

卫星编队飞行中相对轨道的 J_2 摄动分析¹⁾

孟 鑫 李俊峰²⁾ 高云峰

(清华大学航天航空学院, 北京 100084)

摘要 详细分析了 J_2 摄动对编队卫星相对轨道构形的影响. J_2 摄动对相对轨道的影响分为相对轨道构形的漂移、相对轨道平面的章动和进动. 首先, 分析了相对轨道构形漂移速度、章动角速度和进动角速度的一阶近似表达式的数量级及其影响因素. 其次, 给出一个准则, 来判断同一相对轨道的漂移和转动之间的关系. 最后, 利用该准则, 分析了主、从星的轨道根数差对相对轨道的漂移和转动的影响.

关键词 卫星编队飞行, 相对轨道, J_2 摄动, 漂移, 章动, 进动

中图分类号: V412.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2006)01-0089-08

引 言

随着微小卫星的发展, 卫星编队飞行日益成为航天领域的一个研究热点, 具有广泛而诱人的发展前景, 可应用在电子侦察、导航定位、移动通讯、三维云层气象观测、天文观测以及地球引力场探测等方面. 编队各卫星构成一定的队形, 共同完成任务. 但由于摄动的影响, 编队卫星的轨道根数及相对轨道都会发生变化, 虽然这些摄动力与地球中心引力相比非常小, 但长期作用仍可使卫星轨道偏离卫星应用任务的要求. 因此, 研究卫星编队飞行中的摄动问题很有必要.

对于近地卫星编队飞行而言, J_2 摄动对相对轨道的影响最大^[1], 许多描述编队卫星相对运动的动力学方程^[2,3]和运动学方程^[4~6]可以用来分析 J_2 摄动对编队卫星相对轨道的影响. 文献 [7] 给出了几种编队队形的设计及考虑摄动后队形随时间的演变. 文献 [8] 建立了零 J_2 摄动条件, 得到了两个一阶近似的线性方程. 当编队卫星满足这两个线性方程时, 可大大减小 J_2 摄动对编队卫星相对运动的影响. 文献 [9] 基于 Hill 方程分析了相对轨道构形的几何形状. 当主星轨道为圆轨道时, 相对轨道由主星质心轨道坐标系下的椭圆柱 (偏心率为 $\sqrt{3}/2$) 和平面的交线所决定. 文献 [3] 得到了一组形式上与 Hill 方程类似的相对运动方程. 文中指出, 相对运动在相对轨道平面外的分量的周期和平面内相对运动分

量的周期不相等, 这导致了与椭圆柱相交的平面的法线绕垂直于椭圆柱底面的中心轴进动. 文献 [3, 9] 虽然都从几何上对编队卫星的相对轨道构形进行了研究, 但这些研究并不深入, 仅是提到了相对轨道构形的几何特征. 本文从几何角度来研究编队卫星的相对运动, 并由此来研究 J_2 摄动使编队卫星相对轨道构形发生变化的规律及主、从星初始轨道根数差对相对轨道构形漂移和转动的影响.

1 J_2 摄动下主、从星轨道根数差的变化

不考虑摄动时, 卫星的轨道半长轴 a , 偏心率 e , 倾角 i , 升交点赤经 Ω , 近地点幅角 ω 和近地点时刻 t_p 均为常量, 但考虑 J_2 摄动后, 卫星的轨道根数发生变化, 各轨道根数的表达式中包括短周期项、长周期项和长期项, 其中轨道根数表达式中的长期项是轨道半长轴 a , 偏心率 e 和倾角 i 的函数^[1]. 从 J_2 摄动的长期影响来看, 只有长期项对卫星轨道根数的变化产生影响. 只考虑 J_2 摄动的长期影响, 可得到任意时刻的平均轨道根数, 在此基础上, 可得到任意时刻编队中主、从星的平均轨道根数差. J_2 摄动对主、从星的平均轨道根数差 $\delta a, \delta e, \delta i$ 没有影响, 只会使 $\delta \omega, \delta \Omega, \delta M$ 发生变化^[10]. 式 (1) 为用主、从星的平均轨道根数差 $\delta a, \delta e, \delta i$ 表示的主、从星轨道根数差的变化速率. 需要指出的是, 式 (1) 为主、从星轨道根数差的变化速率的一阶近似表达式.

2005-03-16 收到第 1 稿, 2005-06-20 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10202008), 高等学校博士学科点专项科研基金 (20020003024) 资助项目.

2) E-mail: lijunf@tsinghua.edu.cn

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{a} = \delta \dot{e} = \delta \dot{i} &= 0 \\ \delta \dot{\Omega} &= -\frac{1.5\sqrt{\mu}J_2R_e^2}{(1-e_L^2)^2a_L^{3.5}} \left[-\sin i_L \delta i + \right. \\ &\quad \left. \cos i_L \left(\frac{4e_L\delta e}{1-e_L^2} - \frac{3.5\delta a}{a_L} \right) \right] \\ \delta \dot{\omega} &= \frac{0.75\sqrt{\mu}J_2R_e^2}{(1-e_L^2)^2a_L^{3.5}} \left[-5\sin 2i_L \delta i + \right. \\ &\quad \left. (5\cos^2 i_L - 1) \left(\frac{4e_L\delta e}{1-e_L^2} - \frac{3.5\delta a}{a_L} \right) \right] \\ \delta \dot{M} &= -1.5\sqrt{\frac{\mu}{a_L^3}} \frac{\delta a}{a_L} + \frac{0.75\sqrt{\mu}J_2R_e^2}{(1-e_L^2)^{1.5}a_L^{3.5}} \cdot \\ &\quad \left[-3\sin 2i_L \delta i + (3\cos^2 i_L - 1) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{3e_L\delta e}{1-e_L^2} - \frac{3.5\delta a}{a_L} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

