

压电螺位错与含界面裂纹圆形涂层夹杂的干涉¹⁾

刘又文^{*,2)} 方棋洪^{*} 蒋持平[†]

^{*}(湖南大学工程力学系, 长沙 410082)

[†](北京航空航天大学固体力学研究中心, 北京 100083)

摘要 研究位于基体或夹杂中任意点的压电螺型位错与含界面裂纹圆形涂层夹杂的电弹耦合干涉问题. 运用复变函数方法, 获得了基体, 涂层和夹杂中复势函数的一般解答. 典型例子给出了界面含有一条裂纹时, 复势函数的精确级数形式解. 基于已获得的复势函数和广义 Peach-Koehler 公式, 计算了作用在位错上的像力. 讨论了裂纹几何条件, 涂层厚度和材料特性对位错平衡位置的影响规律. 结果表明, 界面裂纹对涂层夹杂附近的位错运动有很大的影响效应, 含界面裂纹涂层夹杂对位错的捕获能力强于完整粘结情况; 并发现界面裂纹长度和涂层材料常数达到某一个临界值时可以改变像力的方向. 解答的特殊情形包含了以往文献的几个结果.

关键词 压电螺型位错, 涂层夹杂, 界面裂纹, 复变函数方法, 像力

中图分类号: O343.7 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2006)02-0185-07

引 言

在过去几十年里, 压电材料日益广泛应用于各种机电器件和设备, 其研究领域也非常活跃. 在力电载荷共同作用下, 压电材料中各种缺陷, 例如, 位错, 裂纹和夹杂, 会极大地影响材料的性能和设备的完整性. 因此, 研究存在各种缺陷时压电材料的电弹性场十分重要, 其中位错和夹杂的干涉扮演了很重要的角色, 已有不少学者进行了研究^[1~6]. 在复合材料力学研究中, 三相(夹杂/界面层/基体)模型由于其具有重要的理论和实际意义, 引起了很多学者的重视. 例如, 为了提高纤维增强复合材料的粘结强度和其他性能, 在纤维表面增加涂层. 因而, 研究涂层夹杂和位错的干涉效应非常重要^[7~11].

以往的研究大多假设夹杂和基体间的界面是理想完好. 实际上, 在复合材料的制造和使用过程中, 界面缺陷不可避免. 因此, 研究位错与含界面缺陷夹杂的干涉具有十分重要的理论意义和实际价值. Sudak^[12]考虑了螺型位错和含非完整界面圆形涂层夹杂的干涉效应. Wang 等^[13]研究了刃型位错与具有滑移界面和界面层夹杂的干涉问题. 本文研究压电螺型位错与含界面裂纹涂层夹杂的电弹耦合干涉效应. 运用复变函数方法, 得到了基体, 涂层和夹杂中复势函数的解析解答. 研究了裂纹几何尺寸,

涂层厚度和材料特性对位错平衡位置的影响规律. 本文复势函数的解答不仅可以作为格林函数研究分布位错的相应解答, 而且结合连续位错模型法易于研究界面裂纹与基体或夹杂中任意形状裂纹之间的干涉问题.

1 问题描述

如图 1 所示, 无限大压电介质中包含一个圆形涂层夹杂, R_1 和 R_2 分别代表涂层的内外半径. 假设夹杂, 涂层和基体是横观各向同性的压电介质,

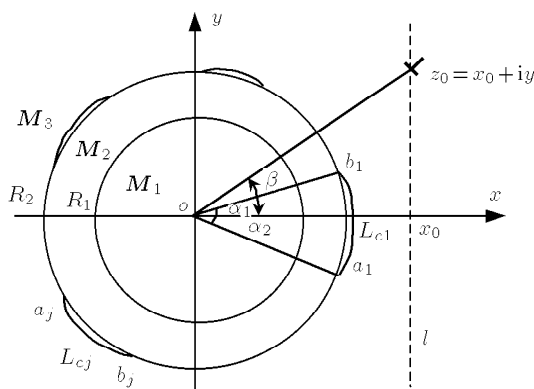


图 1 压电螺型位错与含界面裂纹圆形涂层夹杂的干涉
Fig.1 A piezoelectric screw dislocation interacting with a coated inclusion with interfacial cracks

2005-03-31 收到第 1 稿, 2006-01-10 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10472030).

2) E-mail: liuyouwu8294@sina.com

xoy 平面为各向同性面, 并且沿 z 方向极化. 在基体或夹杂中任意点 z_0 有一个压电螺型位错 $\mathbf{b} = [b_z \ b_\varphi]^T$ (图 1 在基体中). 位错核上有集中力 p 和线电荷 q . 夹杂, 涂层和基体中的量分别用下标 1, 2 和 3 来表示. 用 $L (= L_c + L_b)$ 来表示基体和涂层的界面, 这里 $L_c (= L_{c1} + L_{c2} + \cdots + L_{cn})$ 和 L_b 各自代表不受面力作用且非电渗透裂纹和界面剩余的完好粘结部分. 界面裂纹的尖端由 a_j 和 $b_j (j = 1, 2, 3, \cdots, n)$ 表示. 涂层和夹杂的界面 Γ 连接完好.

