

基于核重构的最小二乘配点法 求解 Helmholtz 方程¹⁾

史宝军^{*,†,2)} 袁明武[†] 舒东伟^{**}

^{*}(山东建筑工程学院机电学院, 济南 250014)

[†](北京大学力学与工程科学系, 北京 100871)

^{**}(南洋理工大学机械与宇航学院, 新加坡 639798)

摘要 基于核重构思想构造近似函数, 将配点法和最小二乘原理相结合对微分方程进行离散, 建立了 Helmholtz 方程的最小二乘配点格式, 并分别研究了 Helmholtz 方程的波传播问题和边界层问题. 通过数值算例可以发现, 给出的数值计算结果非常接近于精确解, 计算精度明显高于 SPH 法的数值结果, 且随着节点数目的增加, 其精确度越来越高, 具有良好的收敛性.

关键词 Helmholtz 方程, 无网格法, 重构核点法, 最小二乘配点格式

中图分类号: O316 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2006)01-0125-05

引 言

在力学、声学、电磁学等数学物理问题中, 以及用特征函数方法解偏微分方程边值问题时, 常遇到 Helmholtz 方程, 它在物理上反映振动的定常状态, 即所谓稳恒振动^[1].

对于 Helmholtz 方程问题, 其微分方程和边界条件可表示为

$$\left. \begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \\ u &= \bar{u}, \text{ 在 } \Gamma_d \text{ 上} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \bar{u}_n, \text{ 在 } \Gamma_n \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, Δ 为 Laplace 算子, u 是未知函数, λ 为常数, Ω 代表微分方程的作用域, Γ_d 代表 Ω 具有 Dirichlet 条件的边界部分, Γ_n 代表 Ω 具有 Neumann 条件的边界部分.

无网格方法可以克服有限元法等传统数值分析方法对网格的依赖性, 彻底或部分地消除网格, 抛开网格的初始划分和网格重构. 现有的无网格法基本上可以分为两大类: Galerkin 型 (如 EFGM^[2], RKPM^[3] 等) 和配点型 (如 SPH^[4], RBF^[5,6] 等). 本文基于核重构思想的最小二乘配点型无网格方

法^[7] 应用于 Helmholtz 方程问题的研究, 建立了 Helmholtz 方程问题的最小二乘配点格式, 分别研究了 Helmholtz 方程的波传播问题和边界层问题.

1 基于核重构思想的最小二乘配点法

以区域 Ω 上定义的函数 $u(x)$ 为例来进行说明, 在区域 Ω 内, 取一组离散的节点 $x_I (I = 1, \dots, N)$, 并把与节点 I 相关联的变量记为 u_I .

1.1 近似函数的构造方法

在核重构方法^[3,7] 中, 近似函数构造过程中的关键步骤是, 用一个修正核函数 $\bar{w}(x-s)$ 来构造函数 $u(x)$ 的近似函数 $\hat{u}(x)$. 具有修正核的近似函数可表示为

$$\hat{u}(x) = \int_{\Omega} \bar{w}(x-s) u(s) d\Omega \quad (2)$$

这里, $\bar{w}(x-s)$ 称为修正核函数, 由式 (3) 给出

$$\bar{w}(x-s) = C(x,s)w(x-s) \quad (3)$$

其中, $w(x-s)$ 称为核函数, $C(x,s)$ 称为修正函数.

修正函数一般可表示为多项式基函数的线性组合. 修正函数中多项式的最高阶次数取决于控制微

2004-06-10 收到第 1 稿, 2005-07-31 收到修改稿.

1) 山东省自然科学基金资助项目 (Y2002A04).

2) E-mail: sbjok@sdai.edu.cn

分方程中的最高阶导数项. 这里, 取修正函数为如下形式

$$C(x, s) = c_0(x) + c_1(x)(x - s) + c_2(x)(x - s)^2 \quad (4)$$

其中, $c_0(x), c_1(x), c_2(x)$ 是修正函数的未知系数, 可根据近似函数的重构条件来确定这些系数 [7].