从式(1)中看出,主、从星平均轨道根数差 $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 是平均轨道根数 $\delta a, \delta e, \delta i$ 的函数,一旦初始时刻 $\delta a_0, \delta e_0, \delta i_0$ 确定,任意时刻 $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 为常数.在式(1)的基础上,可得到任意时刻主、从星轨道根数差的一阶近似表达式,其中下标“0”表示卫星运行的初始时刻.

$$\left. \begin{aligned} \delta a &= \delta a_0, \quad \delta e = \delta e_0, \quad \delta i = \delta i_0 \\ \delta \Omega &= \delta \Omega_0 + \delta \dot{\Omega} \cdot (t - t_0) \\ \delta \omega &= \delta \omega_0 + \delta \dot{\omega} \cdot (t - t_0) \\ \delta M &= \delta M_0 + \delta \dot{M} \cdot (t - t_0) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

下面利用式(1)来分析 $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 的数量级.对于近地轨道,主星轨道半长轴 a_L 应在7200km左右,编队卫星间距离从几米到几十千米.如果取主、从星的距离为10km量级,可计算得到轨道根数差的数量级为^[11]

$$\left. \begin{aligned} O(\delta a) &\approx 1\text{m}, \quad O(\delta e) \approx 0.001 \\ O(\delta i) &\approx O(\delta \omega) \approx O(\delta \Omega) \approx O(\delta M) \approx 0.1^\circ \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

对于大多数近地轨道的卫星编队飞行,主、从星轨道根数差的数量级不会大于式(3)的数量级.在式(3)的条件下, $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 的数量级为

$$\left. \begin{aligned} O(\delta \dot{\Omega}) &\approx O \left[\frac{1.5\sqrt{\mu}J_2Re^2}{a_L^{3.5}} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\delta i + 4e_L\delta e + \frac{7\delta a}{2a_L} \right) \right] \approx 10^{-9} \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} O(\delta \dot{\omega}) &\approx O \left[\frac{0.75\sqrt{\mu}J_2Re^2}{a_L^{3.5}} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(5\delta i + 16e_L\delta e + \frac{7\delta a}{a_L} \right) \right] \approx 10^{-9} \\ O(\delta \dot{M}) &\approx O \left(\frac{1.5\sqrt{\mu}}{a_L^{2.5}} \delta a \right) + O \left[\frac{0.75\sqrt{\mu}J_2Re^2}{a_L^{3.5}} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(3\delta i + 2e_L\delta e + \frac{7\delta a}{a_L} \right) \right] \approx 10^{-9} \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

从式(4a),式(4b)看出, $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 的数量级相同.通过上面的分析,可知对于近地轨道的卫星编队飞行, $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 的变化和 $\delta a, \delta e, \delta i$ 都有关系,很难说 $\delta a, \delta e, \delta i$ 中哪一个对 $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 的影响更大一些,只有针对具体情况具体分析.

2 J_2 摄动下相对轨道构形的漂移和转动

文献[10]表明,当主星轨道是小偏心率时,从几何角度看,相对轨道是由一偏心率为 $\sqrt{3}/2$ 的椭圆柱和平面相交所得的交线,因此 J_2 摄动下相对轨道构形的变化可分解为该椭圆柱的变化和平面的变化,椭圆柱的漂移导致相对轨道中心的漂移,漂移速度 $\dot{B}$ 如式(5)所示,平面法线转动引起相对轨道平面转动.将这个法线看成是轴对称刚体的对称轴,法线转动可以用刚体定点运动的章动角和进动角描述,分别记为 θ 和 ψ ,而相应的章动角速度 $\dot{\theta}$ 和进动角速度 $\dot{\psi}$ 分别如式(6)和(7)所示^[10].

$$\dot{B} = a_L(\delta\dot{\omega} + \delta\dot{M} + \delta\dot{\Omega} \cos i_L) \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{2\dot{\alpha}}{1 + 3\cos^2 \alpha} \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{A}{C^2(1 + 3\cos^2 \alpha) + 4A^2} \left[2\dot{C}\sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha} - \frac{3C \sin(2\alpha)\dot{\alpha}}{\sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}} \right] \quad (7)$$

其中

$$A = a_L \sqrt{(e_L + \delta e)^2 + e_L^2 - 2e_L(e_L + \delta e) \cos(\delta M)}$$

$$\alpha = \omega_L - M_z + M_x$$

$$M_x = \tan^{-1} \left(\frac{(e_L + \delta e) \sin(\delta M)}{e_L - (e_L + \delta e) \cos(\delta M)} \right)$$

$$M_z = \tan^{-1} \left(\frac{\delta i}{-\delta \Omega \sin i_L} \right)$$

$$\dot{M}_z = -\frac{\delta i \delta \dot{\Omega} \sin i_L}{(\delta \Omega \sin i_L)^2 + \delta i^2}$$

$$\dot{M}_x = \frac{(e_L + \delta e)[e_L \cos(\delta M) - (e_L + \delta e)]\delta \dot{M}}{e_L^2 - 2e_L(e_L + \delta e) \cos(\delta M) + (e_L + \delta e)^2}$$

$$\dot{C} = \frac{a_L \delta \Omega \delta \dot{\Omega} \sin^2 i_L}{\sqrt{(\delta \Omega \sin i_L)^2 + \delta i^2}}$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} J_2 \frac{\mu^{1/2} R_e^2}{a_L^{3.5} (1 - e_L^2)^2} (5 \cos^2 i_L - 1)$$