这里只需考虑反平面位移 w , 应变 γ_{xz} 和 γ_{yz} , 应力 τ_{xz} 和 τ_{yz} , 电势 φ , 电场分量 E_x 和 E_y 和电位移分量 D_x 和 D_y . 广义位移, 广义应变和广义应力均可用一个二维复变函数矢量 $\mathbf{f}(z) = [f_w(z) \ f_\varphi(z)]^T$ 表示如下 [8].

$$\mathbf{U} = \text{Re}[\mathbf{f}(z)] \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}_x - i\mathbf{Y}_y = \mathbf{F}(z) \quad (2)$$

$$\mathbf{\Sigma}_x - i\mathbf{\Sigma}_y = \mathbf{M}\mathbf{F}(z) \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(z) = \mathbf{f}'(z), \quad \mathbf{Y}_x = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ -E_x \end{Bmatrix} \\ \mathbf{Y}_y &= \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ -E_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_x = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ D_x \end{Bmatrix} \\ \mathbf{\Sigma}_y &= \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ D_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} C_{44} & e_{15} \\ e_{15} & -d_{11} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$E_i = -\varphi_{,i}$, C_{44} 是在常电场下的纵向剪切模量, e_{15} 是压电模量, d_{11} 是在常应力场下的介电模量. 函数 $f_w(z)$ 和 $f_\varphi(z)$ 为解析函数. 上标 “ $'$ ” 表示对变量 z 求导.

在极坐标系 (r, θ) 中, 方程 (3) 可以表示为

$$\mathbf{\Sigma}_r - i\mathbf{\Sigma}_\theta = \begin{Bmatrix} \sigma_{zr} - i\sigma_{z\theta} \\ D_r - iD_\theta \end{Bmatrix} = e^{i\theta} \mathbf{M}\mathbf{F}(z) \quad (4)$$

式中, $\mathbf{\Sigma}_r$ 和 $\mathbf{\Sigma}_\theta$ 表示法向和切向广义应力分量.

界面条件表示为

$$\mathbf{\Sigma}_{r2}^+(t) + \mathbf{\Sigma}_{r3}^-(t) = \mathbf{0}, \quad \text{在 } L_c \text{ 上} \quad (5)$$

$$\mathbf{\Sigma}_{r2}^+(t) - \mathbf{\Sigma}_{r3}^-(t) = \mathbf{0}, \quad \text{在 } L_c \text{ 上} \quad (6)$$

$$\mathbf{\Sigma}_{r2}^+(t) = \mathbf{\Sigma}_{r3}^-(t), \mathbf{U}_2^+(t) = \mathbf{U}_3^-(t), \quad \text{在 } L_b \text{ 上} \quad (7)$$

$$\mathbf{\Sigma}_{r1}^\perp(t) = \mathbf{\Sigma}_{r2}(t), \mathbf{U}_1^\perp(t) = \mathbf{U}_2(t), \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上} \quad (8)$$

这里上标 “+” 和 “-” 分别表示物理量从各自定义的区域趋向界面时的边界值.

2 一般解答

假定螺型位错在基体的任意位置 z_0 点, 基体中复势函数可写成下面形式 [4]

$$\mathbf{f}_3(z) = \mathbf{B} \ln(z - z_0) + \mathbf{f}_{30}(z), \quad |z| > R_2 \quad (9)$$

式中, $\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} b_z \\ b_\varphi \end{bmatrix} + \frac{1}{2\pi} \mathbf{M}_3^{-1} \begin{bmatrix} -p \\ q \end{bmatrix}$ 和

$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} c_{44}^{(3)} & e_{15}^{(3)} \\ e_{15}^{(3)} & -\varepsilon_{11}^{(3)} \end{bmatrix}$. $\mathbf{f}_{30}(z)$ 是在区域 $|z| > R_2$ 全纯的函数, 在无穷远处 $\mathbf{f}_{30}(z) = O(1/z)$.

忽略表示刚性位移和等势场的常数项, 复势函数 $\mathbf{f}_2(z)$ 在圆环中可以表示为罗朗级数

$$\mathbf{f}_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k z^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{d}_k z^{k+1}, \quad R_1 < |z| < R_2 \quad (10)$$

