

基于参数展开的同伦分析技术及其应用¹⁾

孙中奎* 徐 伟*,²⁾ 杨晓丽*,[†] 许 勇*

*(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

[†](陕西师范大学数学系, 西安 710062)

摘要 提出了一种基于参数展开的新的同伦分析技术 (PE-HAM): 结合参数展开技术和同伦理论将一非线性动力系统 (不要求系统内含有小参数) 的求解问题转化为一组线性微分方程的求解问题, 并将之运用到强非线性振动领域. 用该方法研究了强非线性 Duffing 系统的响应问题, 得到了一阶近似解. 作为特例讨论了保守 Duffing 系统和受谐和激励的耗散 Duffing 系统的稳态响应问题. 数值模拟的结果, 说明了新方法的有效性.

关键词 PE-HAM, 强非线性振动, 耗散, 谐和激励

中图分类号: O322 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2005)05-0667-06

引 言

对非线性动力系统的研究一直是中外广大学者关注的重要课题. 由于精确求解很困难, 甚至是不可能的, 因此各种解析、半解析的高精度近似解成为当前研究的主题. 目前, 包括经典摄动法在内的许多方法^[1]在动力系统中得到广泛应用, 并揭示出大量复杂的动力学现象. 由于其对小参数的依赖, 使得它们只能适用于弱非线性动力系统, 而对于那些不含参数或含有有限参数的所谓强非线性系统, 这些方法就显得无能为力. 如何拓宽已有方法的适用范围, 使之能同样适用于强非线性动力系统, 成为当前这一领域研究的主流: 平均法^[2], 频闪法^[3], KBM 法^[1], 渐进法^[4], 频率增量法^[5]等已经用于求解强非线性动力系统的响应问题; 1986 年 Burton 和 Rahman^[6]通过引进一个变换 $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, 用多尺度方法研究了一类受迫的强非线性振子; 1991 年 Chueng 等^[7]用改进的 LP 法研究了含有立方项的 Duffing 振子; 1992 年 Liao^[8]在博士论文中首次将同伦理论运用到非线性动力系统中, 提出了一种崭新的不依赖于小参数的方法——同伦分析技术 (HAM), 并用它研究了著名的 Blasius 方程, 得到了高精度的近似解. 1999 年 Liao^[9]运用改进的同伦分析技术得到了 Blasius 方程高精度的解析近似解. 2003 年 Liao^[10]通过将系统的解展开成 $\{(1 + \lambda t)^{-m} \sin(n\omega t), (1 + \lambda t)^{-m} \cos(n\omega t) | m \geq$

$1, n \geq 0\}$ 的级数形式研究了不带激励项的耗散系统. He^[11]结合摄动法和同伦理论提出了同伦摄动法 (HPM); 2003 年 He^[12]比较了同伦分析法和同伦摄动法的异同. 已有算例^[9~12]表明同伦理论在非线性的动力系统中具有巨大的应用潜力.

本文结合同伦理论和参数展开技术提出了一种基于参数展开的同伦分析技术 (PE-HAM), 通过将 ω^2 进行展开 (若系统含有谐和激励, 则展开激励项频率), 消除了久期项, 进而得到系统的近似周期解. 本文内容安排如下: 第 1 部分阐述了 PE-HAM 方法的基本思想; 第 2 部分研究了强非线性 Duffing 振子的响应问题, 得到了解析式; 作为特例, 在第 3 部分给出保守 Duffing 系统和受谐和激励的耗散 Duffing 系统的响应公式以及数值模拟. 结果表明, 即使在非线性强度 α 很大时, 近似解与精确解吻合得也非常好; 最后, 在第 4 部分比较了文中所提方法与 HPM 法的区别, 并对全文进行了总结.

1 PE-HAM 基本思想

为了说明 PE-HAM 法的基本思想, 考虑具有一般形式的非线性系统

$$L(u) + N(u) = 0 \quad (1)$$

其中, $L(\bullet)$ 为线性微分算子, $L(u)$ 表示系统 (1) 的线性部分; $N(\bullet)$ 为非线性微分算子, $N(u)$ 表示系

2004-04-12 收到第 1 稿, 2005-03-03 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10332030), 陕西省自然科学基金 (2003A03) 和西北工业大学博士论文创新基金 (CX200516) 资助项目.

