

# 结构动力非线性随机反应的联合概率分布<sup>1)</sup>

李 杰<sup>2)</sup> 陈建兵

(同济大学土木工程学院, 上海 200092)

**摘要** 在密度演化理论基本思想的框架下, 对广义密度演化方程进行推广, 导出了结构不同反应量的联合概率密度函数演化方程. 结合确定性结构非线性动力反应分析与二维偏微分方程求解的有限差分方法, 可以获取结构不同反应量的联合概率密度函数的数值解答. 分析实例表明: 结构反应的联合概率密度函数呈丘陵状不规则分布, 而不同反应量之间的相关系数是时变的.

**关键词** 非线性, 动力反应, 密度演化理论, 联合概率密度函数, 相关系数

**中图分类号:** O324, TU311.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2006)05-0652-08

## 引 言

在地震工程、风工程和海洋工程等领域中, 结构动力非线性随机反应分析对把握结构的非线性状态、进行结构可靠度分析是至关重要的. 在经典随机振动理论中, 尽管进行了矩函数微分方程、FPK 方程和 Hamilton 理论框架等诸多探索, 取得了丰富的研究成果<sup>[1,2]</sup>, 但是, 对一般非线性结构的随机振动尚难以获得相应的概率密度解答. 另一方面, 考虑参数随机性的随机结构分析方法自 20 世纪 60 年代以来已进行了大量的研究<sup>[3]</sup>. 至 20 世纪 90 年代末, 针对线性随机结构反应问题, 发展了随机模拟方法<sup>[4]</sup>、随机摄动技术<sup>[5]</sup>与正交多项式展开理论<sup>[3,6]</sup>等 3 类主导方法, 并在试图获取结构反应量关于基本随机参数的显式表达方面出现了一些新的思路, 例如以单元柔度概念<sup>[7]</sup>和矩阵特征变换求逆<sup>[8]</sup>为特征的探索. 然而, 关于随机结构非线性反应分析, 例如文献<sup>[9~11]</sup>的工作, 在总体上尚缺乏能够获取结构反应二阶统计量的有效方法. 在这样的背景下, 密度演化理论的发展为一般结构的非线性随机反应分析提供了新的途径. 在此方法中, 通过广义密度演化方程的求解, 可以获取结构任意反应量的概率密度函数, 进而可以推广进行一般结构的动力可靠度分析<sup>[12,13]</sup>.

结构不同状态量的联合概率分布信息, 在详细了解与考察结构非线性反应的相关性方面具有重要

价值与意义. 由此入手, 可以更为深刻地认识结构响应概率相关的物理本质. 鉴于此, 基于密度演化理论的基本思想, 从概率守恒原理出发, 推广广义密度演化方程, 获得了关于结构不同反应量联合概率密度函数的二维偏微分方程. 结合确定性结构动力反应分析与二维偏微分方程数值求解的差分方法, 给出了联合概率密度函数的数值解答. 通过分析实例, 考察了结构非线性随机反应的联合概率密度函数的基本特征.

## 1 结构动力随机反应的联合概率分布

### 1.1 结构动力随机反应分析的密度演化理论

在文献<sup>[12,13]</sup>中, 发展了结构动力随机反应分析的密度演化理论. 这里将从概率守恒原理的 Lagrange 系统描述的角度简要阐述其基本思想.

考察一般的随机动力系统

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}, t) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{X}$  为  $n_d$  维系统状态向量,  $\mathbf{A}$  为动力系统算子,  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$  为反映系统参数、激励与初始条件中的随机性的随机向量,  $\mathbf{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n_d})^T$  为初始值向量. 值得指出, 一般结构动力反应的二阶微分方程可方便地转化为式 (1) 的状态方程的形式.

2005-09-05 收到第 1 稿, 2006-06-05 收到修改稿.

1) 国家创新研究群体科学基金 (50321803) 和国家自然科学基金 (10402030) 资助项目.

2) E-mail: lijie@mail.tongji.edu.cn

设随机动力系统 (1) 的解可用形式解答表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, t), X_l = H_l(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (l = 1, 2, \dots, n_d) \quad (2)$$

其中  $X_l, H_l$  分别为  $\mathbf{X}, \mathbf{H}$  的第  $l$  个分量. 相应地, 其速度的形式解答不妨表示为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}, t), \dot{X}_l = G_l(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (l = 1, 2, \dots, n_d) \quad (3)$$

考察随机过程  $X_l(t)$ , 由于  $X_l(t)$  中的随机性完全来自于  $\boldsymbol{\theta}$ , 故  $(X_l(t), \boldsymbol{\theta})$  是一个概率守恒系统, 即在随机动力系统  $(X_l(t), \boldsymbol{\theta})$  中概率守恒. 记  $X_l(t)$  的概率密度函数为  $p_{X_l}(x_l, t)$ ,  $(X_l(t), \boldsymbol{\theta})$  的联合概率密度函数为  $p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t)$ . 跟踪初始时刻状态空间中的任意区域  $\Omega_0$ , 由于系统 (1) 的演化,  $\Omega_0$  内的状态点在时刻  $t$  演化到区域  $\Omega_t$ , 根据概率守恒原理, 有

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t) dx_l = 0 \quad (4)$$

这里  $D(\cdot)/Dt$  为物质导数, 其确切意义为

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t) dx_l = \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega_{t+\Delta t}} p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t + \Delta t) dx_l - \int_{\Omega_t} p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t) dx_l \right) \end{aligned} \quad (5)$$

