非局部弹性直杆振动特征及 Eringen 常数的一个上限

郑长良 1)

(大连海事大学机电与材料工程学院，大连 116026)

摘要 应用非局部连续介质理论推导了弹性直杆的振动方程，并采用分离变量法进行求解，得到了振动方程的本征方程、模态函数及通解．结果表明：非局部连续介质弹性直杆的自振频率因非局部效应而降低，降低的幅度不仅与材料内禀长度相关，还与振动频率的阶次相关；而且频率大小存在极限值，显示了与晶格点阵相同特性．通过与 Brillouin 格波结果比较，给出了 Eringen 非局部理论中材料常数的一个上限．

关键词 非局部理论，弹性直杆，自振频率，材料常数，上限

中图分类号： O343 **文献标识码：** A **文章编号：** 0459-1879(2005)06-0796-03

引 言

Eringen 的非局部弹性理论成功地描述了高频波在平面弹性介质中的散射现象，并被应用于诸如断裂、位错、复合材料及流体力学等领域中去．非局部连续介质理论在处理较小尺度问题上显示出特有的优点，对处理纳米点、纳米线、纳米带等纳米器件的力学问题展示了较广阔的发展潜力．在纳米尺度上，材料的尺寸效应问题显得尤为突出，纳微尺度上的物理问题日益成为研究者的热点目标，受到研究者的关注 [1,2]．非局部理论通常导致积分微分方程，其求解面临相当的困难，Eringen[3] 给出了一种微分形式的非局部理论，使问题大为简化．文献 [4] 试图将 Eringen 的非局部弹性理论与 Euler/Benoulli 梁相结合，应用于纳米作动器静力问题分析中，预报了非局部效应的影响．本文在 Eringen 的非局部弹性理论框架下讨论弹性直杆的纵向振动问题，研究其自振特性，结合一维晶格动力学的结果，给出了 Eringen 非局部理论中材料常数的一个上限．

1 控制方程

由非局部连续介质理论，单轴本构关系为 [5]

$$\sigma_x - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = E\varepsilon_x \tag{1}$$

其中 σ_x 为轴向应力， ε_x 为轴向应变， E 为杨氏模量， a 为内禀长度， e_0 为常数．

对式 (1) 两端同乘面积 A ，并记轴力 $F = A\sigma_x$

$$F - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = EA\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2}$$

对式 (2) 两边求 x 的一阶导数，有

$$\frac{\partial F}{\partial x} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

考虑杆微元平衡方程

$$F + \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x - F + \overline{f(x)}\mathrm{d}x = 0 \tag{4}$$

$\overline{f(x)}$ 为杆件轴向分布力．

对于自由振动问题，不考虑外部载荷，有

$$\overline{f(x)} = -m\ddot{u} = -\rho A\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} \tag{5}$$

所以有

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6}$$

将式 (6) 代入式 (3)，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7}$$

式 (7) 即为非局部理论下杆件的自由振动动力学方程． ρ 为材料密度， $\alpha = \sqrt{E/\rho}$ 为弹性纵波沿杆件

2004–05–19 收到第 1 稿， 2005–08–02 收到修改稿．

1) E-mail: zhengcl@newmail.dlmu.edu.cn

的纵向传播速度．上式可以由分离变量法求解，假设

$$u(x,t)=\phi(x)q(t) \tag{8}$$

代入式 (7) 可得

$$\frac{\alpha^2\phi''(x)}{[\phi(x)-(e_0a)^2\phi''(x)]}=\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}=-\omega^2 \tag{9}$$

ω^2 为常数，为自由振动的角频率．

由式 (9) 可得

$$\ddot{q}(t)+\omega^2 q(t)=0 \tag{10a}$$

$$\alpha^2\phi''(x)+\omega^2[\phi(x)-(e_0a)^2\phi''(x)]=0 \tag{10b}$$

假设振型函数 $\phi(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}$，代入式 (10b) 中，可得特征值方程为

$$\lambda^2+\frac{\omega^2}{\alpha^2}\frac{1}{1-\omega^2(e_0a/\alpha)^2}=0 \tag{11}$$

若非局部项为零，则退化为传统的直杆振动的特征方程．若振动方程有周期解，显然方程 (11) 须有虚根，则必须满足

$$1-\omega^2(e_0a/\alpha)^2>0 \tag{12}$$

即

$$\omega<\alpha/(e_0a) \tag{13}$$

上式表明：非局部理论下杆件的轴向振动频率不会超过 $\alpha/(e_0a)$，这与经典弹性理论有着本质的区别，经典理论中的振动频率没有界限．

假定式 (12) 得到满足，式 (11) 有两个虚特征根，记为 $\pm\mathrm{i}k$

$$k=\frac{\omega}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-\omega^2(e_0a/\alpha)^2}} \tag{14}$$

其对应两个线性独立解 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}$，由于

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx}=\cos kx\pm\mathrm{i}\sin kx \tag{15}$$

方程 (10b) 的通解可写为

$$\phi(x)=C_1\cos kx+C_2\sin kx \tag{16}$$

积分常数 $C_j(j=1,2,3,4)$ 及参数 ω 应满足频率方程由梁的边界条件确定．可解出无穷多个固有频率 $\omega_i(i=1,2,\cdots)$ 及对应的模态函数 $\phi_i(x)(i=1,2,\cdots)$ 构成系统的第 i 个主振动

$$\omega^{(i)}(x,t)=a_i\phi_i(x)\sin(\omega_i t+\theta_i)\quad(i=1,2,\cdots) \tag{17}$$