2) E-mail: weixu@nwnpu.edu.cn

统 (1) 的非线性部分. 这里并不要求系统 (1) 中含有小参数或任何其它类型的参数.

首先, 构造同伦映射 $H: u(t) \rightarrow u(t, p, \gamma)$, 满足

$$H(t, p, \gamma) = (1 - \gamma p)[L(u) - L(u_0)] + \gamma p[L(u) + N(u)] \quad (2)$$

这里 $\gamma \in R \setminus 0, p \in [0, 1/\gamma]$. 令 $H(t, p, \gamma) = 0$, 得到

$$(1 - \gamma p)[L(u) - L_0(u_0)] + \gamma p[L(u) + N(u)] = 0 \quad (3)$$

很明显, 在 $p = 1/\gamma$ 时, 式 (3) 即为原系统式 (1); 在 $p = 0$ 时, 式 (3) 即退化为一线性系统. 根据同伦原理和微分方程解对参数的连续依赖性, 易知: 式 (3) 的解 $u(\tau, p)$ 在 $p \rightarrow 1/\gamma$ 时, 连续变化到式 (1) 的解 $u(t)$. 因为方程 (1) 是二阶微分方程, 因此对 ω^2 (有谐和激励时是 Ω 或 Ω^2) 进行展开

$$\omega^2(p) = \omega_0^2 + \omega_1 p + \omega_2 p^2 + \omega_3 p^3 + \cdots \quad (4)$$

这个展开式曾被 Burton 和 Rahman^[6] 以及 Cheung^[7], Burton^[13] 采用.

引进新的时间尺度

$$\tau = \omega t \quad (5)$$

将式 (4), (5) 代入式 (1) 中, 得到

$$\hat{L}(u) + \hat{N}(u) = 0 \quad (6)$$

其中 $\hat{L}(u) = L(u(\tau, p))$ 表示系统 (1) 的线性部分; $\hat{N}(u) = N(u(\tau, p))$ 表示系统 (1) 的非线性部分. 易知系统 (1) 和 (6) 是等价的.

将式 (4), (5) 代入式 (3) 中, 得到

$$(1 - \gamma p)[\hat{L}(u) - L_0(u_0)] + \gamma p[\hat{L}(u) + \hat{N}(u)] = 0 \quad (7)$$

同理, 式 (7) 的解 $\hat{u}(\tau, p)$ 在 $p \rightarrow 1/\gamma$ 时, 连续变化到式 (6) 的解 $\hat{u}(\tau)$.

为了求解式 (7), 首先对它进行变形^[8~10], 并令 $p = 0$, 则有

$$-\gamma(k+1)\hat{L}(u_0)^{[k]} + \hat{L}(u_0)^{[k+1]} = -\gamma(k+1)[\hat{L}(u_0)^{[k]} + \hat{N}(u_0)^{[k]}] \quad (8)$$

这里 $\hat{L}(u)^{[k]} = \frac{\partial^k \hat{L}(u)}{\partial p^k}$, $\hat{N}(u)^{[k]} = \frac{\partial^k \hat{N}(u)}{\partial p^k}$, 其中 $u_0 = u_0(\tau) = u(\tau, 0)$. 不难看出在 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 时, 式 (8) 为一组具有递推关系的线性微分方程, 因

此很容易逐次求解出 $u_0^{[k]}$. 其次将 $\hat{u}(\tau, p)$ 在 $p = 0$ 点进行 Taylor 展开, 并在方程两边取极限 $p \rightarrow 1/\gamma$, 则

$$\hat{u}(\tau) = \lim_{p \rightarrow 1/\gamma} \hat{u}(\tau, p) = \lim_{p \rightarrow 1/\gamma} \left(u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_0^{[k]}}{k!} p^k \right) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_0^{[k]}}{k!} \frac{1}{\gamma^k} \quad (9)$$

这样我们就把对非线性动力系统 (1) 的求解问题化为一组线性微分方程的求解问题.