注意到  $\Omega_0$  的任意性, 利用 Reynold 转换定理<sup>[14]</sup>, 并考虑式 (3), 可得广义密度演化方程<sup>[15]</sup>

$$\frac{\partial p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + G_l(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial x_l} = 0 \quad (6)$$

或更明确地 (将式 (3) 代入式 (6))

$$\frac{\partial p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \dot{X}_l(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial x_l} = 0 \quad (7)$$

当初始值  $x_0$  为确定性向量时 (例如在地震反应分析的情况下, 可合理地采用  $x_0 = \mathbf{0}$ ), 方程 (7) 的初始条件为

$$p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t_0) = \delta(x - x_{0,l}) p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) \quad (8)$$

在此条件下可求得方程 (6)(或 (7)) 的数值解答, 这里  $\delta(\cdot)$  为 Dirac 函数,  $x_{0,l}$  为  $X_l(t)$  的初始值. 求解方程 (6)(或 (7)), 式 (8) 构成的初始值问题即可获得联合概率密度函数的数值解答, 进而可以积分得到  $X_l(t)$  的概率密度函数

$$p_{X_l}(x_l, t) = \int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}} p_{X_l \boldsymbol{\theta}}(x_l, \boldsymbol{\theta}, t) d\boldsymbol{\theta} \quad (9)$$

其中  $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}$  为  $\boldsymbol{\theta}$  的分布区域.

广义密度演化方程 (6)(或 (7)) 也可直接利用形式解答并通过含有参数的多维 Liouville 方程积分<sup>[12]</sup>或利用联合概率密度函数的 Dirac 函数形式表达进行微分得到<sup>[13]</sup>. 结合确定性结构动力反应分析与有限差分方法, 可以方便地获得结构动力反应概率密度函数的数值解答.

## 1.2 结构动力随机反应的联合概率分布

在结构动力反应特别是可靠度分析中, 往往不仅对于单个物理量的概率信息感兴趣, 还常常需要获得两个物理量或过程的联合概率信息. 例如, 在基于跨越过程理论的结构动力可靠度分析中, 利用 Rice 公式计算期望穿阈率时, 即需要结构反应及其速度的联合概率密度函数<sup>[2]</sup>. 在此情况下, 基于密度演化理论的基本思想, 可对广义密度演化方程加以推广, 以获取任意两个反应过程的联合概率密度函数.

为方便计, 设  $X(t), Y(t)$  为随机动力系统 (1) 中的任意两个物理量 (如位移、应力或应变等), 显然, 随机过程  $X(t), Y(t)$  的随机性完全来自  $\boldsymbol{\theta}$ , 即  $X(t), Y(t)$  的形式解答可表为

$$X(t) = H_X(\boldsymbol{\theta}, t), Y(t) = H_Y(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (10)$$

相应地, 其速度的形式解答可表为

$$\dot{X}(t) = G_X(\boldsymbol{\theta}, t), \dot{Y}(t) = G_Y(\boldsymbol{\theta}, t) \quad (11)$$

因而, 增广向量过程  $(X(t), Y(t), \boldsymbol{\theta})$  是一个概率守恒系统. 记  $(X(t), Y(t), \boldsymbol{\theta})$  的联合概率密度函数为  $p_{XY \boldsymbol{\theta}}(x, y, \boldsymbol{\theta}, t)$ , 则根据概率守恒原理有

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} p_{XY \boldsymbol{\theta}}(x, y, \boldsymbol{\theta}, t) dx dy = 0 \quad (12)$$

由 Reynold 转换定理并注意积分区域的任意性<sup>[14]</sup>, 考虑到式 (11), 与式 (7) 类似地可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{XY \boldsymbol{\theta}}(x, y, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + G_X(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{XY \boldsymbol{\theta}}(x, y, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial x} + \\ G_Y(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{XY \boldsymbol{\theta}}(x, y, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

将式 (11) 代入式 (13), 即有

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{XY \boldsymbol{\theta}}(x, y, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial t} + \dot{X}(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{XY \boldsymbol{\theta}}(x, y, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial x} + \\ \dot{Y}(\boldsymbol{\theta}, t) \frac{\partial p_{XY \boldsymbol{\theta}}(x, y, \boldsymbol{\theta}, t)}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

在初始条件

$$p_{XY\theta}(x, y, \theta, t_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)p_{\theta}(\theta) \quad (15)$$

下求解式 (14), 即可获得  $p_{XY\theta}(x, y, \theta, t)$  的解答并进而通过积分给出  $X(t), Y(t)$  的联合概率密度函数

$$p_{XY}(x, y, t) = \int_{\Omega_{\theta}} p_{XY\theta}(x, y, \theta, t) d\theta \quad (16)$$

式 (15) 中,  $x_0, y_0$  分别为  $X(t), Y(t)$  的确定性初始值. 注意到  $X(t), Y(t)$  为随机动力系统 (1) 的任意物理量, 并且也可以是性质不同的反应量, 因此, 方程 (14) 可用来求解任意两个物理量的联合概率密度函数. 例如, 若要求解结构任意两层位移的联合概率密度函数, 则  $X(t), Y(t)$  分别取任意两层的位移, 而若需要考察某层位移与相应速度的联合概率密度函数, 仅需将  $X(t), Y(t)$  分别取为该位移及相应速度即可.