从漂移速度和转动角速度公式看出，漂移速度 $\dot{B}$ 只与 $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 有关，而 $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 不随时间变化，因此漂移速度 $\dot{B}$ 为常数，而转动角速度 $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ 的公式 (6) 和 (7) 中含有参数 A, α, C 及其导数 $\dot{\alpha}, \dot{C}$ ，这些参数的表达式中含有 $\delta\omega, \delta\Omega, \delta M$ 这些随时间变化的量，因此转动角速度 $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ 不是常量。这样，只考虑 J_2 摄动的长期影响，可得到任意时刻一阶近似的相对轨道的漂移量与转动量，其中下标“0”表示卫星运行的初始时刻。

$$\left. \begin{aligned} \Delta B &= \dot{B} \cdot (t - t_0) \\ \Delta \theta &= \dot{\theta} \cdot (t - t_0) \\ \Delta \psi &= \dot{\psi} \cdot (t - t_0) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2.1 相对轨道漂移速度 $\dot{B}$ 和转动角速度 $\dot{\psi}, \dot{\theta}$ 的数量级分析

根据式 (3) 中轨道根数差的数量级，分析 $\dot{B}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ 的数量级。

$$O(\dot{B}) = a_L [O(\delta\dot{\omega}) + O(\delta\dot{\Omega}) + O(\delta\dot{M})] \quad (9)$$

$$O(\dot{\theta}) = O\left[\frac{\delta e}{a_L [(\delta i)^2 + (\delta \Omega)^2 + (\delta e)^2]}\right] \cdot (C\dot{A} - \dot{C} + C\dot{\alpha}) = O[\dot{\omega}_L + (ae + 1)\delta\dot{M}] \quad (10)$$

$$O(\dot{\psi}) \approx O(\dot{\alpha}) =$$

$$O\left(\dot{\omega}_L + \dot{M}_x + \frac{\delta i \delta \dot{\Omega} \sin i_L}{(\delta \Omega \sin i_L)^2 + \delta i^2}\right) \approx$$

$$O\left(\dot{\omega}_L + \delta\dot{M} + \frac{\delta \dot{\Omega}}{\delta i}\right) \quad (11)$$

下面再分析 $\dot{\omega}_L$ 的数量级

$$O(\dot{\omega}_L) = O\left(\frac{\sqrt{\mu} J_2 R_e^2}{a_L^{3.5}}\right) \approx 10^{-7} \quad (12)$$

对于主星轨道为小偏心率的编队，把 $\dot{\omega}_L, \delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 的数量级 (如式 (4a), 式 (4b) 和式 (12) 所示) 代入式 (9)~(11) 中，得到 $\dot{B}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ 的数量级为

$$O(\dot{B}) \approx 10^{-5}, O(\dot{\psi}) \approx 10^{-6}, O(\dot{\theta}) \approx 10^{-6} \quad (13)$$

从上面的结果可以看出， $\dot{B}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ 的数量级和 $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 的数量级有关，而从式 (4a), 式 (4b) 看出，在主星轨道根数已知的情况下， $\delta\dot{\omega}, \delta\dot{\Omega}, \delta\dot{M}$ 的

数量级又由 $\delta a, \delta e, \delta i$ 共同决定，因此 $\delta a, \delta e, \delta i$ 对 $\dot{B}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ 都有影响，但很难说出 $\delta a, \delta e, \delta i$ 中具体哪一个对 $\dot{B}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ 的影响更大一些。

2.2 评定 J_2 摄动对相对轨道漂移和转动的影响的准则

从上面的分析知道，相对轨道的漂移速度 $\dot{B}$ 和转动角速度 $\dot{\psi}, \dot{\theta}$ 主要受 $\delta a, \delta e, \delta i$ 的影响。但相对轨道的漂移和转动是两个不同性质的概念，漂移速度是从距离上分析相对轨道的变化，而转动角速度是相对轨道在角度上的变化，因此对于同一相对轨道而言，很难定性地分析漂移和转动之间的关系，也难以比较 $\delta a, \delta e, \delta i$ 对漂移或者转动之间哪一种现象的影响更大一些。下面给出一个准则，来判断同一相对轨道的漂移和转动的关系。首先给出 3 个参数：

Q_1 表示在一个轨道周期内相对轨道沿主星运动方向的漂移量 ΔB 与初始时刻相对轨道在主星轨道平面内的投影椭圆长轴之比，即

$$Q_1 = \frac{\dot{B} T_L}{2A} \times 100\% \quad (14)$$

其中， $A = a\sqrt{e_L^2 + e_f^2 - 2e_L e_f \cos(\delta M)}$ ， T_L 为主星的轨道周期。

Q_2 表示在一个轨道周期内相对轨道平面的章动量 $\Delta \theta$ 与 2π 的比值，即

$$Q_2 = \frac{\dot{\theta} T_L}{2\pi} \times 100\% \quad (15)$$

Q_3 表示在一个轨道周期内相对轨道平面的进动量 $\Delta \psi$ 与 2π 的比值，即

$$Q_3 = \frac{\dot{\psi} T_L}{2\pi} \times 100\% \quad (16)$$

通过 Q_1, Q_2, Q_3 之间的比较来分析漂移和转动的关系。当 Q_1, Q_2, Q_3 的数量级相同时，认为 J_2 摄动对相对轨道漂移和转动的影响相同；当 Q_1 的数量级高于 Q_2, Q_3 的数量级时，相对轨道以漂移为主；反之以转动为主。