为了分析的方便, 引入如下相应的解析函数矢量

$$\mathbf{F}_3(z) = z\mathbf{f}_3'(z) = \mathbf{B} \frac{z}{z - z_0} + \mathbf{F}_{30}(z), \quad |z| > R_2 \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_{3*}(z) = \overline{\mathbf{F}}_3(R_2^2/z) = \overline{\mathbf{B}}z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - z^*} \right) + \left. \begin{aligned} &\mathbf{F}_{3*0}(z), \quad |z| < R_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_2(z) = z\mathbf{f}_2'(z) = \mathbf{G}_N(z) + \mathbf{G}_P(z) \left. \begin{aligned} &R_1 < |z| < R_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_{2*}(z) = \overline{\mathbf{F}}_2(R_1^2/z) = \overline{\mathbf{G}}_N(R_1^2/z) + \overline{\mathbf{G}}_P(R_1^2/z) \left. \begin{aligned} &R_1^2/R_2 < |z| < R_1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_{2**}(z) = \mathbf{F}_2(R_2^2/z) = \mathbf{G}_N(R_2^2/z) + \mathbf{G}_P(R_2^2/z) \left. \begin{aligned} &R_2 < |z| < R_2^2/R_1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_1(z) = z\mathbf{f}_1'(z), \quad |z| < R_1 \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_{1*}(z) = \overline{\mathbf{F}}_1(R_1^2/z), \quad |z| > R_1 \quad (17)$$

式中, $z^* = R_2^2/\bar{z}_0$, $\mathbf{G}_N(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\mathbf{c}_k z^{-(k+1)}$

和 $\mathbf{G}_P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\mathbf{d}_k z^{(k+1)}$. $\mathbf{F}_{30}(z)$ 和 $\mathbf{F}_{3*0}(z)$

在定义的区域中全纯. 显然, $\mathbf{F}_1(z)$ 在 $|z| < R_1$ 全纯, 而 $\mathbf{F}_{1*}(z)$ 在 $|z| > R_1$ 中全纯.

考虑由式 (11)~(17) 定义的函数, 广义应力连续条件式 (6) 以及式 (7) 和 (8) 的第 1 式可写为

$$\left. \begin{aligned} [M_1 F_1(t) - M_2 F_{2*}(t) - M_3 F_{3*}(t)]^I = \\ [M_2 F_2(t) - M_1 F_{1*}(t) - M_3 F_{3*}(t)]^C \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$|t| = R_1$$

$$\left. \begin{aligned} [M_2 F_2(t) - M_3 F_{3*}(t) - M_1 F_{1*}(t)]^C = \\ [M_3 F_3(t) - M_2 F_{2**}(t) - M_1 F_{1*}(t)]^M \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$|t| = R_2$$

上标 I , C 和 M 分别代表函数由夹杂, 涂层和基体区域内趋向界面时的值. 由式 (18) 和 (19) 知 $[M_1 F_1(z) - M_2 F_{2*}(z) - M_3 F_{3*}(z)]$, $[M_2 F_2(z) - M_3 F_{3*}(z) - M_1 F_{1*}(z)]$ 和 $[M_3 F_3(z) - M_2 F_{2**}(z) - M_1 F_{1*}(z)]$ 可以分别越过圆周直接解析延拓, 注意式 (11), (12), (16) 和 (17), 可以获得如下的分区全纯函数 $F_s(z)$

$$F_s(z) = \begin{cases} M_1 F_1(z) - M_3 F_{3*}(z), & |z| < R_1^2/R_2 \\ M_1 F_1(z) - M_2 F_{2*}(z) - M_3 F_{3*}(z) \\ R_1^2/R_2 < |z| < R_1 \\ M_2 F_2(z) - M_3 F_{3*}(z) - M_1 F_{1*}(z) \\ R_1 < |z| < R_2 \\ M_3 F_3(z) - M_2 F_{2**}(z) - M_1 F_{1*}(z) \\ R_2 < |z| < R_2^2/R_1 \\ M_3 F_3(z) - M_1 F_{1*}(z), & |z| > R_2^2/R_1 \end{cases} \quad (20)$$

由式 (11)~(20), 并分析 $F_s(z)$ 的奇性主部, 得到下面的边值问题^[8]

$$F_s^+(t) - F_s^-(t) = \begin{cases} -M_2 \overline{G}_P(R_1^2/t) - M_2 \overline{G}_N(R_1^2/t) + \\ M_3 \overline{B} \left(\frac{t}{t-z^*} - 1 \right), & |t| = R_1^2/R_2 \\ -M_2 \overline{G}_P(R_2^2/t) - M_2 \overline{G}_N(R_2^2/t) + \\ M_3 \overline{B} \frac{t}{t-z_0}, & |t| = R_2^2/R_1 \end{cases} \quad (21)$$

根据广义位移连续条件, 即式 (7) 和 (8) 中的第 2

式, 得到如下多连通域的边值问题

$$F_d^+(t) + F_d^-(t) = \begin{cases} \overline{G}_P(R_1^2/t) + \overline{G}_N(R_1^2/t), & |t| = R_1^2/R_2 \\ 0, & t \in L_c \\ \overline{G}_P(R_2^2/t) + \overline{G}_N(R_2^2/t), & |t| = R_2^2/R_1 \end{cases} \quad (22)$$

其中分区全纯函数 $F_d(z)$ 为

$$F_d(z) = \begin{cases} -[F_1(z) + F_{3*}(z)], & |z| < R_1^2/R_2 \\ F_1(z) + F_{2*}(z) + F_{3*}(z), & R_1^2/R_2 < |z| < R_1 \\ F_2(z) + F_{1*}(z) + F_{3*}(z), & R_1 < |z| < R_2 \\ F_3(z) + F_{2**}(z) + F_{1*}(z), & R_2 < |z| < R_2^2/R_1 \\ -[F_3(z) + F_{1*}(z)], & |z| > R_2^2/R_1 \end{cases}$$