2 PE-HAM 方法在 Duffing 系统中的应用

利用前面所提的 PE-HAM 方法研究如下 Duffing 系统

$$\ddot{u} + \beta \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u + \alpha u^3 = \lambda \cos \Omega t \quad (10)$$

u 上的圆点 “.” 表示对 t 求导, ω_0 为系统的自然频率, β 为阻尼项的系数, α 为非线性项的系数, λ 为谐和激励项的系数, 这里并不要求 α 和 β 为小参数. 很明显, 在 $\beta = 0, \lambda = 0$ 时, 系统退化为保守 Duffing 系统 (自由振动系统). 把系统 (10) 表示成算子的形式

$$L(u) + N(u) = 0$$

这里 $L(u) = \ddot{u} + \beta \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u$, $N(u) = \alpha u^3 - \lambda \cos \Omega t$, 并令 $A(u) = L(u) + N(u)$. 运用 PE-HAM 方法对系统 (10) 进行求解, 可以得到系统 (10) 的变形通式

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 u_0''^{[k+1]} + \beta \omega_0^2 u_0'^{[k+1]} + \omega_0^2 u_0^{[k+1]} = \\ & -\gamma(k+1) \left[\alpha \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i C_k^i C_i^j u^{[j]} u^{[i-j]} u^{[k-i]} \right] - \\ & \left[\sum_{i=1}^{k+1} \sum_{j=0}^i C_{k+1}^i C_i^j i! (i-j)! \omega_i \omega_{i-j} u_0''^{[k-i+1]} + \right. \\ & \left. \beta \omega_0 \sum_{i=1}^{k+1} C_{k+1}^i i! \omega_i u_0'^{[k-i+1]} \right], \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (11)$$

从式 (11) 可以很容易得到任意阶的变形方程. 为避免繁琐, 在这里只取到二阶.

$$\left. \begin{aligned} u_0'' + \beta u_0' + u_0 &= 0 \\ u_0^{[1]''} + \beta u_0^{[1]'} + u_0^{[1]} &= \\ & -\gamma \left(u_0'' + \beta u_0' + u_0 + \frac{\alpha}{\omega_0^2} u_0^3 - \frac{\lambda}{\omega_0^2} \cos \tau \right) - \\ & \frac{2\omega_1}{\omega_0} u_0'' - \frac{\beta\omega_1}{\omega_0} u_0' \\ u_0^{[2]''} + \beta u_0^{[2]'} + u_0^{[2]} &= \\ & -\gamma \frac{6\alpha}{\omega_0^2} u_0^{[1]} u_0' - \frac{4\omega_1}{\omega_0} u_0^{[1]''} - \frac{2\beta\omega_1}{\omega_0} u_0^{[1]'} - \\ & \frac{2(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2)}{\omega_0^2} u_0'' - \frac{2\beta\omega_2}{\omega_0} u_0' \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

初始条件为 $u_0(0) = a_0, u_0^{[k]}(0) = 0, k \geq 1, a_0$ 为常数.

由初始条件和式 (12) 中的第 1 个式子, 可以求得零阶近似解为

$$u_0^{[0]}(\tau) = e^{\phi_1 \tau} (a_0 \cos \phi_2 \tau + b_0 \sin \phi_2 \tau) \quad (13)$$

这里 $\phi_1 = -\beta/2, \phi_2 = \sqrt{4 - \beta^2}/2, u_0(0) = a_0, b_0$ 为待定参数, 可通过消除长期项决定.