方程 (2) 的离散形式可表示为

$$\hat{u}(x) = \sum_{I=1}^N \bar{w}(x - s) \cdot u(x_I) \cdot \Delta V_I \quad (5)$$

这里, x_I 表示节点 I 的坐标, $u(x_I)$ 是与节点 I 有关的节点值, ΔV_I 表示与节点 I 有关的区域度量. 一般而言, 节点 I 的未知函数值是 $\hat{u}(x_I)$, 而不是 $u(x_I)$.

修正核函数的离散形式可表示为

$$\bar{w}(x - x_I) = C(x - x_I)w(x - x_I) \quad (6)$$

这里

$$C(x - x_I) = c_0(x) + c_1(x)(x - x_I) + c_2(x)(x - x_I)^2 \quad (7)$$

其中, $w(x - x_I)$ 是以 x_I 为中心的核函数.

式 (5) 给出的离散近似表达式可重写为

$$\hat{u}(x) = \sum_{I=1}^N N_I(x) \cdot u_I \quad (8)$$

其中, $u_I = u(x_I)$ 是第 I 个节点值, $N_I(x)$ 是插值函数, 由下式给出

$$N_I(x) = C(x - x_I)w(x - x_I) \cdot \Delta V_I \quad (9)$$

1.2 Helmholtz 方程的最小二乘配点格式

对于 Helmholtz 方程问题, 将上述基于核重构思想构造的近似函数 $\hat{u}(x)$ 代入方程组 (1) 中, 最小二乘配点法就是根据方程组 (1) 在各离散点处误差 (残量) 平方的总和为最小的条件, 来建立求解试函数的方程组, 从而获得问题的近似解.

设在 Ω 内部布有 N_i 个点, 在 Γ_d 边界上布有 N_d 个点, 在 Γ_n 边界上布有 N_n 个点. 则共计布有 $N_i + N_d + N_n$ 个点. 以 $\hat{u}$ 代替 u 代入方程组 (1), 在 N_i, N_d, N_n 个离散点上误差分别为

$$\left. \begin{aligned} R_i(x_i) &= \Delta \hat{u}(x_i) + \lambda u(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_i \\ R_d(x_i) &= \hat{u}(x_i) - \bar{u}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_d \\ R_n(x_i) &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}(x_i) - \bar{u}_n(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_n \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

上述残量方程可写成矩阵形式

$$R = Su - q \quad (11)$$

这里, S 是系数矩阵, u 是待求的未知列向量, q 是已知载荷列向量.

由式 (11), 各离散点残量的方差总和为

$$J(u) = \sum_{I=1}^N \frac{1}{2} R_I^T R_I \quad (12)$$

根据最小二乘原理, 由各离散点的方差总和为最小的条件可推出要求解的方程组

$$Ku = Q \quad (13)$$

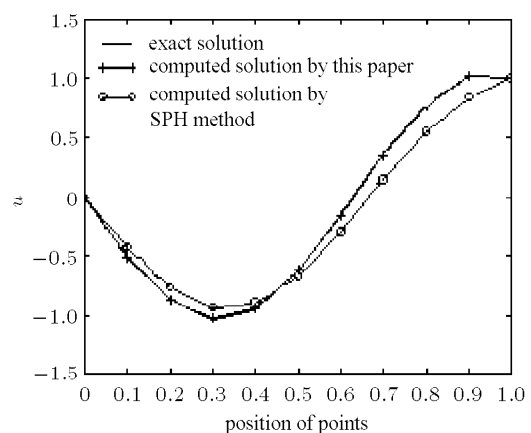
2 数值算例

对于一维 Helmholtz 方程的波传播问题和边界层问题, 其微分方程及边界条件如下

$$\left. \begin{aligned} u'' + \lambda u &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(x=0) &= 0, \quad u(x=1) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

当常数 $\lambda > 0$ 时, 即所谓的波传播问题. 常数 $\lambda < 0$ 时, 即所谓的边界层问题.