通过求解边值问题 (21) 和 (22), 并进行简单的计算后得到^[14]

$$F_2(z) = [M_1 + M_2]^{-1} [M_3 - M_1] F_{3*}(z) + [M_1 + M_2]^{-1} [M_2 - M_1] \overline{G}_P(R_1^2/z) + [M_1 + M_2]^{-1} [M_1 - M_2] \overline{G}_N(R_2^2/z) + [M_1 + M_2]^{-1} M_3 \left(B \frac{z}{z-z_0} + \overline{B} \frac{z}{z-z^*} - \overline{B} \right) + [M_1 + M_2]^{-1} M_1 X_0(z) [G_{z_0}(z) + G_{z^*}(z) + G_\infty(z) + G_0(z) + P(z)] \quad (23)$$

$$F_3(z) = [M_1 + M_3]^{-1} [M_1 - M_2] \overline{G}_P(R_1^2/z) + [M_1 + M_3]^{-1} [M_2 - M_1] \overline{G}_P(R_2^2/z) + [M_1 + M_3]^{-1} M_3 \left(B \frac{z}{z-z_0} + \overline{B} \frac{z}{z-z^*} - \overline{B} \right) + [M_1 + M_3]^{-1} M_1 X_0(z) [G_{z_0}(z) + G_{z^*}(z) + G_\infty(z) + G_0(z) + P(z)] \quad (24)$$

式中, $X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z-a_j)^{-1/2} (z-b_j)^{-1/2}$ 和 $P(z) = \left[\sum_{j=0}^{n-1} C_j^{(w)} z^j \sum_{j=0}^{n-1} C_j^{(\varphi)} z^j \right]^T$. 函数 $X_0(z)$ 是沿 L_c 割开的全平面的一个单值支, 满足 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n X_0(z) = 1$.

$P(z)$ 是任意多项式, 且与 $F_d(z)$ 在无穷远的性态有关. $G_0(z)$, $G_{z_0}(z)$, $G_{z^*}(z)$ 和 $G_\infty(z)$ 分别代表函数 $\left[B \frac{z}{z-z_0} + \overline{B} \left(1 - \frac{z}{z-z^*} \right) \right] / X_0(z)$ 在点 $z = 0, z_0$,

$R_2^2/\bar{z}_0$ 和 ∞ 的奇性主部. 在 $P(z)$ 中还剩余 $2n$ 个常数 ($C_0^{(w)}, C_0^{(\varphi)}, \dots, C_{n-1}^{(w)}, C_{n-1}^{(\varphi)}$) 需要确定. 比较方程 (11) 和式 (24) 中 $F_3(z)$ 在无穷远的性态可以得到两个代数方程. 剩余的 $2(n-1)$ 个方程由裂纹尖端位移和电势单值条件确定.

$$\left. \begin{aligned} & \int_{L_{Cj}} \{ [F_2(t) - F_{2**}(t)] - \\ & [F_3(t) + F_{3*}(t)] \} \frac{dt}{t} = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

则 $2(n-1)$ 个线性代数方程决定 $P(z)$ 中剩余的 $2(n-1)$ 个未知的常数. 将式 (13) 代入式 (23), 并且比较级数的系数, 能够求出未知的系数 c_k 和 d_k .

考虑无限大基体和涂层的界面上有一条弧形裂纹, 不失一般性, 令裂纹 L_{c1} 的端点为 $a = R_2 e^{i\alpha_1}$ 和 $b = R_2 e^{i\alpha_2}$. 由式 (23) 直接写出复势 $F_2(z)$

$$\begin{aligned} F_2(z) = & [M_1 + M_2]^{-1} [M_3 - M_1] F_{3*}(z) + \\ & [M_1 + M_2]^{-1} [M_2 - M_1] \bar{G}_P(R_1^2/z) + \\ & [M_1 + M_2]^{-1} [M_1 - M_2] \bar{G}_N(R_2^2/z) + \\ & [M_1 + M_2]^{-1} M_3 \left(B \frac{z}{z - z_0} + \bar{B} \frac{z}{z - z^*} - \bar{B} \right) + \\ & [M_1 + M_2]^{-1} M_1 X_0(z) z \left(\frac{B \sqrt{(z_0 - a)(z_0 - b)}}{z - z_0} - \right. \\ & \left. \frac{\bar{B} \sqrt{(z^* - a)(z^* - b)}}{z - z^*} - \right. \\ & \left. \frac{\bar{B} R_2 \exp[i(\alpha_1 + \alpha_2)/2]}{z} + B \right) \end{aligned} \quad (26)$$