下面通过一个算例来分析相对轨道的漂移和转动的关系。本例中主星轨道根数和主、从星轨道根数差分别为

$$a_L = 7500 \text{ km}, e_L = 0.001, i_L = 60^\circ$$

$$\omega_L = 30^\circ, \Omega_L = 45^\circ, M_{L0} = 0$$

$$\delta a = 0, \delta e = 0.001, \delta i = 0.001$$

$$\delta \omega = 0.001, \delta \Omega = 0.001, \delta M_0 = 9.7202 \times 10^{-7}$$

由式 (5), 式 (6) 和式 (7), 可算出任意时刻相对轨道的漂移速度和转动角速度. 漂移速度为 $\dot{B} = -2.595\,857\,875\,456\,651 \times 10^{-5} (\text{km/s})$, 转动角速度 $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ 如图 1 所示. 其中, 虚线表示进动角速度 $\dot{\psi}$, 实线表示章动角速度 $\dot{\theta}$.

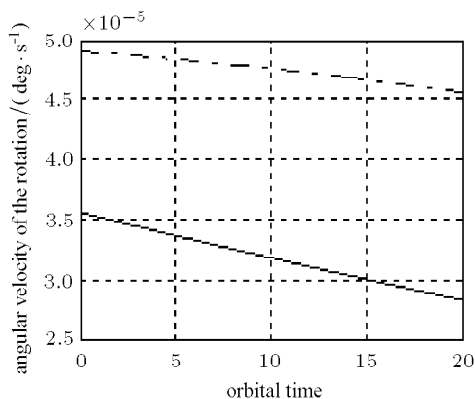


图 1 相对轨道的转动角速度

Fig.1 Angular velocity of the rotation of the relative orbit

编队卫星运行 20 个周期后, 由式 (8) 可知, 相对轨道的漂移量和转动量为

$$\Delta B = -3.355\,936\,622\,303 \text{ km}$$

$$\Delta \psi = 4.142\,125\,226\,765\,1^\circ$$

$$\Delta \theta = 6.084\,897\,282\,185\,39^\circ$$

从上述分析可知 J_2 摄动使相对轨道产生了漂移和转动, 卫星运行 20 个周期后相对轨道沿主星运动反方向漂移了近 3.36 km, 相对轨道平面章动量为 $6.084\,897\,282\,185\,3^\circ$, 而进动量为 $6.084\,897\,282\,185\,3^\circ$. 如果仅从漂移量和转动量这几个数据很难看出 J_2 摄动对该相对轨道的影响中是以漂移为主, 还是以转动为主. 下面应用本文给出的准则来判断在 J_2 摄动的作用下该相对轨道的漂移和转动的关系. 根据式 (14), (15) 和 (16) 计算 Q_1, Q_2, Q_3 的值. 由于 $\dot{B}$ 不随时间变化, 而 $\dot{\theta}, \dot{\psi}$ 随时间变化, 所以 Q_1 为

常数. 尽管 Q_2, Q_3 随时间变化, 但由于 Q_2, Q_3 的变化非常小, 从图 2 中无法反映出. 从图中可看出 $Q_1 > Q_2 > Q_3$, 也就说在 J_2 摄动的作用下, 该相对轨道的漂移比转动更大, 但由于 Q_1, Q_2, Q_3 的量级相同, 所以可以认为 J_2 摄动对该相对轨道的漂移和转动的影响相同.

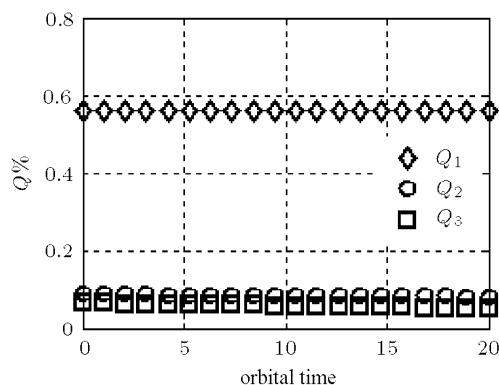


图 2 相对轨道的漂移、章动和进动的比较

Fig.2 Comparisons among drift, nutation and procession of the relative orbit

3 主、从星轨道根数差对相对轨道构形漂移和转动的影响

下面分析初始时刻主、从星的轨道根数差对相对轨道漂移和转动的影响. 仿真所选的主、从星轨道根数差均满足式 (3) 的数量级, 并且仿真中只选一组主星轨道根数, 因为主星轨道根数的不同只会影响 Q_1, Q_2, Q_3 的大小, 而不会影响 $\delta a, \delta e, \delta i$ 不同情况下 Q_1, Q_2, Q_3 的变化规律. 表 1 为仿真中所用到的主星轨道根数及主从星的轨道根数差. 另外, 由式 (2) 可知, 任意时刻主、从星的平均轨道根数差 $\delta a, \delta e, \delta i$ 等于初始时刻平均轨道根数差 $\delta a_0, \delta e_0, \delta i_0$, 因此可认为在卫星编队飞行过程中 $\delta a, \delta e, \delta i$ 不变, 等于初始值.