系统的自由振动是由无穷多个主振动的叠加

$$\omega(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\phi_i(x)\sin(\omega_i t+\theta_i) \tag{18}$$

其中，常数 a_i 和 $\theta_i(i=1,2,\cdots)$ 由系统的初始条件确定．

2 边界条件

2.1 两端固定

$$\phi(0)=0,\qquad \phi(l)=0 \tag{19}$$

可得

$$C_2=0,\qquad C_1\sin kl=0$$

所以

$$k^{(i)}=\frac{i\pi}{l}\qquad(i=1,2,\cdots) \tag{20}$$

考虑式 (14), 经过计算可得

$$\omega_i=\frac{i\pi\alpha}{l}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\left(\dfrac{e_0a}{l}\cdot i\pi\right)^2}} \tag{21}$$

由式 (21) 可知，在非局部理论下，杆件的自振频率较传统理论值有所降低，降低幅度不仅与内禀尺度相关，还与梁的自振频率的阶次相关．由于

$$\lim_{i\to\infty}\omega_i=\lim_{i\to\infty}\frac{i\pi\alpha}{l}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+\left(\dfrac{e_0a}{l}\cdot i\pi\right)^2}}=\frac{\alpha}{e_0a} \tag{22}$$

式 (21) 确定的频率永远不会超过 $\alpha/(e_0a)$.

$$\phi_i(x)=\sin k_2x=\sin\frac{i\pi}{l}x\quad(i=1,2,\cdots) \tag{23}$$

自由振动的通解式 (21) 可写为

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\sin\frac{i\pi}{l}x\cdot\sin(\omega_i t+\theta_i) \tag{24}$$

可见杆件的振型没有改变，改变的只是自振频率．

2.2 一端固定，一端自由

$$\phi(0)=0,\qquad \phi'(l)=0 \tag{25}$$

可得

$$C_2=0,\qquad C_1k\cos kl=0$$

所以

$$k^{(i)}=\frac{(2i-1)\pi}{2l}\quad(i=1,2,\cdots) \tag{26}$$

考虑式 (14), 经过计算可得

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi\alpha}{2l} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\left[\frac{e_0 a}{2l}\cdot(2i-1)\pi\right]^2}} \tag{27}$$

同样

$$\lim_{i\to\infty} \omega_i = \alpha/(e_0 a) \tag{28}$$

由上可知非局部理论中的弹性直杆的自振频率虽然有无限个, 但频率大小是有限的, 这与晶格动力学中的结果有相似之处, 由一维布喇菲格子的晶格动力学, 仅考虑最临近原子的相互作用, Brillouin 给出了晶格中可传播的波的最大频率为 [5]

$$\omega_{\max} = 2\alpha/a \tag{29}$$

式 (13) 右端给出了非局部理论中的弹性直杆的自振频率的极限, 作为一个连续介质理论, 其所预报的频率范围必须能够包含晶格动力学的全部频率, 因此要求

$$\omega_{\max} = 2\alpha/a < \alpha/(e_0 a) \tag{30}$$

由此可得

$$e_0 < 1/2 \tag{31}$$

这便是此类 Eringen 非局部理论, 在以上条件下, 其材料常数所须满足的一个上限. 以上的结果是对照一维布喇菲格子产生的结果, 如果采用其它格子的进行对照, 可能会得出不同的界限. 但本文的方法应该是具有普遍性的.

3 结 论

非局部理论中的弹性直杆的自振频率虽然有无限个, 但频率大小是有限的, 与微观的晶格动力学相对照, 可以给出 Eringen 模型中材料常数的界限.

参 考 文 献

1 Ganghoffer JF, Borst R De. A new framework in nonlocal mechanics. *International Journal of Engineering Science*, 2000, 38: 453～486

2 Altan BS, Subhash Ghatu. A nonlocal formulation based on a novel averaging scheme applicable to nanostructured materials. *Mechanics of Materials*, 2003, 35: 281～294

3 Eringen AC. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *J Appl Phys*, 1983, 54(9): 4703～4710

4 Peddieson John, Buchanan GR, McNitt RP. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 2003, 41: 305～312

5 Wang YS. Nonlocal elastic analogy for wave propagation in periodic layered composites. *Mech Res Comm*, 1999, 26(6): 719～723

THE FREE VIBRATION CHARACTERISTICS OF NONLOCAL CONTINUUM BAR AND AN UPPER BOUND OF MATERIAL CONSTANT IN ERINGEN'S NONLOCAL MODEL

Zheng Changliang[1)]

(*Eletromechanics & Materials Engineering College, Dalian Maritime University, Dalian* 116026, *China*)

Abstract The dynamic equation of nonlocal elastic bar based on nonlocal continuum theory is derived and solved using variable separating technique. The eigenequation, mode functions and general solution of nonlocal elastic bar are obtained. Solutions show that nonlocal effects decrease the eigenfrequency and the decrease depends on not only the internal characteristic length but also the order of frequency. And there exists a limitation value for all the eigenfrequencies, which is similar to the result of lattice dynamics. Compared the limit value with Brillouin's solution of lattice dynamics, an upper bound for material constant in Eringen's nonlocal theory is given.

Key words nonlocal continuum theory, elastic bar, free vibration frequency, material constant, upper bound

Received 19 May 2004, revised 2 August 2005.

1) E-mail: zhengcl@newmail.dlmu.edu.cn