式中, $X_0(z) = (z - a)^{-1/2} (z - b)^{-1/2}$. 将式 (13) 代入式 (26), 然后比较级数的系数, 得到未知系数 c_k 和 d_k

$$\begin{aligned} c_k = & -\frac{1}{k+1} [M_1 + M_2]^{-1} \mathbf{II} + \\ & \frac{1}{k+1} [M_1 + M_2]^{-1} [M_2 - M_1] \mathbf{A}^{-1} [\bar{\Omega} R_2^{2(k+1)} + \\ & (M_1 - M_2)(M_1 + M_2) \mathbf{II}] R_1^{2(k+1)} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} d_k = & \frac{1}{k+1} \mathbf{A}^{-1} [\Omega R_2^{2(k+1)} + \\ & (M_1 - M_2)(M_1 + M_2) \mathbf{II}] \end{aligned} \quad (28)$$

式中

$$\begin{aligned} \Omega = & [M_3 - M_1] [M_1 + M_3]^{-1} M_3 B \left(\frac{1}{z_0} \right)^{k+1} - \\ & M_1 B \frac{X_0(0)}{X(z_0)} \sum_{m=0}^k H_m \left(\frac{1}{z_0} \right)^{k-m+1} - \end{aligned}$$

$$M_1 \bar{B} \frac{X_0(0)}{X(z^*)} \sum_{m=1}^{\infty} H_{m+k+1} (R_2^2/\bar{z}_0)^m -$$

$$M_1 \bar{B} R_2 \exp[i(\alpha_1 + \alpha_2)/2] X_0(0) H_{k+1} +$$

$$M_1 B X_0(0) H_k + [M_3 - M_1] [M_1 + M_3]^{-1} M_1 \cdot$$

$$\left[-\bar{B} \frac{R_2^{-2(k+1)}}{X(z_0)} \sum_{m=1}^{\infty} h_{m+k} (1/\bar{z}_0)^m - \right.$$

$$B h_k \exp[i(\alpha_1 + \alpha_2)/2] R_2^{-2k-1} +$$

$$\bar{B} h_{k+1} R_2^{-2(k+1)} - B \frac{1}{X(z^*)} \sum_{m=0}^k h_m (R_2^2/z_0)^{k-m} \cdot$$

$$R^{-(2k-1)} (1 - \delta_{k0}) \Big]$$

$$\mathbf{II} = [M_3 - (M_3 - M_1)(M_1 + M_3)^{-1} M_3] \bar{B} \left(\frac{R_2^2}{z_0} \right)^{k+1} -$$

$$M_1 \bar{B} \frac{X_0(0)}{X(z^*)} \sum_{m=0}^{\infty} h_m \left(\frac{R_2^2}{z_0} \right)^{k+m+1} -$$

$$(M_3 - M_1)(M_1 + M_3)^{-1} M_3 \bar{B} \frac{R_2^{2(k+1)}}{X_0(z_0)} \cdot$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} H_m \left(\frac{1}{z_0} \right)^{k+m+2}$$

$$\mathbf{A} = \{ [M_3 - M_1] [M_1 + M_3]^{-1} [M_1 - M_2] +$$

$$[M_1 + M_2] \} R_2^{2(k+1)} +$$

$$[M_3 - M_1] [M_1 + M_3]^{-1} [M_2 - M_1] R_1^{2(k+1)} +$$

$$[M_2 - M_1] [M_1 + M_2]^{-1} [M_1 - M_2] R_1^{2(k+1)}$$

$$H_m = \sum_{n=0}^m P_m P_{n-m} (-1/a)^m (-1/b)^{n-m}$$

$$h_m = \sum_{n=0}^m P_m P_{n-m} (-a)^m (-b)^{n-m}$$

$$X_0(0) = (ab)^{-1/2}$$

$$\text{其中, } P_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ [-0.5(-0.5-1)(-0.5-2) \cdots \\ (-0.5-m+1)]/m!, & m \geq 1 \end{cases}$$

由此, 复势函数 $F_3(z)$ 可以由式 (33) 得到

$$F_3(z) = [M_1 + M_3]^{-1} [M_1 - M_2] \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \bar{d}_k (R_1^2/z)^{(k+1)} +$$

$$[M_1 + M_3]^{-1} [M_2 - M_1] \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \bar{d}_k (R_2^2/z)^{(k+1)} +$$

$$\begin{aligned}
& [M_1 + M_3]^{-1} M_3 \left(B \frac{z}{z - z_0} + \bar{B} \frac{z}{z - z^*} - \bar{B} \right) + \\
& [M_1 + M_3]^{-1} M_1 \left[\frac{B \sqrt{(z_0 - a)(z_0 - b)}}{z - z_0} - \right. \\
& \left. \frac{\bar{B} \sqrt{(z^* - a)(z^* - b)}}{z - z^*} - \right. \\
& \left. \frac{\bar{B} R_2 \exp[i(\alpha_1 + \alpha_2)/2]}{z} + B \right] \frac{z}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \quad (29)
\end{aligned}$$

其中系数 d_k 已由式 (28) 确定. 而基体中的电弹性场可以由式 (1)~(3) 决定.