将式 (13) 代入式 (12) 中的第 2 式, 消除长期项并化简可得

$$\begin{aligned} u_0^{[1]''} + \beta u_0^{[1]'} + u_0^{[1]} &= -\frac{3\alpha a_0^3 \gamma}{4\omega_0^2} e^{3\phi_1 \tau} \cos \phi_2 \tau - \\ & \frac{\alpha a_0^3 \gamma}{4\omega_0^2} e^{3\phi_1 \tau} \cos 3\phi_2 \tau + \frac{\lambda \gamma}{\omega_0^2} \cos \tau \end{aligned} \quad (14)$$

显然式 (14) 为线性常微分方程, 其解为

$$\begin{aligned} u_0^{[1]} &= e^{\phi_1 \tau} (a_1 \cos \phi_2 \tau + b_1 \sin \phi_2 \tau) + \\ & e^{3\phi_1 \tau} (A_1 \cos \phi_2 \tau + B_1 \sin \phi_2 \tau) + \\ & e^{3\phi_1 \tau} (A_2 \cos 3\phi_2 \tau + B_2 \sin 3\phi_2 \tau) + \\ & A_3 \cos \tau + B_3 \sin \tau \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-(9\phi_1^2 - \phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1)}{(9\phi_1^2 - \phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1)^2 + (6\phi_1\phi_2 + \beta\phi_2)^2} \\ B_1 &= \frac{-(6\phi_1\phi_2 + \beta\phi_2)}{(9\phi_1^2 - \phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1)^2 + (6\phi_1\phi_2 + \beta\phi_2)^2} \\ A_2 &= \frac{-(9\phi_1^2 - 9\phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1)}{(9\phi_1^2 - 9\phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1)^2 + 9(6\phi_1\phi_2 + \beta\phi_2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{-(18\phi_1\phi_2 + 3\beta\phi_2)}{(9\phi_1^2 - 9\phi_2^2 + 3\beta\phi_1 + 1)^2 + 9(6\phi_1\phi_2 + \beta\phi_2)^2} \\ A_3 &= 0, \quad B_3 = \frac{\lambda\gamma}{\beta\omega_0^2} \quad \text{以及} \quad a_1 = -A_1 - A_2 \end{aligned}$$

为了确定 b_1 和 ω_2 的值, 可以将式 (13), (15) 代入式 (12) 第 3 式, 通过化简并消除久期项, 我们可以得到: $b_1 = 0, \omega_2 = 0$. 所以一阶近似解为 $u(\tau) = u_0 + u_0^{[1]}/\gamma$.

从理论上, 可以求出任意 m 阶的近似解, 而且随着 m 的增大近似解也越来越接近系统的精确解.

3 数值模拟

上一节推导了运用 PE-HAM 法求解系统 (10) 的一般性公式. 事实上, 上一节的结果对自由振动系统和非自由振动系统都是适用的. 作为特例, 本节将对保守 Duffing 系统 (自由振动系统) 和受谐和激励的耗散 Duffing 系统 (非自由振动系统) 分别进行模拟以验证文中所提方法的有效性.

3.1 保守 Duffing 系统

在 $\beta = 0, \lambda = 0$ 时, 系统 (11) 退化为保守 Duffing 系统: $\ddot{u} + \omega_0^2 u + \alpha u^3 = 0$. 在式 (13) 中令 $\beta = 0, \lambda = 0$, 可得保守系统的零阶近似解

$$u(t) = a_0 \cos \left(t\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{3\alpha a_0^2}{4} \right)} \right)$$

保守系统的精确周期

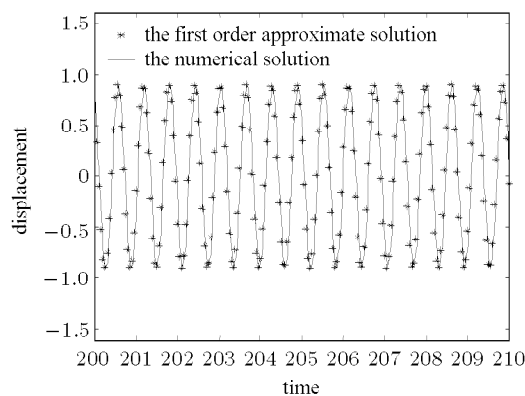
$$T = \frac{4}{\sqrt{1 + \alpha a_0^2}} K(\mu)$$