表 1 仿真中所用的主星轨道根数及主、从星的轨道根数差

Table 1 Orbital elements of leader satellite and orbital elements difference between leader satellite and follower satellite

Orbital elements of leader satellite $a_L = 7\,500 \text{ km}$, $e_L = 0.005$, $i_L = 60^\circ$, $\omega_L = 30^\circ$, $\Omega_L = 45^\circ$, $M_{L0} = 0$	
$0 \leq \delta e_0 \leq 0.1$	$\delta a_0 = 0$, $\delta i_0 = 0.001$, $\delta \omega_0 = 0.001$, $\delta \Omega_0 = 0.001$, $\delta M_0 = 0.001$
$0 \leq \delta a_0 \leq 0.1 \text{ km}$	$\delta e_0 = 0.001$, $\delta i_0 = 0.001$, $\delta \omega_0 = 0.001$, $\delta \Omega_0 = 0.001$, $\delta M_0 = 0.001$
$0 \leq \delta i_0 \leq 0.1 \text{ deg}$	$\delta a_0 = 0$, $\delta e_0 = 0.001$, $\delta \omega_0 = 0.001$, $\delta \Omega_0 = 0.001$, $\delta M_0 = 0.001$
$0 \leq \delta \Omega_0 \leq 0.1 \text{ deg}$	$\delta a_0 = 0$, $\delta e_0 = 0.001$, $\delta i_0 = 0.001$, $\delta \omega_0 = 0.001$, $\delta M_0 = 0.001$
$0 \leq \delta M_0 \leq 0.1 \text{ deg}$	$\delta a_0 = 0$, $\delta e_0 = 0.001$, $\delta i_0 = 0.001$, $\delta \omega_0 = 0.001$, $\delta \Omega_0 = 0.001$

3.1 δe_0 的影响

图 3 为主从星轨道偏心率之差在 $0 < \delta e_0 \leq 0.01$ 内 Q_1, Q_2, Q_3 的变化. 可以看出, 当 $\delta e \rightarrow 0$ 时, Q_1 的数量级远大于 Q_2 和 Q_3 的数量级, 相对轨道以漂移为主. 随着 δe 增大, Q_1 迅速减小, 说明 δe 的增加可减少漂移在相对轨道的各种变化中所占的比重. 另外, 随 δe 的增大, Q_2 和 Q_3 也都有变化, 但 Q_2 的数量级明显小于 Q_1 和 Q_3 的数量级, 说明 δe 的变化对相对轨道章动的影响不如漂移和进动明显. 当 $\delta e_0 > 0.0006$ 时, Q_3 已和 Q_1 在同一个数量级, 并且当 $\delta e_0 > 0.005$

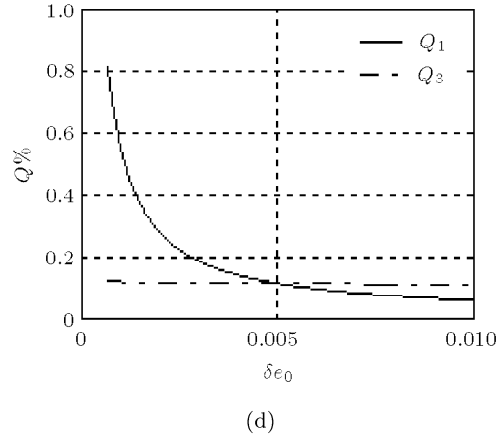
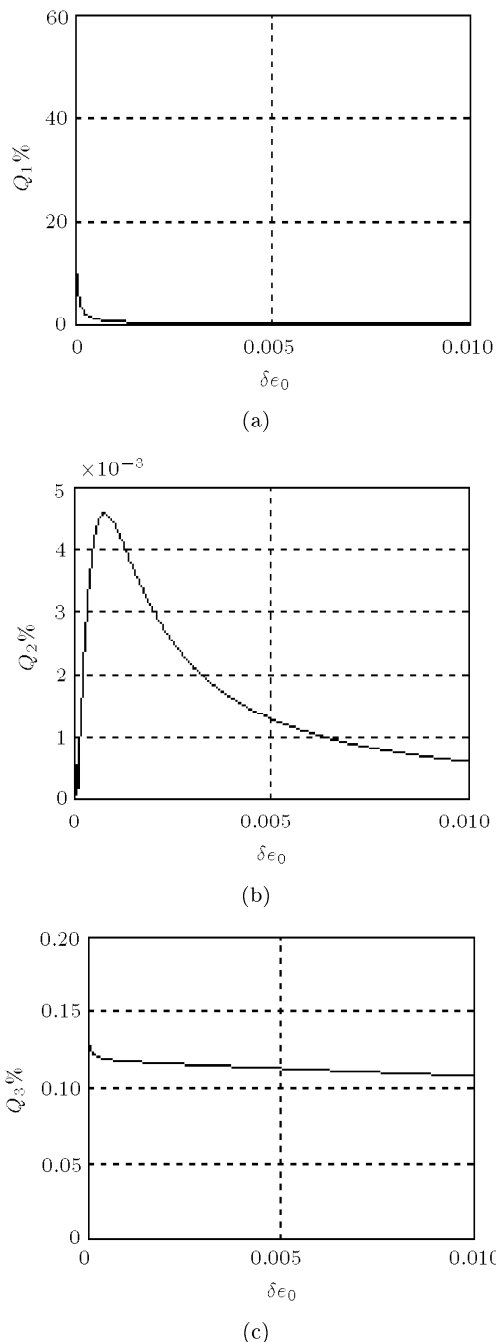


图 3 主、从星初始偏心率之差 δe_0 对 Q_1, Q_2, Q_3 的影响
Fig.3 Effect of initial difference in eccentricity between leader satellite and follower satellite on Q_1, Q_2, Q_3

时, $Q_3 > Q_1$, 如图 3(d) 所示. 此时 J_2 摄动对相对轨道进动影响程度大于对漂移的影响.