图 1, 图 2 分别给出了 $\lambda = 25, 64$ 时, 11 个离散点模型波传播问题的数值结果及其导数与对应精确解和 SPH 法数值结果的比较. 由图 1, 图 2 可以看

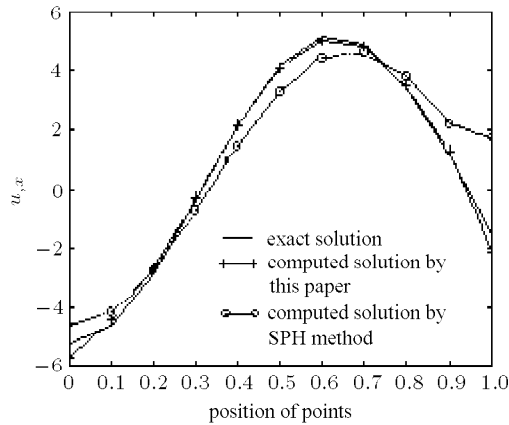
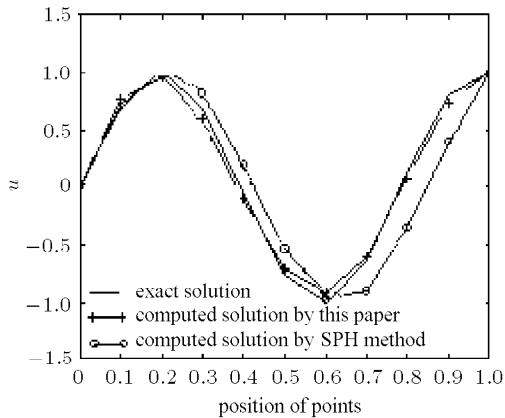
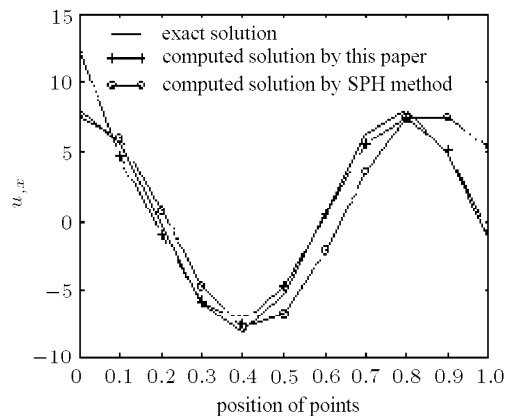


(a) u 的计算结果与精确解和 SPH 法结果的比较

(a) Computed solution, u , is compared with those by SPH method and the exact solution

图 1 $\lambda = 25$ 时波传播问题的数值结果

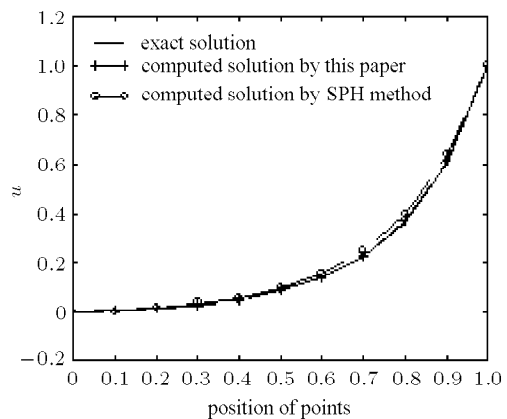
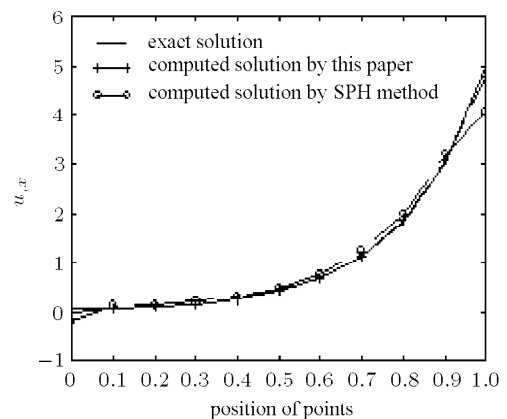
Fig.1 Numerical results of wave transmit ($\lambda = 25$)