其中, $\mu = \sqrt{\frac{1}{2} \alpha a_0^2 / (1 + \alpha a_0^2)}$, $K(\bullet)$ 为第 1 类椭圆积分. $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{T_{\text{pert}}}{T} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \frac{1}{K(1/\sqrt{2})}$, 相对误差 $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{|T - T_{\text{pert}}|}{T} = 2.17\%$. 一阶近似解

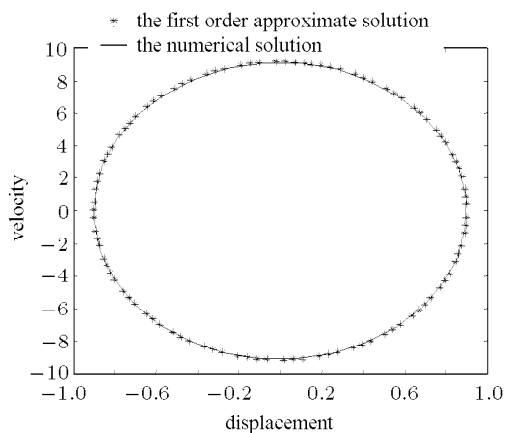
$$\begin{aligned} u(t) &= a_0 \cos \left(t\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{3\alpha a_0^2}{4} \right)} \right) - \\ & \frac{\alpha a_0^3}{32\omega_0^2} \cos \left(t\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{3\alpha a_0^2}{4} + \frac{\varphi}{2a_0} \right)} \right) + \\ & \frac{\alpha a_0^3}{32\omega_0^2} \cos \left(3t\omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{3\alpha a_0^2}{4} + \frac{\varphi}{2a_0} \right)} \right) \end{aligned}$$

其中 $\varphi = 9\alpha a_0^2 a_1 + 3\alpha a_0^2 A - 2\omega_1 a_1$. 在参数 $a_0 = 0.9, \alpha = 5$ 下将本文所得理论解和原系统的数值解进

行模拟, 见图 1.



(a)



(b)

图 1 系统 (10) 时间历程图和相轨图

Fig.1 The time history and phase plot of Eq.(10)

3.2 受谐和激励的耗散 Duffing 系统

在 $\beta \neq 0, \lambda = 0$ 时, 系统退化为不含激励项的耗散系统. Liao 在文献 [11] 中, 运用 HAM 法研究了这类系统的近似周期解. 在 $\beta \neq 0, \lambda \neq 0$ 时, 原系统是谐和激励下的耗散 Duffing 系统. 本小节在两组参数下, 对系统的一阶近似解进行了模拟, 并与数值解进行了比较.

第 1 组: $a_0 = 5.5, \alpha = 2, \beta = 0.1, \lambda = 1.0$

图 2 显示的是在第 1 组参数下的近似解和数值

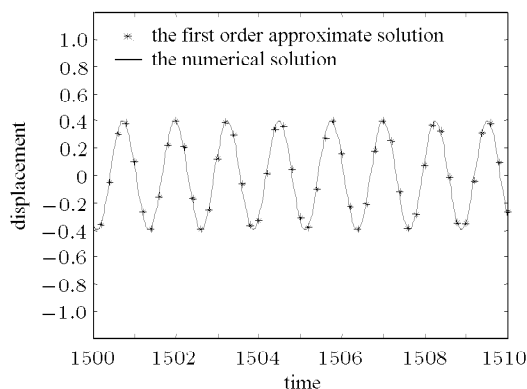
解的吻合情况. 在作图时作者去掉了前 200 个点.

由图可见, 在非线性能度 $\alpha = 2$ 时, 近似解和数值解吻合得非常好.