通过上面的分析, 得到如下结论:

(1) 随着 δe_0 增大, J_2 摄动对相对轨道漂移的影响减小, 对相对轨道章动的影响增大, 相对轨道的进动虽然也变化, 但并不明显, 这说明 δe_0 的变化对相对轨道的进动影响最小.

(2) $\delta e_0 < 0.0006$ 时, 相对轨道以漂移为主. δe_0 越大, 相对轨道的章动在 J_2 摄动的影响中的比重越大, 但 δe_0 对相对轨道的漂移和章动的影响同样不可忽视.

3.2 δa_0 的影响

如图 4 所示, 随 δa_0 的增大, Q_1, Q_2, Q_3 都发生了变化, 但 Q_1 的数量级远大于 Q_2 和 Q_3 的数量级. 因此 δa_0 的变化对相对轨道的影响以漂移为主,

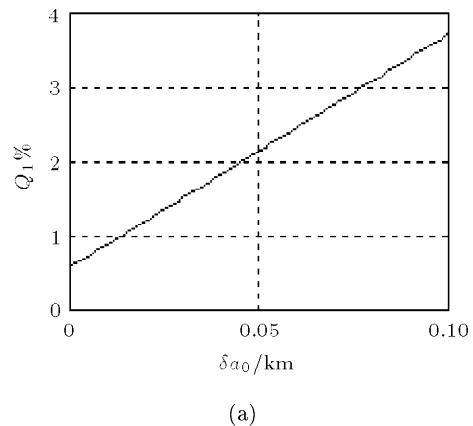
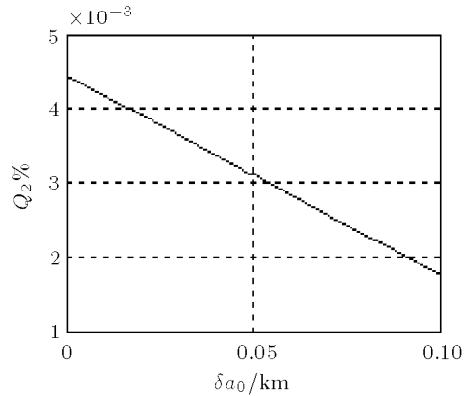
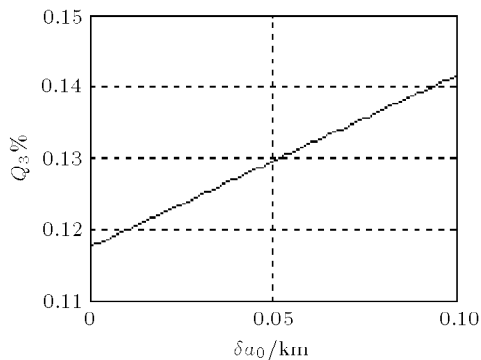


图 4 主、从星初始轨道半长轴之差 δa_0 对 Q_1, Q_2, Q_3 的影响
Fig.4 Effect of initial difference in semi-major axis between leader satellite and follower satellite on Q_1, Q_2, Q_3



(b)



(c)

图 4 主、从星初始轨道半长轴之差 δa_0 对 Q_1, Q_2, Q_3 的影响 (续)

Fig.4 Effect of initial difference in semi-major axis between leader satellite and follower satellite on Q_1, Q_2, Q_3 (continued)

并且随着 δa_0 的增大, 漂移在相对轨道的各种变化中所占的比重越大. Q_2 的数量级最小, 说明 δa_0 的变化对相对轨道章动的影响最小, 不如漂移和进动明显.

3.3 δi_0 的影响

从图 5 中可看出, 随 δi_0 的增大, Q_1, Q_2, Q_3 都发生了变化. Q_1 明显增大, Q_3 的变化最小. 这说

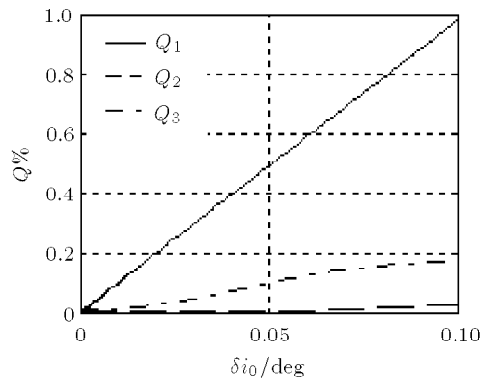
图 5 主、从星初始轨道倾角之差 δi_0 对 Q_1, Q_2, Q_3 的影响

Fig.5 Effect of initial difference in inclination between leader satellite and follower satellite on Q_1, Q_2, Q_3

明, 随 δi_0 的增大, J_2 摄动对相对轨道的影响以漂移为主, 相对轨道的章动最小.