当螺型位错在夹杂中时, 仿此可解.

3 作用在位错上的像力

作用在位错上的像力可以由广义 Peach-Koehler 公式得到

$$\begin{aligned}
f_x - i f_y &= i [b_z, b_\varphi] [\Sigma_x^0 - i \Sigma_y^0] + \\
& [p, -q] M_3^{-1} [\Sigma_x^0 - i \Sigma_y^0] \quad (30)
\end{aligned}$$

式中 f_x 和 f_y 表示沿 x 和 y 方向的力, Σ_x^0 和 Σ_y^0 表示位错点 z_0 的扰动广义应力场.

根据 Lee 等^[15] 的工作, 可得扰动广义应力场的具体表达式

$$\begin{aligned}
\Sigma_x^0 - i \Sigma_y^0 &= M_3 [M_1 + M_3]^{-1} [M_1 - M_2] \cdot \\
& \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \bar{d}_k (R_1^{2(k+1)} / z_0^{k+2}) - \\
& \frac{1}{2} M_3 (M_1 + M_3)^{-1} M_1 B \left(\frac{1}{z_0 - a} + \frac{1}{z_0 - b} \right) + \\
& M_3 [M_1 + M_3]^{-1} [M_2 - M_1] \cdot \\
& \sum_{k=0}^{\infty} (1+k) \bar{d}_k (R_2^{2(k+1)} / z_0^{k+2}) + \\
& M_3 [M_1 + M_3]^{-1} M_3 \bar{B} \left(\frac{1}{z_0 - z^*} - \frac{1}{z_0} \right) + \\
& M_3 [M_1 + M_3]^{-1} M_1 \cdot \\
& \left[B - \frac{\bar{B} \sqrt{(z^* - a)(z^* - b)}}{z_0 - z^*} - \right. \\
& \left. \frac{\bar{B} R_2 \exp[i(\alpha_1 + \alpha_2)/2]}{z_0} \right] \frac{1}{\sqrt{(z_0 - a)(z_0 - b)}} \quad (31)
\end{aligned}$$

把式 (31) 代入式 (30) 中可以得到作用在压电螺型位错上的像力的具体表达式. 当裂纹消失时, 即 $\alpha_1 = \alpha_2$, 得到的解答和 Liu 等^[8] 的结果一致.

4 分析和讨论

考虑一个特例, 一条界面裂纹关于 x 轴对称分布 ($\alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha$), 且位错在基体中. 利用式 (30) 可以讨论裂纹几何条件, 涂层厚度和材料特性对位错平衡位置的影响. 假设压电螺型位错

$$b = \begin{Bmatrix} b_z \\ b_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 \times 10^{-9} \text{m} \\ 1.0 \text{V} \end{Bmatrix} \text{ 以及 } p = q = 0,$$

并定义 x 方向的像力为 $f_{x0} = 2\pi R_2 f_x / c_{44}^{(3)} b_z^2$.

假设位错沿 $x(z_0 = x_0)$ 轴移动, 此时 $f_y = 0$. 当相对涂层厚度 $R_2/R_1 = 1.05$, 取不同的裂纹几何参数和不同的材料组合, 位错力 f_{x0} 随位错相对位置 x_0/R_2 的变化如图 2 和图 3 所示. 由图 2 和图 3 可知, 当 $\alpha = 0^\circ$ 时, 硬夹杂和薄硬涂层 ($c_{44}^{(1)} > c_{44}^{(2)} > c_{44}^{(3)}$, $e_{15}^{(1)} > e_{15}^{(2)} > e_{15}^{(3)}$) 排斥位错; 当 $\alpha \neq 0^\circ$ 时, 先排斥后吸引位错, 压电螺型位错在 x 轴上有一个不稳定的平衡点. 但是当裂纹角度较大时, 可能会一直吸引位错, 而没有平衡点.

当 $R_2/R_1 = 1.05$, $x_0/R_2 = 1.1$ 时, 取不同的裂纹角度 α , f_{x0} 随 $c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}$ 和 $e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}$ 的变化分别如

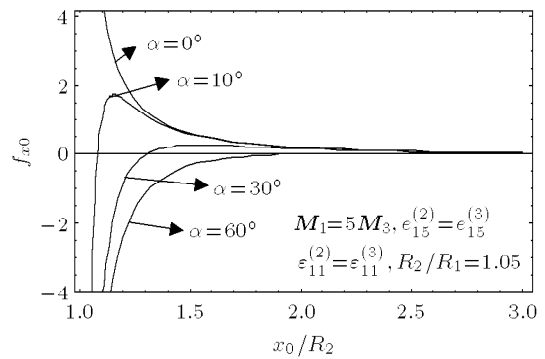


图 2 $c_{22}^{(2)}/c_{44}^{(3)} = 2$, f_{x0} 随 x_0/R_2 的变化

Fig.2 f_{x0} versus x_0/R_2 with $c_{22}^{(2)}/c_{44}^{(3)} = 2$

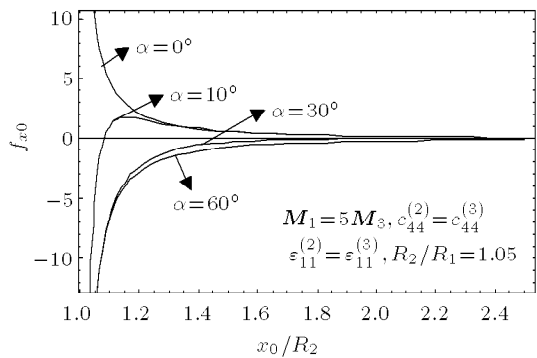


图 3 $e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)} = 2$, f_{x0} 随 x_0/R_2 的变化