## 2 数值算法

求解式 (14) 以获取结构动力反应的联合概率分布的数值算法基本步骤与求解式 (7) 以获取结构动力反应的密度演化方法基本步骤完全相同<sup>[13]</sup>, 即: 首先在多维随机变量空间  $\Omega_{\theta}$  中取得离散代表点  $\theta_q (q = 1, 2, \dots, N_{\text{sel}})$ , 之后在  $\theta = \theta_q$  的条件下分别对动力系统 (1) 进行确定性动力分析, 获得需要的速度信息  $\dot{X}(\theta_q, t), \dot{Y}(\theta_q, t)$ , 进而将  $\dot{X}(\theta_q, t), \dot{Y}(\theta_q, t)$  代入式 (14), 采用有限差分方法进行求解, 并对式 (16) 进行数值积分, 从而最终给出  $p_{XY}(x, y, t)$  的数值解答. 基本流程见图 1.

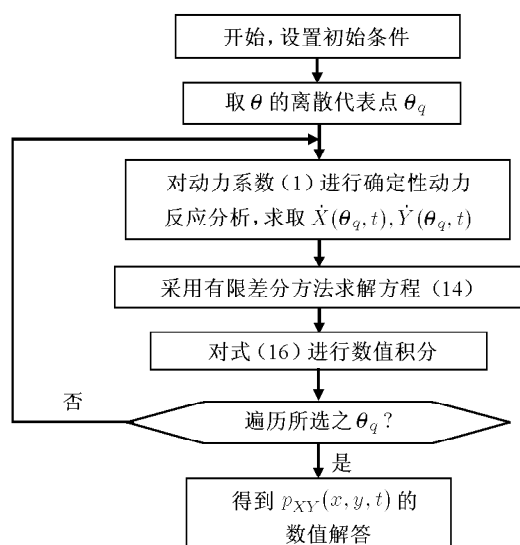


图 1 联合概率密度函数求解流程图

Fig.1 The flowchart of the numerical algorithm

## 2.1 差分格式

针对形如式 (14) 的守恒型偏微分方程求解, 已经发展了多种行之有效的数值算法. 根据在结构动力反应的密度演化分析中已有的计算经验, 采用 Lax-Wendroff 格式的有限差分方法具有较好的计算性能, 当施加适当形式的通量限制器时, 还可以构造能够有效地消除色散效应的 TVD 格式<sup>[13]</sup>.

为符号简明起见, 记  $p_{XY\theta}(x_i, y_j, \theta_q, t_k)$  为  $p_{i,j}^{(k)}$ , 这里省去  $\theta_q$  将不致引起混淆, 其中  $x_i = i \cdot \Delta x (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ,  $y_j = j \cdot \Delta y (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ,  $t_k = k \cdot \Delta t (k = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $\Delta x, \Delta y$  分别为在  $x, y$  方向的空间离散步长,  $\Delta t$  为时间离散步长, 其余符号类似. 将一维偏微分方程的 TVD 格式进行推广, 可以得到式 (14) 的离散格式

$$\begin{aligned}
 p_{i,j}^{(k+1)} = & p_{i,j}^{(k)} - r_X \left[ \frac{1}{2} (g_X^{(k)} + |g_X^{(k)}|) (p_{i,j}^{(k)} - p_{i-1,j}^{(k)}) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} (g_X^{(k)} - |g_X^{(k)}|) (p_{i+1,j}^{(k)} - p_{i,j}^{(k)}) \right] - \\
 & \frac{1}{2} (1 - |r_X g_X^{(k)}|) |r_X g_X^{(k)}| [\psi(r_{i+\frac{1}{2}}^+, r_{i+\frac{1}{2}}^-) \cdot \\
 & (p_{i+1,j}^{(k)} - p_{i,j}^{(k)}) - \\
 & \psi(r_{i-\frac{1}{2}}^+, r_{i-\frac{1}{2}}^-) (p_{i,j}^{(k)} - p_{i-1,j}^{(k)})] - \\
 & r_Y \left[ \frac{1}{2} (g_Y^{(k)} + |g_Y^{(k)}|) (p_{i,j}^{(k)} - p_{i,j-1}^{(k)}) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} (g_Y^{(k)} - |g_Y^{(k)}|) (p_{i,j+1}^{(k)} - p_{i,j}^{(k)}) \right] - \\
 & \frac{1}{2} (1 - |r_Y g_Y^{(k)}|) |r_Y g_Y^{(k)}| [\psi(r_{j+\frac{1}{2}}^+, r_{j+\frac{1}{2}}^-) \cdot \\
 & (p_{i,j+1}^{(k)} - p_{i,j}^{(k)}) - \\
 & \psi(r_{j-\frac{1}{2}}^+, r_{j-\frac{1}{2}}^-) (p_{i,j}^{(k)} - p_{i,j-1}^{(k)})] \quad (17)
 \end{aligned}$$

