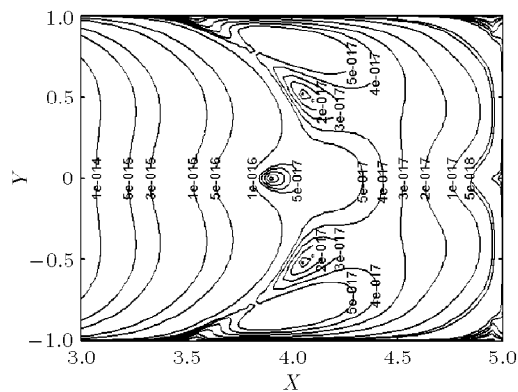
Fig.2 Velocity distribution round the entrance and exit

引入流动速度的绝对值 $U_r = \sqrt{\text{Re}(U)^2 + \text{Re}(V)^2}$.

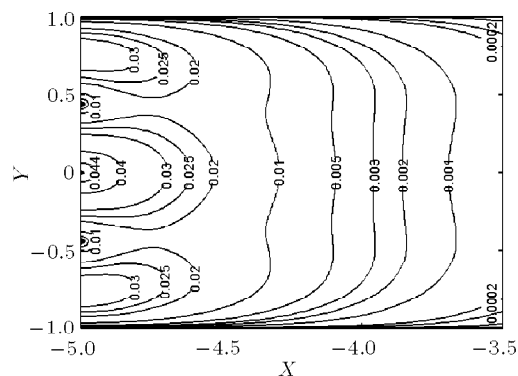
图 3 则分段显示速度绝对值 U_r 的等高线. 从图中可以详细地了解到, 在一个单位长度内, 速度的衰减在 1~2 个数量级之间, 同时, 速度沿 y 方向的分布也随着 X 的不同而发生变化, 但是速度衰减的趋势总是不会发生改变的. 图 3 还显示在速度随距离而衰减的同时, 会呈现出某种周期性变化特点. 图中也出现一些封闭等高线的区域, 这些区域也呈现周期性并且数值大小随距离而衰减.



(d)



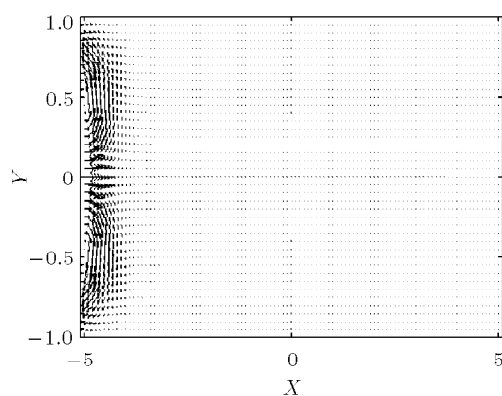
(e)



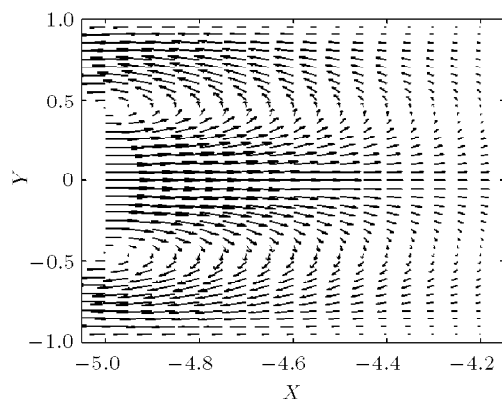
(a)

图 3 速度 U_r 的等高线Fig.3 The contours of velocity U_r

图 4(a) 给出速度的矢量图形. 图 4(b) 是入口附近的放大图形. 在计算结果中注意到在流动区域内存在 5 个漩涡区域, 漩涡区域内的流体只是绕漩涡中心作旋转运动, 并不参与流体的整体运动, 并以此而导致漩涡的相邻区域流动速度的增加. 漩涡区域关于 y 对称分布, 这是由于端部条件是对称的, 其对称解起决定性作用. 这里还应该指出如果端部条件给出反对称的或其它形式的条件, 将有其它形式的图像.



(a)



(b)

图 4 速度矢量图形

Fig.4 Vectorgraph for the velocity

5 结 论

Stokes 流问题可以归结为哈密顿体系下的本征值和本征解问题. 由于辛本征解空间是完备的, 求解方法是封闭的. 零本征值本征解描述了基本的流动, 非零本征值本征解体现了端部效应, 而非零本征值给出端部效应随端口距离的衰减系数. 对于一般的问题, 可以化为对称问题和反对称问题的叠加, 此外非齐次方程问题可通过叠加一个特解化为齐次方程问题. 可以利用边条件的辛本征解展开及辛本征解空间得到问题的解. 讨论非零本征值本征解可确定由于端部效应对整个流场影响的程度. 这种方法和结果对其他问题的研究有一定的帮助.

参 考 文 献

- 1 Joseph DD. The convergence of biorthogonal series for bi-harmonic and Stokes flow edge problems (Part I). *SIAM J Appl Math*, 1977, 33(2): 337~347
- 2 Smith RCT. The bending of a semi-infinte strip, *Austral. J Sci Res*, 1952, 5: 227~237
- 3 Khuri SA. Biorthogonality condition for Stokes flow in rectangular regions. *Int J Computer Math*, 1999, 70 (3): 411~415
- 4 Gurcan F, Gaskell PH, et al. Eddy genesis and transformation of Stokes flow in a double-lid driven cavity. *Proc Instn Mech Engrs, J Mech Eng Sci*, 2003, 217 (C): 353~363
- 5 Shankar PN. On handling non-homogeneous corner data in confined steady Stokes flow. *Proc Royal Soc London Series A, Math Phys Ecn Sci*, 2004, 460 (2042): 479~485
- 6 Knops RJ, Lupoli C. End effects for plane Stokes flow along a semi-infinite strip. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 1997, 48 (6): 905~920
- 7 Chirita S, Ciarletta M. Spatial behaviour of solutions in the plane Stokes flow. *J Math Anal Appl*, 2003, 277 (2): 571~588
- 8 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连: 大连理工大学出版社, 1995 (Zhong Wanxie. A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995 (in Chinese))

A METHOD OF SYMPLECTIC EIGENSOLUTIONS IN STOKES FLOW¹⁾Xu Xinsheng²⁾ Wang Gaping

(State Key Laboratory of Structure Analysis of Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract In this paper, the problem of two dimensional Stokes flow is reduced to the determination of eigenvalues and eigensolutions in a Hamiltonian system. A closed method for the symplectic eigensolution is presented based on the completeness of the space of symplectic eigensolutions. The results show that basic flows can be described by eigensolutions of zero-eigenvalue and the end effects for the Stokes flow by eigensolutions of non-zero-eigenvalues. Numerical results include some examples of symplectic eigenvalues and eigensolutions, which show that the irregular flow at the ends of the pipeline is decayed. At the same time, the method can also be used for other problems.

Key words incompressible fluid, Stokes flow, Hamiltonian system, symplectic eigensolution

Received 16 November 2005, revised 2 June 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272024, 50579005).

2) E-mail: xsxu@dlut.edu.cn