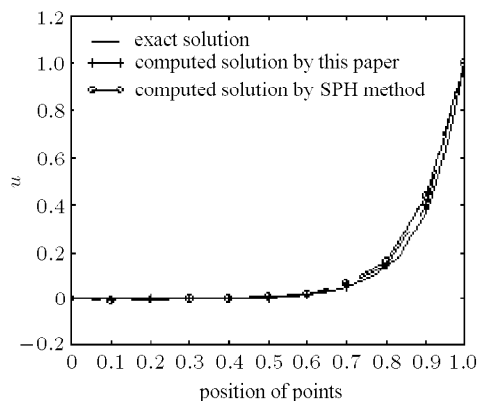
(b) u 的导数的计算结果与精确解和 SPH 法结果的比较(b) Computed derivative, $u_{,x}$, is compared with those by SPH method and the exact derivative图 1 $\lambda = 25$ 时波传播问题的数值结果 (续)Fig.1 Numerical results of wave transmit ($\lambda = 25$)(continued)(a) u 的计算结果与精确解和 SPH 法结果的比较(a) Computed solution, u , is compared with those by SPH method and the exact solution(b) u 的导数的计算结果与精确解和 SPH 法结果的比较(b) Computed derivative, $u_{,x}$, is compared with those by SPH method and the exact derivative图 2 $\lambda = 64$ 时波传播问题的数值结果Fig.2 Numerical results of wave transmit ($\lambda = 64$)

出, 本文给出的数值计算结果非常接近于精确解, 计算精度明显高于 SPH 法的数值结果.

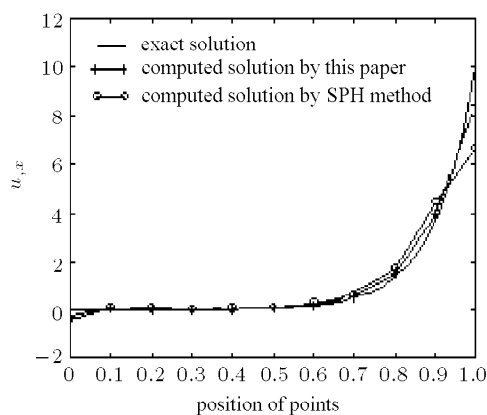
图 3, 图 4 分别给出了 $\lambda = -25, -100$ 时, 11 个离散点模型边界层问题的数值结果及其导数与对应精确解和 SPH 法数值结果的比较; 图 5, 图 6 分别给出了 $\lambda = -100$ 时, 5, 9 个离散点模型边界层问题的数值结果及其与对应精确解和 SPH 法数值结果的比较.

比较图 3, 图 4 可以发现: 随着常数 $|\lambda|$ 的增大, 右侧 (边界条件 $x = 1$ 侧) 边界层梯度变化逐渐增大. 本文的方法给出了较 SPH 法更为准确的数值结果, 尤其是对梯度变化的数值模拟精度更高. 比

(a) u 的计算结果与精确解和 SPH 法结果的比较(a) Computed solution, u , is compared with those by SPH method and the exact solution(b) u 的导数的计算结果与精确解和 SPH 法结果的比较(b) Computed derivative, $u_{,x}$, is compared with those by SPH method and the exact derivative图 3 $\lambda = -25$ 时边界层问题的数值结果Fig.3 Numerical results of boundary layer problem ($\lambda = -25$)



(a) u 的计算结果与精确解和 SPH 法结果的比较
(a) Computed solution, u , is compared with those by SPH method and the exact solution



(b) u 的导数的计算结果与精确解和 SPH 法结果的比较
(b) Computed derivative, $u_{,x}$, is compared with those by SPH method and the exact derivative

图 4 $\lambda = -100$ 时边界层问题的数值结果

Fig.4 Numerical results of boundary layer problem ($\lambda = -100$)

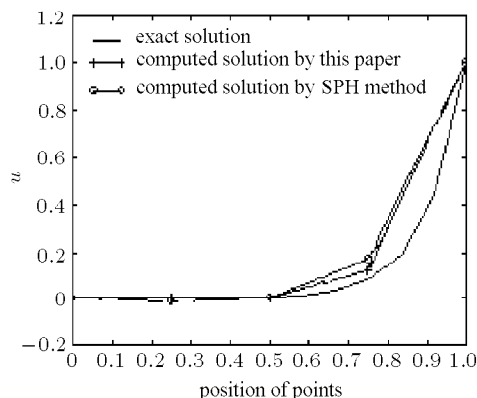


图 5 $\lambda = -100$, 5 个离散点时, 边界层问题数值结果及其与精确解和 SPH 法结果的比较

Fig.5 Numerical results of boundary layer problem ($\lambda = -100$) with five discrete nodes, the computed solution, u , is compared with those by SPH method and the exact solution