其中, 网格比  $r_X = \Delta t / \Delta x$ ,  $r_Y = \Delta t / \Delta y$

$$\begin{aligned}
 r_{i+1/2}^+ &= (p_{i+2,j}^{(k)} - p_{i+1,j}^{(k)}) / (p_{i+1,j}^{(k)} - p_{i,j}^{(k)}) \\
 r_{i+1/2}^- &= (p_{i,j}^{(k)} - p_{i-1,j}^{(k)}) / (p_{i+1,j}^{(k)} - p_{i,j}^{(k)}) \\
 r_{i-1/2}^+ &= (p_{i+1,j}^{(k)} - p_{i,j}^{(k)}) / (p_{i,j}^{(k)} - p_{i-1,j}^{(k)}) \\
 r_{i-1/2}^- &= (p_{i-1,j}^{(k)} - p_{i-2,j}^{(k)}) / (p_{i,j}^{(k)} - p_{i-1,j}^{(k)}) \\
 r_{j+1/2}^+ &= (p_{i,j+2}^{(k)} - p_{i,j+1}^{(k)}) / (p_{i,j+1}^{(k)} - p_{i,j}^{(k)}) \\
 r_{j+1/2}^- &= (p_{i,j}^{(k)} - p_{i,j-1}^{(k)}) / (p_{i,j+1}^{(k)} - p_{i,j}^{(k)}) \\
 r_{j-1/2}^+ &= (p_{i,j+1}^{(k)} - p_{i,j}^{(k)}) / (p_{i,j}^{(k)} - p_{i,j-1}^{(k)})
 \end{aligned}$$

$$r_{j-1/2}^- = (p_{i,j-1}^{(k)} - p_{i,j-2}^{(k)}) / (p_{i,j}^{(k)} - p_{i,j-1}^{(k)})$$

$\psi(r^+, r^-)$  为通量限制器, 本文中采用以具有较小耗散的 Roe-Sweby 通量限制器

$$\psi_{sb}(r^-) = \max(0, \min(2r^-, 1), \min(r^-, 2))$$

作为构造通量限制器的基础. 考虑到速度  $\dot{X}(\theta_q, t), \dot{Y}(\theta_q, t)$  的符号是随着时间变化的, 在施加通量限制器时, 应具有差分方向的自适应选择功能. 为此, 构造如下的自适应通量限制器

$$\psi(r^+, r^-) = u(-g^{(k)})\psi_{sb}(r^+) + u(g^{(k)})\psi_{sb}(r^-)$$

这里  $u(\cdot)$  为单位阶跃函数

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

式 (17) 中  $g_X^{(k)}, g_Y^{(k)}$  可分别取为

$$\begin{aligned} g_X^{(k)} &= \frac{1}{2}[\dot{X}(\theta_q, t_{k-1}) + \dot{X}(\theta_q, t_k)] \\ g_Y^{(k)} &= \frac{1}{2}[\dot{Y}(\theta_q, t_{k-1}) + \dot{Y}(\theta_q, t_k)] \end{aligned}$$

式 (17) 的 Courant-Friedrichs-Lewy 条件为

$$|r_X g_X^{(k)}| \leq 1/(2\sqrt{2}), \quad |r_Y g_Y^{(k)}| \leq 1/(2\sqrt{2})$$

当  $\psi(r^+, r^-) \equiv 1$  时, 式 (17) 退化为 Lax-Wendroff 格式.

## 2.2 选点方法

如前所述, 在进行结构反应的密度演化分析中, 需要首先在多维随机参数空间  $\Omega_\theta$  中取得离散代表点, 这些离散代表点应尽可能均匀地散布在  $\Omega_\theta$  中. 当随机变量的数目  $s$  较大时, 采用数论方法可以取出多维超立方体  $I^s = \{\bar{x} | \bar{x}_j \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, s\}$  中的均匀散布点集<sup>[15]</sup>. 在此基础上, 采用超球体筛选并进行尺度变换, 即可获得多维随机参数空间  $\Omega_\theta$  中均匀散布的离散代表点集<sup>[16]</sup>.

根据数论方法, 可以构造非唯一的整数生成向量  $(n, z_1, z_2, \dots, z_s)$ , 为方便计, 通常取  $z_1 = 1$ , 这里  $n$  为在单位超立方体  $I^s$  中所选离散代表点的总数目. 由整数向量  $(n, z_1, z_2, \dots, z_s)$  可生成点集  $\bar{x}_k = (\bar{x}_{1,k}, \bar{x}_{2,k}, \dots, \bar{x}_{s,k})$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 即

$$\bar{x}_{j,k} = kz_j/n - [kz_j/n] \quad (j = 1, 2, \dots, s; k = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

其中  $[\cdot]$  为取整函数. 能够证明, 采用数论方法构造的合适整数向量  $(n, z_1, z_2, \dots, z_s)$ , 式 (18) 的离散代表点集是一定意义下在  $I^s$  中均匀散布的点集<sup>[15]</sup>.

设标准化多维随机变量的分布区间或截断区间为  $\theta_j \in [-\lambda_j, \lambda_j]$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ), 例如对标准正态分布, 通常可取  $\lambda_j = 3.0 \sim 4.0$ , 则对式 (18) 进行尺度变换可以得到标准化多维随机变量空间  $\Omega_\theta$  中的离散代表点

$$\tilde{\theta}_{j,k} = 2\lambda_j(\bar{x}_{j,k} - 0.5) \quad (j = 1, 2, \dots, s; k = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

相应代表点的赋得概率为

$$\tilde{P}_k = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^s (2\lambda_j) \cdot p_\theta(\tilde{\theta}_{1,k}, \tilde{\theta}_{2,k}, \dots, \tilde{\theta}_{s,k})$$

一般情况下, 多维联合概率密度函数  $p_\theta(\theta)$  关于变量  $\theta$  具有辐射衰减性质, 因此, 超立方体中“边角”部分的点的赋得概率很小, 可以略去, 即, 仅从式 (19) 的点集中选择在超椭球体

$$\left(\frac{\tilde{\theta}_{1,k}}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\theta}_{2,k}}{\lambda_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\tilde{\theta}_{s,k}}{\lambda_s}\right)^2 \leq r_0^2 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (20)$$

内的点, 这里  $r_0$  为筛选半径. 显然, 当  $r_0 = \sqrt{s}$  时, 式 (20) 的筛选效果消失.