Fig.3 f_{x0} versus x_0/R_2 with $e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)} = 2$

图4和图5所示. 由图4和图5可知, f_{x0} 随 $c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}$ 和 $e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}$ 的增加而变大. 随着裂纹角度 α 的变大而减小. 当裂纹角度不为零时, 存在一个 $c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}$ 或 $e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}$ 的临界值改变位错力的方向, 而此时压电位错所在的位置是一个平衡位置. 当 $M_2 = 2M_3$, $M_1 = 5M_3$ 和 $x_0/R_2 = 1.1$ 时, 取不同的裂纹角度 α , f_{x0} 随 R_2/R_1 的变化如图6所示. 由图可知, 随着涂层厚度的增加, 位错力不断减小, 并趋于一个

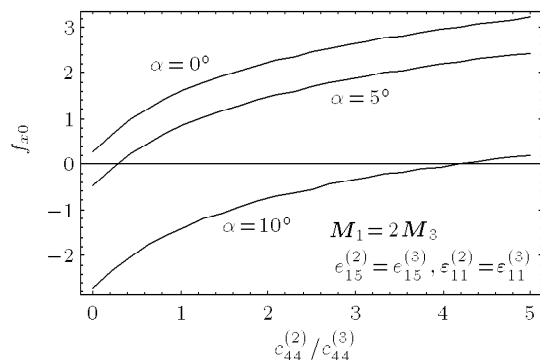


图4 $x_0/R_2 = 1.1$, f_{x0} 随 $c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}$ 的变化

Fig.4 f_{x0} versus $c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}$ with $x_0/R_2 = 1.1$

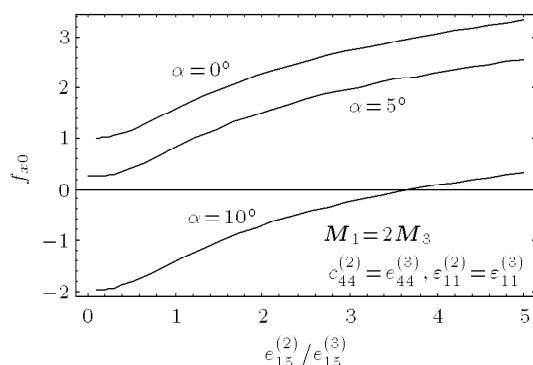


图5 $x_0/R_2 = 1.1$, f_{x0} 随 $e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}$ 的变化

Fig.5 f_{x0} versus $e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}$ with $x_0/R_2 = 1.1$

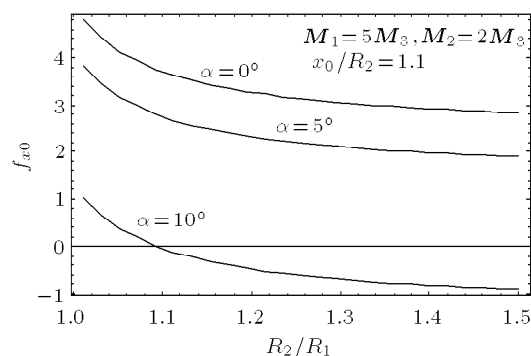


图6 f_{x0} 随 R_2/R_1 的变化

Fig.6 Normalized force f_{x0} versus R_2/R_1

稳定的值, 表明较厚的涂层可以屏蔽夹杂对位错力的影响. 裂纹角度较大时, 存在一个临界厚度改变位错力的方向. 当 $\alpha = 10^\circ$, $x_0/R_2 = 1.1$ 和 $M_1 = 2M_3$ 时, 取不同的 M_2 , f_{x0} 随 R_2/R_1 的变化如图7所示. 涂层较硬时, 随着涂层厚度的增加, 排斥力不断增加, 存在一个厚度的临界值改变位错力的方向. 当 $M_2 = M_3$ 时, 涂层厚度对位错力没有影响.