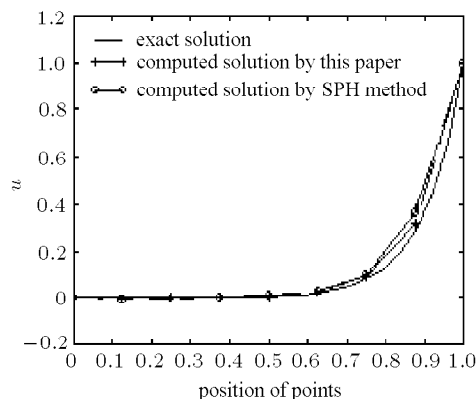


图 6 $\lambda = -100$, 9 个离散点时, 边界层问题数值结果及其与精确解和 SPH 法结果的比较

Fig.6 Numerical results of boundary layer problem ($\lambda = -100$) with nine discrete nodes, the computed solution, u , is compared with those by SPH method and the exact solution

较图 4(a), 图 5 和图 6 可以发现: 随着离散点密度的增加, 本文的方法逐渐趋近于精确解, 表现出了良好的收敛性.

3 结束语

本文在前人研究工作的基础上, 基于核重构造想构造近似函数, 将配点法和最小二乘原理相结合对微分方程进行离散, 建立了 Helmholtz 方程的最小二乘配点格式, 并分别研究了 Helmholtz 方程的传播问题和边界层问题. 通过数值算例可以发现, 本文给出的数值计算结果非常接近于精确解, 计算精度明显高于 SPH 法的数值结果, 且随着节点数目的增加, 其精确度越来越高, 具有良好的收敛性.

参 考 文 献

- 1 苏煜城. 数学物理方程. 北京: 气象出版社, 1988, 9
- 2 Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element free Galerkin methods. *Int J Numer Methods Engng*, 1994, 37: 229~256
- 3 Liu WK, Jun S, Zhang YF. Reproducing kernel particle methods. *Int J Numer Meth Fluids*, 1995, 20: 1081~1106
- 4 Lucy LB. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astron J*, 1977, 8(12): 1013~1024
- 5 Zhang Xiong, Song Kangzu, Lu Mingwan. Meshless method based on collocation with radial basis function. *Comput Mech*, 2000, 26(6): 333~343
- 6 Chen W. Symmetric boundary knot method. *Engng Anal Bound Elem*, 2002, 26(6): 489~494
- 7 史宝军, 袁明武, 李君. 基于核重构造想的最小二乘配点型无网格方法. *力学学报*, 2003, 35 (6): 697~706 (Shi Baojun, Yuan Mingwu, Li Jun. Least-square point collocation method based on reproducing kernel ideas. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(6): 697~706 (in Chinese))

SOLVING HELMHOLTZ EQUATION BY LEAST-SQUARE COLLOCATION METHOD BASED ON REPRODUCING KERNEL PARTICLE METHOD¹⁾

Shi Baojun^{*,†,2)} Yuan Mingwu[†] Shu Dongwei^{**}

^{*}(School of Mechanical & Electronic Engineering, Shandong University of Architecture & Engineering, Jinan 250014, China)

[†](Department of Mechanics & Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

^{**}(School of Mechanical & Aerospace Engineering, Nanyang Technological University, Singapore 639798)

Abstract Helmholtz equation often arises while solving boundary value problems of partial differential equation by eigen function method. In physics, Helmholtz equation represents a stationary state of vibration in the fields of mechanics, acoustics and electro-magnetics. In this paper, a least-square collocation formulation for solving Helmholtz equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions was established. The unknown interpolated functions were first constructed based on reproducing kernel particle method and Helmholtz equation was then discretized by point collocation method. The variance errors of unknown function in each discrete point are minimized by a least-square scheme to arrive at the final solution. To verify the proposed method, a wave propagation problem and a boundary layer problem of Helmholtz equation were solved. Numerical results by the present approach are compared with exact solutions and those by smooth particle hydrodynamics (SPH) method. Numerical examples show that the present method displays better accuracy and convergence than the classical SPH method for the same density of discrete points.

Key words Helmholtz equation, meshless method, reproducing kernel particle method, least-square collocation formulation

Received 10 June 2004, revised 31 July 2005.

1) The project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province (Y2002A04).

2) E-mail: sbjok@sdai.edu.cn