若满足式 (20) 的离散代表点数目为  $N_{\text{sel}}$ , 则该  $N_{\text{sel}}$  个筛选出来的离散代表点可作为最终选点  $\theta_q = (\theta_{1,q}, \theta_{2,q}, \dots, \theta_{s,q})$  ( $q = 1, 2, \dots, N_{\text{sel}}$ ), 其相应的赋得概率为

$$P_q = \tilde{P}_q / \sum_{k=1}^{N_{\text{sel}}} \tilde{P}_k$$

研究表明<sup>[16]</sup>: 结合上述数论方法与超球体筛选策略, 在精度满意的情况下一般可以将离散代表点数目降到 200 左右.

## 3 分析实例

### 3.1 分析模型

考察剪切型多自由度结构 (图 2), 动力反应方程为

$$M(\theta)\ddot{X} + C(\theta)\dot{X} + R(\theta, X) = F(\theta, t)$$

其中  $M$  为集中质量矩阵,  $C$  为阻尼矩阵,  $R$  为非线性恢复力,  $F$  为动力激励,  $\theta$  为反映结构特性与动力激励中的随机性的标准化随机参数向量.

图 2 结构柱截面尺寸为 500 mm×450 mm, 柱高  $h_1 = 4\text{ m}$ ,  $h = 3\text{ m}$ . 从顶层向下, 每两层集中质量的随机性用同一个标准化随机变量反映其随机性, 共有 5 个质量参数随机变量  $\theta_{m,1}, \theta_{m,2}, \cdots, \theta_{m,5}$ . 类似地, 每两层刚度参数 (弹性模量) 的随机性以同一个标准化随机变量反映, 共有 5 个刚度参数随机变量  $\theta_{E,1}, \theta_{E,2}, \cdots, \theta_{E,5}$ . 质量参数与刚度参数均服从正态分布, 其概率信息列于表 1, 表 2.

在构件层次上, Bouc-Wen 模型可以很好地反映结构的刚度退化与强度退化特性<sup>[17]</sup>, 经过推广后同时还可以反映随着构件耗能增长而发生的捏拢效应<sup>[18]</sup>. 在 Bouc-Wen 模型中, 构件的恢复力划分为弹性分量与滞回分量

$$R = \alpha Ku + (1 - \alpha)Kz$$

表 1 质量随机参数的概率信息

Table 1 The probabilistic information of the mass parameters

| Random parameter                     | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $m_6$ | $m_7$ | $m_8$ | $m_9$ | $m_{10}$ |
|--------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| mean value / $\times 10^5\text{ kg}$ | 1.0   | 2.1   | 2.1   | 2.0   | 2.1   | 2.1   | 2.3   | 2.2   | 2.2   | 2.2      |
| variation factor                     | 0.2   |       | 0.2   |       | 0.2   |       | 0.2   |       | 0.2   |          |

表 2 刚度随机参数的概率信息

Table 2 The probabilistic information of the stiffness parameters

| Random parameter                        | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ | $E_9$ | $E_{10}$ |
|-----------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| mean value / $\times 10^{10}\text{ Pa}$ | 2.8   | 2.8   | 3.0   | 3.0   | 3.0   | 3.0   | 3.25  | 3.25  | 3.25  | 3.25     |
| variation factor                        | 0.2   |       | 0.2   |       | 0.2   |       | 0.2   |       | 0.2   |          |

这里  $\alpha$  为屈服后与屈服前的刚度比,  $K$  为初始刚度,  $u$  为相对位移,  $z$  为滞回位移分量. 滞回位移分量  $z$  满足微分方程

$$\dot{z} = h(z) \frac{A\dot{u} - v(\beta|\dot{u}| |z|^{n-1} z + \gamma\dot{u} |z|^n)}{\eta} \tag{21}$$

其中  $h(z)$  为捏拢效应函数

$$h(z) = 1.0 - \zeta_1 e^{-[z \text{sgn}(\dot{u}) - qz_u]^2 / \zeta_2^2}$$

式中  $\text{sgn}(\cdot)$  是符号函数

$$\zeta_1(\varepsilon) = \zeta_s(1 - e^{-p\varepsilon}), \zeta_2(\varepsilon) = (\psi + d_\psi\varepsilon)(\lambda + \zeta_1(\varepsilon))$$

其中  $p, q, \psi, d_\psi, \lambda, \zeta_s$  为反映捏拢效应的参数,  $\varepsilon$  为滞回耗能, 即

$$\varepsilon = \int_0^t \dot{u}z dt$$

式 (21) 中的  $v, \eta$  分别为反映强度退化与刚度退化的参数, 作为简化, 可以认为随着滞回耗能的增长而

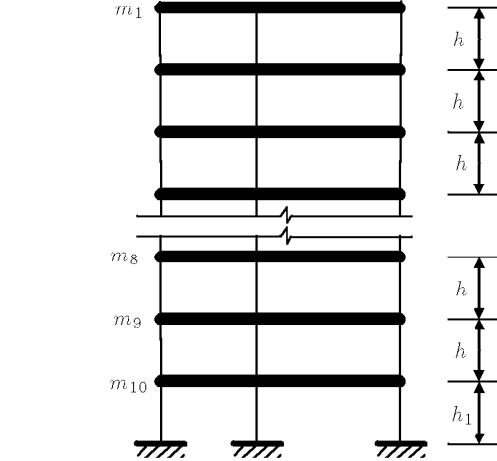


图 2 框架分析模型  
Fig.2 The frame model

线性变化, 通常取用

$$v = 1 + d_v\varepsilon, \eta = 1 + d_\eta\varepsilon$$

在上述结构恢复力模型中, 共含有 13 个基本参数. 根据已有研究<sup>[19]</sup>, 其中的  $\beta, \gamma, d_v, d_\eta, \zeta_s$  往往具有较大的灵敏度, 因此, 在本文中将这些基本参数取为正态分布的独立随机变量, 其统计参数见表 3. 其余基本参数的取值为  $A = 1, n = 1, q = 0, p = 2\,500$ ,