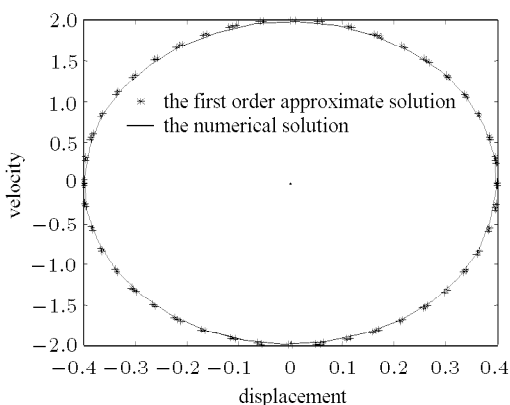
第 2 组: $a_0 = 5.5, \alpha = 5, \beta = 0.1, \lambda = 0.8$

图 3 显示的是在第 2 组参数下的近似解和数值解的吻合情况. 在作图时作者去掉了前 200 个点.

由图可见, 在非线性能度 $\alpha = 5$ 时, 近似解和数值解吻合得也非常好.



(a)



(b)

图 2 系统 (10) 时间历程图和相轨图

Fig.2 The time history and phase plot of Eq.(10)

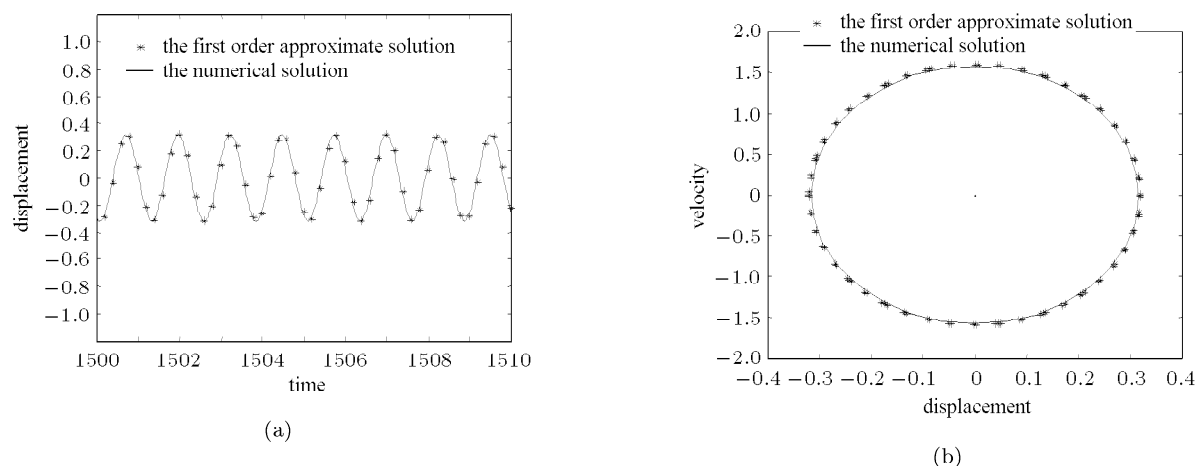


图 3 系统 (10) 时间历程图和相轨图

Fig.3 The time history and phase plot of Eq.(10)

4 结 论

本文提出了一种适用于强非线性动力系统的新的近似解析方法：基于参数展开的同伦分析技术，PE-HAM 方法，通过构造合适的同伦映射将一非线性动力系统（不要求系统内含有小参数）的求解问题转化为一组线性微分方程的求解问题，并运用到了非线性振动领域。研究了强非线性 Duffing 系统的响应问题，得到了零阶近似解和一阶近似解的公式。作为特例，讨论了保守 Duffing 振子（自由振动）和受谐和激励的耗散 Duffing 振子（非自由振动）的响应问题。在与数值解的比较中，可以得出：即使在非线性强度 α 很大，近似解和数值解也吻合得非常好。需要说明的是，PE-HAM 与 HPM 是本质上不同的两种方法，体现在：(1) HPM 通过构造同伦映射引入嵌入参数 p ($0 \leq p \leq 1$ ，在 $p = 1$ 时映射系统与原系统相同)，在含有 p 的映射系统中，将 p 看作系统小参数，再利用 LP 摄动法求解之；而 PE-HAM 是与摄动法根本不同的一种方法，其彻底摆脱了对小参数的依赖，在系统含有小参数或者不含有小参数时均可进行有效的处理。(2) PE-HAM 具有严格的数学基础，它以微分拓扑中的同伦理论为依据，处理过程也是按照同伦理论进行设计。(3) PE-HAM 可以对同时带有阻尼项和谐和激励项的强非线性系统进行处理，等等。作为一种新方法，PE-HAM 还有待更进一步完善。PE-HAM 方法在多自由度系统和复系统中的应用将在后面的文章中进行研究。