3.4 初始时刻 $\delta \Omega_0, \delta \omega_0, \delta M_0$ 的影响

由于 J_2 摄动的影响, 主从星的轨道根数差 $\delta \Omega, \delta \omega, \delta M$ 随时间变化而导致相对轨道漂移和转动. 由式 (1) 可知, $\delta \dot{\Omega}, \delta \dot{\omega}, \delta \dot{M}$ 只与 $\delta a, \delta e, \delta i$ 有关, 与 $\delta \Omega_0, \delta \omega_0, \delta M_0$ 无关, 因此初始时刻 $\delta \Omega_0, \delta \omega_0, \delta M_0$ 的变化, 不会对 $\delta \dot{\Omega}, \delta \dot{\omega}, \delta \dot{M}$ 产生影响, 由式 (5) 可知, $\delta \Omega_0, \delta \omega_0, \delta M_0$ 的变化对 $\dot{B}$ 没有影响, 即不会影响相对轨道的漂移, 图 6 和图 7 中 Q_1 为常数, 也说明了这一点. 下面分析 $\delta \Omega_0, \delta \omega_0, \delta M_0$ 对相对轨道转动的影响.

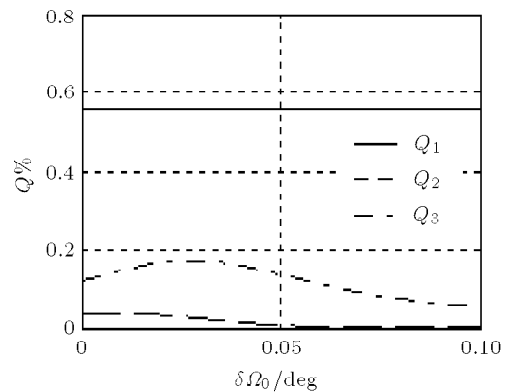
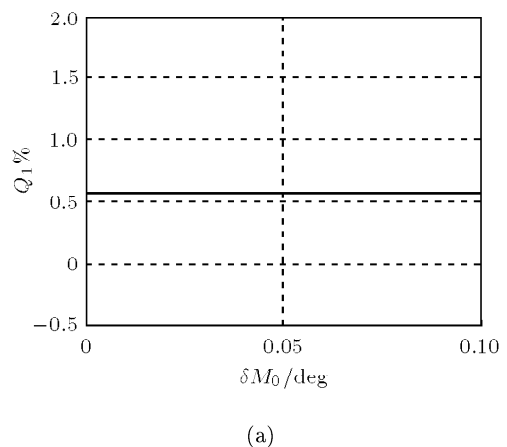
图 6 主、从星初始升交点赤经之差 $\delta \Omega_0$ 对 Q_1, Q_2, Q_3 的影响

Fig.6 Effect of initial difference in right ascension of the ascending nodes between leader satellite and follower satellite on Q_1, Q_2, Q_3



(a)

图 7 主、从星初始平近点角之差 δM_0 对 Q_1, Q_2, Q_3 的影响

Fig.7 Effect of initial difference in mean anomaly between leader satellite and follower satellite on Q_1, Q_2, Q_3

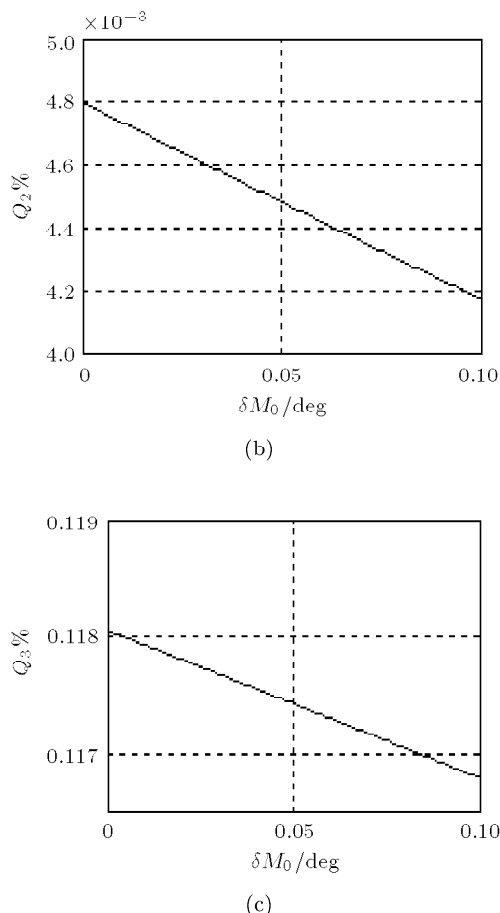
图 7 主、从星初始平近点角之差 δM_0 对 Q_1, Q_2, Q_3 的影响 (续)

Fig.7 Effect of initial difference in mean anomaly between leader satellite and follower satellite on Q_1, Q_2, Q_3 (continued)

(1) $\delta\omega_0$ 的影响: $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\theta}$ 的表达式中不含有 $\delta\omega_0$, 因此 $\delta\omega_0$ 的变化对 $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\theta}$ 没有影响, 即不会影响到相对轨道的章动和进动, 即 Q_2 和 Q_3 不随 $\delta\omega_0$ 的变化而改变.

(2) $\delta\Omega_0$ 的影响: $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\theta}$ 中含有 $\delta\Omega_0$, 因此 $\delta\Omega_0$ 的变化对 $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\theta}$ 有影响, 但影响很小. 如图 6 所示, $Q_3 > Q_2$, 说明 $\delta\Omega_0$ 的变化对相对轨道进动的影响更大一些.