表 3 恢复力模型与地震动模型参数的概率信息

Table 3 The probabilistic information of the random parameters in the restoring force model and the ground motion model

| Random parameter | $\beta$ | $\gamma$ | $d_v$ | $d_\eta$ | $\zeta_s$ | $F_0$ | $\omega_0$ | $\zeta_0$ |
|------------------|---------|----------|-------|----------|-----------|-------|------------|-----------|
| mean value       | 140     | 20       | 200   | 200      | 0.95      | 0.9   | 25         | 0.7       |
| variation factor | 0.3     | 0.3      | 0.3   | 0.3      | 0.3       | 0.5   | 0.4        | 0.3       |

$d_\psi = 0.01$ ,  $\psi = 0.003$ ,  $\lambda = 0.003$ . 图 3 为上述模型给出的典型恢复力曲线.

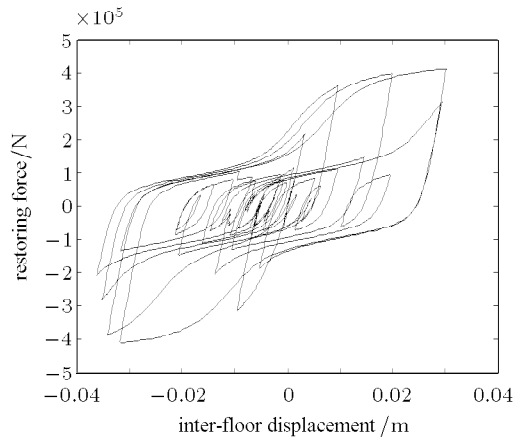


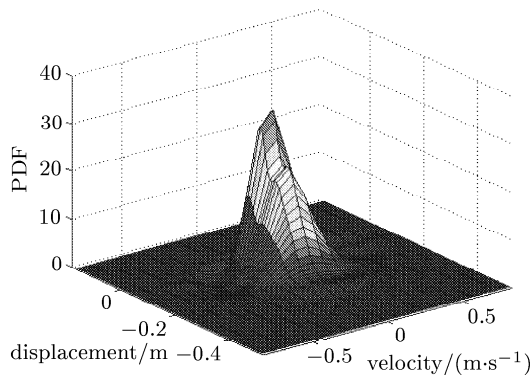
图 3 典型恢复力曲线

Fig.3 Typical restoring force

考虑随机地震动输入. 根据地震发震机理、地震动传播过程和场地条件, 可以构造基于物理随机系统思想的随机地震动模型<sup>[20]</sup>. 在此模型中, 以基岩地震动谱值  $F_0$ , 场地频率  $\omega_0$  和场地阻尼比  $\zeta_0$  作为服从对数正态分布的基本随机参数, 其概率信息如表 3. 根据在随机变量空间中选出的离散代表点, 即可由随机 Fourier 谱生成地震波.

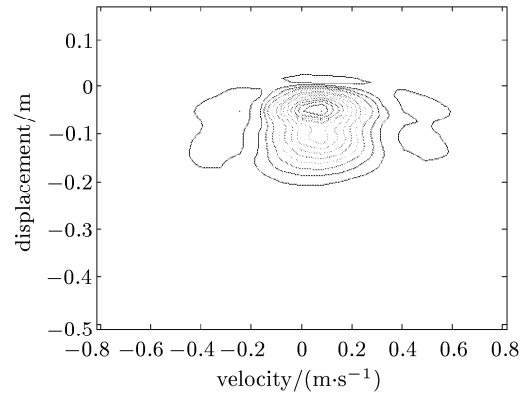
### 3.2 结构反应的联合概率密度函数及其相关系数

图 4 给出了典型时刻的结构顶层位移反应与顶层速度、底层位移与第 1~2 层层间位移的联合概率密度函数及其等值线. 从图 4 中可见, 结构顶层位移反应与顶层速度的联合概率密度函数呈不规则的丘陵状, 而其等概率密度曲线则为不规则的、非凸的、非单连通的闭合曲线 (图 4(a), 4(b)). 结构底层位移与第 1~2 层层间位移的联合概率密度函数亦呈不规则丘陵状, 其等概率密度线在此时刻为单连通