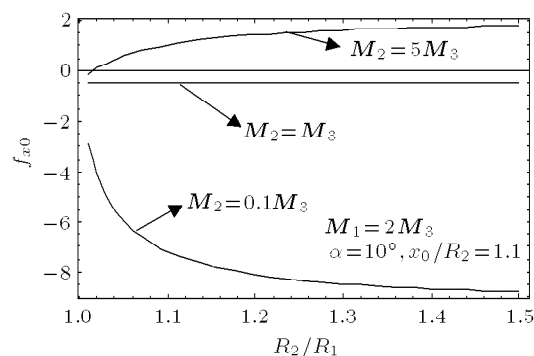


图7 f_{x0} 随 R_2/R_1 的变化

Fig.7 Normalized force f_{x0} versus R_2/R_1

5 总结

本文运用求解复杂多连通域问题的复变函数方法, 获得了压电螺型位错与含界面裂纹圆形涂层夹杂干涉问题的解析解. 基于已获得的复势函数和广义 Peach-Kochler 公式, 计算了作用在位错上的像力. 并讨论了裂纹几何尺寸, 涂层厚度和材料特性对位错力的影响规律. 结果表明, 当压电螺型位错靠近裂纹表面时, 可能存在一个非稳定的平衡点. 同时发现, 裂纹长度, 涂层厚度和材料常数达到某个临界值时可以改变位错力的方向.

参考文献

- 1 Meguid SA, Deng W. Electro-elastic interaction between a screw dislocation and elliptical inhomogeneity in piezoelectric materials. *International Journal Solids and Structures*, 1998, 35: 1467~1482
- 2 Huang Z, Kuang ZB. Dislocation inside a piezoelectric media with an elliptical inhomogeneity. *International Journal Solids and Structures*, 2001, 38: 8459~8480
- 3 Liu JX, Jiang ZQ, Feng WJ. On the electro-elastic interaction of piezoelectric screw dislocation with an elliptical inclusion in piezoelectric materials. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21: 1185~1190
- 4 Liu YW, Fang QH. Electroelastic interaction between a piezoelectric screw dislocation and circular interfacial rigid

- lines. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40(20): 5353~5370
- 5 Liu YW, Fang QH. Electroelastic interaction between a piezoelectric screw dislocation and circular arc interfacial cracks. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25: 1428~1437
 - 6 Liu YW, Fang QH, Jiang CP. A piezoelectric screw dislocation interacting with an interphase layer between a circular inclusion and the matrix. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, 41 (11-12): 3255~3274
 - 7 Luo HA, Chen Y. An edge dislocation in a three-phase composites cylinder. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1991, 58: 75~86
 - 8 Qaisaunee MT, Santare MH. Edge dislocation interaction with an elliptical inclusion surrounding by an interfacial zone. *The Quarterly Journal Mechanics and Applied Mathematics*, 1995, 48: 465~482
 - 9 Xiao ZM, Chen BJ. A screw dislocation interacting with a coated fiber. *Mechanics of Materials*, 2000, 32: 485~494
 - 10 Xiao ZM, Chen BJ. On interaction between an edge dislocation and a coated inclusion. *International Journal of Solids and Structure*, 2001, 38: 2533~2548
 - 11 Liu YW, Jiang CP, Cheung YK. A screw dislocation interacting with an interphase layer between a circular inclusion and the matrix. *International Journal of Engineering Science*, 2003, 41(16): 1883~1898
 - 12 Sudak LJ. Interaction between a screw dislocation and a three-phase circular inhomogeneity with imperfect interface. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2003, 8: 171~188
 - 13 Wang X, Shen YP. An edge dislocation in a three-phase composite cylinder model with a sliding interface. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2002, 69: 527~538
 - 14 Muskhelishvili NL. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Leyden: Noordhoff, 1975
 - 15 Lee KY, Lee WG, Pak YE. Interaction between a semi-infinite crack and a screw dislocation in a piezoelectric material. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2000, 67: 165~170

ELECTROELASTIC INTERACTION BETWEEN A PIEZOELECTRIC SCREW DISLOCATION AND A CIRCULAR COATED INCLUSION WITH INTERFACIAL CRACKS¹⁾

Liu Youwen^{*,2)} Fang Qihong^{*} Jiang Chiping[†]

^{*}(Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, China)

[†](Solid Mechanics Research Center, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract The electroelastic interaction between a piezoelectric screw dislocation and a circular coated inclusion with interfacial cracks is investigated. With the complex variable method, the general solutions of the complex potentials in the matrix, the coating layer and the inclusion regions are derived. As illustrative examples, solutions in the form of explicit series are presented in the case of one interfacial crack. Based on the obtained complex potentials, the image force on the piezoelectric screw dislocation is then calculated by using the generalized Peach-Koehler formula. The equilibrium position of the dislocation is discussed in detail for various crack geometries, coating layer thicknesses and piezoelectric material property combinations. The results show that the interfacial cracks have a significant perturbation effect on the motion of the piezoelectric screw dislocation near the coated circular inclusion and the trapping power of the coated inclusion with interfacial cracks is higher than that of a perfectly bonded one. The critical value of the crack length or the material constant of the coating layer may be found to change the original direction of the image force.

Key words piezoelectric screw dislocation, coating layer, interfacial cracks, complex potential method, image force

Received 31 March 2005, revised 10 January 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10472030).

2) E-mail: liuyouw8294@sina.com