致谢 感谢方同教授对本文提出的宝贵的修改

意见。

参 考 文 献

- 1 Nayfeh AH. Perturbation Methods. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2000
- 2 Xu Z, Cheung YK. Averaging method using generalized harmonic functions for strongly nonlinear oscillators. *J Sound Vib*, 1994, 174(4): 563~576
- 3 李骊. 强非线性系统的频闪法. 力学学报, 1990, 22(4): 402~412 (Li Li. Stroboscopic method for strongly nonlinear systems. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 22(4): 402~412 (in Chinese))
- 4 徐兆. 非线性力学中一种新的渐进方法. 力学学报, 1985, 17(2): 266~271 (Xu Zhao. A new asymptotic method in nonlinear mechanics. *Acta Mechanica Sinica*, 1985, 17(2): 266~271 (in Chinese))
- 5 黄颢彪, 宗国威, 陈兆莹等. 强非线性动力系统的频率增量法. 力学学报, 2001, 33(2): 242~249 (Huang Chengbiao, Chung KW, Chan HSY, et al. Frequency-incremental method for strongly nonlinear dynamical systems. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(2): 242~249 (in Chinese))
- 6 Burton TD, Rahman Z. On the multi-scale analysis of strongly non-linear forced oscillators. *Int J Non-linear Mech*, 1986, 21(2): 135~146
- 7 Cheung YK, Chen SH, Lan SL. A modified Lindstedt-Poincare Method for certain strongly non-linear oscillators. *Int J Non-Linear Mech*, 1991, 26(3): 367~378
- 8 Liao SJ. The homotopy analysis method and its applications in mechanics. [Ph D Thesis], Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 1992
- 9 Liao SJ. An explicit, totally analytic approximation of Blasius' viscous flow problems. *Int J Non-Linear Mech*, 1999, 34(4): 759~778
- 10 Liao SJ. An analytic approximate technique for free oscillations of positively damped systems with algebraically

- decaying amplitude. *Int J Non-Linear Mech*, 2003, 38(8): 1173~1183
- 11 He JH. An approximate solution technique depending upon an artificial parameter. *Comm Nonlinear Sci Numer Simu*, 1998, 3(2): 92~97
- 12 He JH. Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method. *Appl Math Comput*, 2004, 156(2): 527~539
- 13 Burton TD. A perturbation method for certain non-linear oscillators. *Int J Non-Linear Mech*, 1984, 19(5): 397~407

A HOMOTOPY TECHNIQUE WITH THE PARAMETER EXPANSION AND ITS APPLICATION¹⁾

Sun Zhongkui Xu Wei²⁾ Yang Xiaoli Xu Yong

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract In this paper, a new homotopy technique based on the parameter expansion (PE-HAM) is proposed to study strongly nonlinear oscillation. By means of the technique of parameter expansion with the theory of homotopy, we transform the original strongly non-linear dynamical system into a set of linear differential equations which can be solved easily. As illustrative examples, strongly nonlinear conservative Duffing's oscillator and dissipated Duffing's oscillator with harmonic excitation are considered using PE-HAM method to obtain the zero-th and first order approximate solutions. Moreover, the numerical results by the Runge-Kutta of 4th order are carried out to compare with the theoretical ones and excellent agreement can be found, even in the case of strongly nonlinear magnitude.

Key words PE-HAM, strongly nonlinear oscillation, dissipated, harmonic excitation

Received 12 April 2004, revised 3 March 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10332030), the Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2003A03) and the Doctorate Foundaiton of Northwestern Polytechnical University (CX200516).

2) E-mail: weixu@nwpu.edu.cn