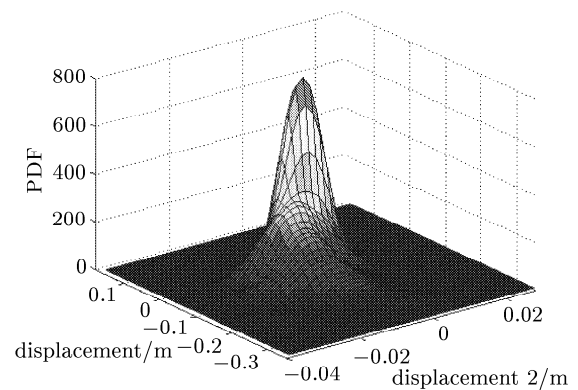
(a) 顶层位移 - 速度的联合概率密度曲面

(a) The joint PDF of the top displacement and velocity



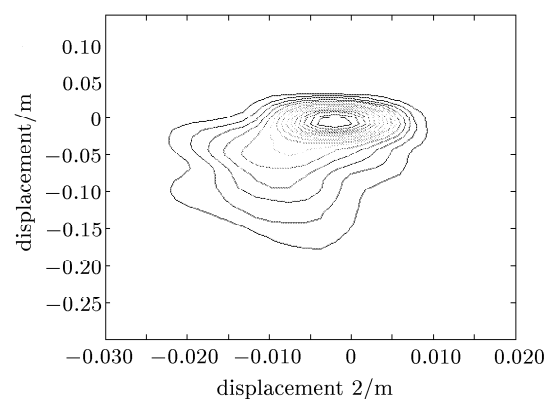
(b) 图 (a) 相应的等概率密度曲线

(b) The contour of the corresponding joint PDF in Fig.(a)



(c) 底层位移与第 1~2 层相对位移的联合概率密度函数

(c) The joint PDF of different inter-floor displacements



(d) 图 (c) 相应的等概率密度曲线

(d) The contour of the corresponding joint PDF in Fig.(c)

图 4  $t = 15$  s 时的联合概率密度曲面及其等值线

Fig.4 The joint PDF and the contour of the top displacement and its velocity at  $t = 15$  s

的,但也是不规则的、非凸的(图 4(c), 4(d)). 众所周知,常用的二维联合正态分布或其它联合单峰分布的等概率密度曲线是外凸的单连通闭合曲线. 由此可知,实际的结构反应及其速度的联合分布与这些常用的规则分布相去甚远.

图 5 是结构顶层位移与其速度、结构底层位移与第 1~2 层层间位移的相关系数曲线,即

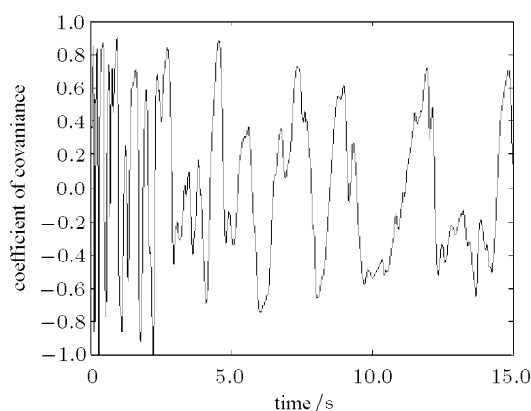
$$\rho_{X\dot{X}}(t) = \frac{E[(X(t) - \mu_X(t))(\dot{X}(t) - \mu_{\dot{X}}(t))]}{\sigma_X(t)\sigma_{\dot{X}}(t)}$$

其中  $E(\cdot)$  为期望算子

$$\mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xp_{X\dot{X}}(x, \dot{x}, t) dx d\dot{x}$$

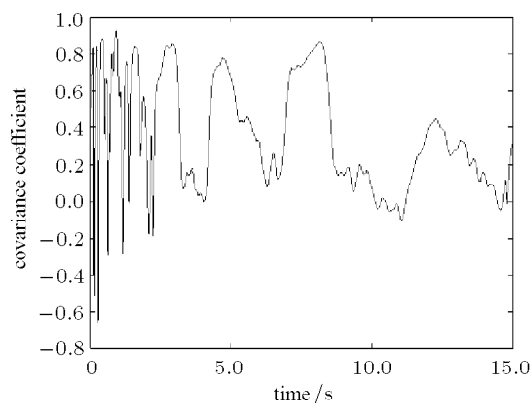
$$\mu_{\dot{X}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}p_{X\dot{X}}(x, \dot{x}, t) dx d\dot{x}$$

$$\sigma_X(t) = \sqrt{E[(X(t) - \mu_X(t))^2]}$$



(a) 顶层位移与速度的相关系数

(a) The COC of the top displacement and velocity



(b) 底层位移与第 1~2 层相对位移的相关系数

(b) The COC of different inter-floor displacement

图 5 不同反应量的相关系数

Fig.5 The coefficient of covariance of different responses

$$\sigma_{\dot{X}}(t) = \sqrt{E[(\dot{X}(t) - \mu_{\dot{X}}(t))^2]}$$

从图 5(a) 可见, 结构顶层位移与其速度的相关系数随着时间变化, 它并非在所有的时刻都接近 0, 也并非在所有的时刻都接近 1, 因此, 结构顶层位移与它的速度既不是独立的, 也不是强相关的. 从数学背景上看, 由于顶层位移不是平稳过程, 因此, 其速度过程一般与位移过程不正交, 因而, 相关系数一般非零. 类似地, 图 5(b) 中的相关曲线也是时变的, 但只有在较少的时刻为负, 而大多数时刻为正. 这说明, 底层位移与第 1~2 层层间位移在大部分时刻是正相关的. 这对于以低振型为主的框架结构显然是合理的.

上述关于联合概率密度函数与相关系数的讨论充分说明: 结构不同反应量之间的相关性是由其随机性的同源性决定的, 即不同反应量的随机性均来自于同一组基本变量, 而这些基本变量的随机性经过物理关系(结构动力方程)的传递, 在现象上表现出不同反应量之间的相关关系.