(3) δM_0 的影响: $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\theta}$ 的表达式中含有 δM_0 , 因此 δM_0 的变化对 $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\theta}$ 都有影响. 由于 $Q_3 > Q_2$, 所以 δM_0 的变化对相对轨道进动的影响更大一些, 如图 7 所示.

4 结 论

本文在文献 [10] 的基础上详细分析了 J_2 摄动对编队卫星相对轨道构形的影响. J_2 摄动对相对轨道的影响分为相对轨道构形的漂移、相对轨道平面的章动和进动. 本文分析了相对轨道构形漂移速

度 $\dot{B}$, 章动角速度 $\dot{\theta}$ 和进动角速度 $\dot{\psi}$ 的一阶近似表达式的数量级. 对于近地轨道的卫星编队飞行, 主、从星的轨道根数差为小量, $\dot{B}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ 的数量级近似为 10^{-6} . 相对轨道的漂移速度 $\dot{B}$ 和转动角速度 $\dot{\psi}, \dot{\theta}$ 主要受 $\delta a, \delta e, \delta i$ 的影响, 本文给出一个准则, 来判断同一相对轨道的漂移和转动的关系. 利用该准则, 分析了主、从星的轨道根数差对相对轨道的漂移和转动的影响.

当主、从星轨道偏心率之差很小时, J_2 摄动对相对轨道的影响以漂移为主, 但随着偏心率之差的增大, J_2 摄动对相对轨道漂移的影响减小, 对相对轨道进动的影响增大, 对相对轨道进动的影响不明显. 主、从星轨道半长轴之差及倾角之差对相对轨道的影响以漂移为主, 并且随着半长轴之差和倾角之差的增大, 相对轨道的漂移越明显. 初始时刻主、从星近地点幅角之差的变化不会引起相对轨道的变化, 而初始时刻主、从星升交点赤经之差和平近点角之差的变化只会影响相对轨道的进动.

参 考 文 献

- 1 刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社, 2000 (Liu Lin. Orbit Theory of Spacecraft. Beijing: National Defence Industry Press, 2000 (in Chinese))
- 2 Karlgaard CD, Lutze FH. Second-order relative motion equations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(1): 41~49
- 3 Schweighart SA, Sedwick RJ. High-fidelity linearized J_2 model for satellite formation flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2002, 25(6): 1073~1080
- 4 Alfriend KT, Schaub H. Dynamics and control of spacecraft formations: challenges and some solutions. *Journal of the Astronautical Sciences*, 2000, 48(2-3): 249~267
- 5 Li Junfeng, Meng Xin, Gao Yunfeng, et al. Study on relative orbital configuration in satellite formation flying. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, 21(1): 87~94
- 6 Schaub H. Spacecraft relative orbit geometry description through orbit element differences. 14th U.S. National Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Blacksburg, VA, June 2002
- 7 Sabol C, Burns R, McLaughlin CA. Satellite formation flying design and evolution. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2001, 38(2): 270~278
- 8 孟鑫, 李俊峰, 高云峰. 编队飞行卫星相对运动的零 J_2 摄动条件研究. 清华大学学报 (自然科学版), 2004, 44(2): 219~223 (Meng Xin, Li Junfeng, Gao Yunfeng. J_2 invariant perturbation conditions for the relative movement for satellites in formation flying. *Journal of Tsinghua University (Science and technology)*, 2004, 44(2): 219~223 (in Chinese))
- 9 Yeh H, Sparks A. Geometry and control of satellite formations. Proceedings of the American Control Conference,

Chicago, IL, June 2000

- 10 孟鑫, 李俊峰, 高云峰. 一种便于摄动分析的编队飞行卫星相对运动的描述. 应用数学和力学, 2005, 26(11): 1328~1336 (Meng Xin, Li Junfeng, Gao Yunfeng. A useful relative motion description method for perturbations analysis in satellite formation flying. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005,

26(11): 1464~1474)

- 11 李响. 卫星编队飞行相对轨道构形研究. [硕士论文]. 北京: 清华大学, 2002 (Li Xiang. Study on relative orbital configuration in satellite formation flying. [Master Thesis]. Beijing: Tsinghua University, 2002 (in Chinese))

J_2 PERTURBATION ANALYSIS OF RELATIVE ORBITS IN SATELLITE FORMATION FLYING¹⁾

Meng Xin Li Junfeng²⁾ Gao Yunfeng

(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract J_2 perturbation has a great effect on the relative motion of low-earth orbiting satellites in formation flying and has effect on lives of satellites directly. J_2 perturbation makes the relative orbit drift in the in-track direction, nutation or procession. Firstly, this paper investigates the magnitudes of the first order approximations and influencing factors for drift rate, nutation rate and procession rate. Secondly, a rule is given to estimate the relationship of drift and rotation for a relative orbit. Finally, using the rule, effects of the differences in orbital elements of leading satellite and following satellite on the drift and rotation of the relative orbit are investigated. The conclusions in the paper could be as the reference to determine initial orbital elements of satellites formation design when considering J_2 perturbation.

Key words satellite formation flying, relative orbit, J_2 perturbation, drift, nutation, procession

Received 16 March 2004, revised 20 June 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10202008) and Specialized Research Found for the Doctoral Program of Higher Education (20020003024).

2) E-mail: lijunf@tsinghua.edu.cn