## 4 结 论

在结构非线性动力随机反应分析中, 不同反应量的联合概率密度函数含有不同反应量及其相关关系的全部信息. 本文基于密度演化理论的基本思想, 对广义密度演化方程进行推广, 导出了关于结构不同反应量的联合概率密度函数的二维偏微分方程. 结合确定性动力反应分析与有限差分方法, 即可方便地获取结构不同反应量联合概率密度函数的数值解答. 研究了具有滞回特性的非线性结构动力反应联合概率密度函数. 在一般情况下, 结构动力非线性反应联合概率密度函数呈不规则丘陵状分布. 不同反应量的相关系数是时变的, 既不是在所有时刻都接近相关, 也并非在所有时刻都接近独立.

## 参 考 文 献

- 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法. 北京: 科学出版社, 2004 (Lin Jiahao, Zhang Yahui. Pseudo-Excitation Method for Random Vibration. Beijing: Science Press, 2004(in Chinese))
- 朱位秋. 非线性随机动力学与控制. 北京: 科学出版社, 2003 (Zhu Weiqiu. Nonlinear Stochastic Dynamics and Control. Beijing: Science Press, 2003(in Chinese))
- 李杰. 随机结构系统——分析与建模. 北京: 科学出版社, 1996(Li Jie. Stochastic Structural System: Analysis and Modeling. Beijing: Science Press, 1996(in Chinese))

- 4 Shinozuka M. Monte-Carlo solution of structural dynamics. *Computers & Structures*, 1972, 2: 855~874
- 5 Kleiber M, Hien TD. The Stochastic Finite Element Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation. Chichester: John Wiley & Sons, 1992
- 6 Ghanem R, Spanos PD. Stochastic Finite Element: A Spectral Approach. Berlin: Springer-Verlag, 1991
- 7 Elishakoff I, Ren YJ, Shinozuka M. Variational principles developed for and applied to analysis of stochastic beams. *Journal of Engineering Mechanics*, 1996, 122 (6): 559~565
- 8 Falsone G, Impollonia N. A new approach for the stochastic analysis of finite element modeled structures with uncertain parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191: 5067~5085
- 9 Liu WK, Belytschko T, Mani A. Probability finite elements for nonlinear structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, 56: 61~81
- 10 Iwan WD, Huang CT. On the dynamic response of nonlinear systems with parameter uncertainty. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1996, 31(5): 631~645
- 11 Anders M, Hori M. Stochastic finite element method for elasto-plastic body. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46: 1897~1916
- 12 李杰, 陈建兵. 随机结构非线性动力响应的概率密度演化方法. *力学学报*, 2003, 35(6): 716~722 (Li Jie, Chen Jianbing. The probability density evolution method for analysis of dynamic nonlinear response of stochastic structures. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(6): 716~722(in Chinese))
- 13 Chen JB, Li J. Dynamic response and reliability analysis of nonlinear stochastic structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, 20: 33~44
- 14 Belytschko T, Liu WK, Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons Ltd, 2000
- 15 华罗庚, 王元. 数论在近似分析中的应用. 北京: 科学出版社, 1978 (Hua Luogeng, Wang Yuan. Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1981)
- 16 陈建兵, 李杰. 结构随机反应概率密度演化分析的数论选点法. *力学学报*, 2006, 38(1): 134~140 (Chen Jianbing, Li Jie. Strategy of selecting points via number theoretical method in probability density evolution analysis of stochastic response of structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2006, 38(1): 134~140(in Chinese))
- 17 Wen YK. Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1976, 102(2): 249~263
- 18 Baber TT, Noori MN. Random vibration of degrading, pinching systems. *Journal of Engineering Mechanics*, 1985, 111(8): 1010~1027
- 19 Ma F, Zhang H, Bockstedte A, et al. Parameter analysis of the differential model of hysteresis. *Journal of Applied Mechanics*, 2004, 71: 342~349
- 20 艾晓秋. 基于随机地震动模型的地下管线地震反应及抗震可靠度研究. [博士论文]. 上海: 同济大学, 2005 (Ai Xiaoqi. Seismic response and reliability evaluation of the underground pipelines based on stochastic ground motion model. [Ph D thesis]. Shanghai: Tongji University, 2005 (in Chinese))

## THE JOINT PROBABILITY DENSITY FUNCTION FOR NONLINEAR DYNAMIC STOCHASTIC RESPONSE OF STRUCTURES <sup>1)</sup>

Li Jie<sup>2)</sup> Chen Jianbing

(School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract** In nonlinear dynamic response analysis and reliability evaluation of structures, it is of paramount importance to capture the joint probability density function for various response quantities. In the present paper, following the basic line of density evolution, the generalized density evolution equation is extended to a two-dimensional partial differential equation governing the joint probability density function. The numerical algorithm combines the deterministic dynamic response analysis and the finite difference method. Numerical example is given for a ten-story frame structure with stochastic parameters subjected to random ground motions. The investigations show that the joint probability density function is irregular like a hilly country, while the coefficient of covariance varies with time.

**Key words** nonlinear, dynamic response, probability density evolution method, joint probability density function, coefficient of covariance

Received 5 September 2005, revised 5 June 2006.

1) The project supported by the Natural Science Foundation for Innovative Research Groups of China (50321803) and the National Natural Science Foundation of China (10402030).

2) E-mail: lijie@mail.tongji.edu.cn