第 37 卷 第 4 期 力 学 学 报 Vol. 37, No. 4
2005 年 7 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics July, 2005

超细长弹性杆的分析力学问题[1)]

薛 纭 [*,†,2)] 刘延柱 [**] 陈立群 [*]

[*](上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

[†](上海应用技术学院机械与自动化工程学院, 上海 200235)

[**](上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

摘要 超细长弹性杆作为 DNA 等生物大分子链的力学模型, 其平衡和稳定性问题已成为力学与分子生物学交叉的研究热点. 虽然在 Kirchhoff 动力学比拟的基础上, 用分析力学方法讨论弹性杆的文章已见诸文献, 但尚未形成弹性杆分析力学的严格理论. 本文研究了超细长弹性杆分析力学的若干基础性问题. 对杆截面的自由度、虚位移、约束方程及约束力等基本概念给出严格的定义和表达式. 建立弹性杆平衡的 D′Alembert-Lagrange 原理、 Jourdain 原理和 Gauss 原理; 从 D′Alembert-Lagrange 原理导出 Hamilton 原理. 从变分原理出发导出 Lagrange 方程、 Nielsen 方程、 Appell 方程和 Hamilton 正则方程; 对于受约束的弹性杆, 导出了带乘子的 Lagrange 方程. 讨论了 Lagrange 方程的首次积分. 对于杆中心线存在尖点的情形, 导出了微段杆平衡的近似方程.

关键词 超细长弹性杆, Kirchhoff 动力学比拟, 分析力学, 静力学, 虚位移, 变分原理

中图分类号: O312,O317 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2005)04-0485-09

引 言

细长弹性杆的研究始于 Daniel Bernoulli 和 Euler(1730). Kirchhoff(1859) 在若干假定下建立了弹性细杆静力学的基本方程. 由于在形式上与定点转动刚体的动力学方程的一致性而形成 Kirchhoff 的动力学比拟理论 [1,2]. 弹性杆作为电缆、钻杆、纤维等的力学模型, 其平衡和稳定性问题有着广泛的工程背景. 20 世纪 70 年代以来, 由于超细长弹性杆模型在以 DNA 为代表的生物大分子链的研究工作中得到应用 [3,4], 使这一经典力学问题重新受到关注 [5~12]. 在研究受约束弹性杆的力学问题时, 分析力学方法更具有优越性 [13~15]. 虽然直接应用 Hamilton 原理和 Lagrange 方程的讨论已见诸文献 [16~18], 但目前尚未形成弹性杆分析力学的严格理论. 因此建立严格的弹性杆分析力学的基本概念和方法, 对于完善和发展弹性细杆平衡问题的研究具有重要的理论和实际意义.

在弹性杆分析力学中, 基础是 Kirchhoff 动力学比拟理论, 研究对象为杆的刚性截面, 自变量为弧坐标. 本文对杆截面的自由度和约束概念给出严格的定义, 给出约束方程及约束力的表达式. 定义了坐标空间、速度空间和加速度空间的虚位移概念. 建立弹性杆平衡的 D′Alembert-Lagrange 原理、 Jourdain 原理和 Gauss 原理, 并导出了 Hamilton 原理和 Hamilton 正则方程. 从变分原理出发导出自由和约束状态下的 Lagrange 方程、 Nielsen 方程和 Appell 方程. 讨论了 Lagrange 方程的首次积分. 研究了杆中心线存在尖点的情形, 导出了与碰撞方程形式相同的微段杆平衡近似方程.

1 连续杆的离散化

Kirchhoff 假定为连续杆的离散化提供依据, 即将杆视为刚性截面沿中心线以 “单位速度” 运动的轨迹. 除端部以外不受约束作用的杆为自由杆, 则截面的位形需要由 6 个坐标确定, 即形心和相对形心的姿态各 3 个坐标.

建立惯性坐标系 O-$\xi\eta\zeta$ 和与截面固结的形心主轴坐标系 p-xyz , 沿坐标轴的单位基矢量分别为 e_ξ, e_η, e_ζ 和 $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$, 其中 s 为中心线的弧坐标, e_3 为切向基矢量, 指向弧坐标增加方向, 外

2004-06-10 收到第 1 稿, 2005-02-24 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10472067).

2) E-mail: xueylyf@citiz.net

法矢与 e_3 一致的截面记为 s^+，否则记为 s^-. 用 Euler 角 $\psi(s),\vartheta(s),\varphi(s)$ 描述主轴坐标系 p-xyz 相对惯性系 O-$\xi\eta\zeta$ 的姿态. 杆截面的位形可表示为

$$\left.\begin{array}{l}\xi=\xi(s),\quad \eta=\eta(s),\quad \zeta=\zeta(s)\\ \psi=\psi(s),\quad \vartheta=\vartheta(s),\quad \varphi=\varphi(s)\end{array}\right\} \tag{1}$$

设式 (1) 关于弧坐标 s 为二阶连续可微. 这 6 个广义坐标为独立变量，但需满足方程

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{e}_3 \tag{2}$$

因此对 s 的导数不独立，式中 $\boldsymbol{r}$ 为中心线的矢径，顶部点号表示对 s 的导数，投影式为

$$\dot{\xi}=\sin\psi\sin\vartheta,\ \dot{\eta}=-\cos\psi\sin\vartheta,\ \dot{\zeta}=\cos\vartheta \tag{3}$$

方程 (3) 是不可积的，构成对截面状态的非完整约束，使截面的自由度减为 3. 从而表明自由 Kirchhoff 杆为非完整系统. 只要变形前后的挠性线满足光滑条件，约束 (3) 就能自动实现. 因此这种特殊约束形式是无需外界约束力作用的伪非完整约束.

截面的姿态相对弧坐标的变化率称为截面的弯扭度，记作 $\boldsymbol{\omega}(s)$，其沿主轴的分量为

$$\left.\begin{array}{l}\omega_1=\dot{\vartheta}\cos\varphi+\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi\\ \omega_2=-\dot{\vartheta}\sin\varphi+\dot{\psi}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \omega_3=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta\end{array}\right\} \tag{4}$$

弯扭度也可理解为截面沿中心线正向以单位速度运动时相对惯性坐标系的角速度.

2 约束、约束方程和约束力

设惯性空间中的曲面约束由方程

$$g(\xi_c,\eta_c,\zeta_c)=0 \tag{5}$$

描述. 设约束曲面为小曲率曲面，且为连续、光滑和有向；并设约束为刚性和双面的，且不计摩擦和约束力对杆截面形状的影响. 设截面的边界上有且只有一点与约束曲面接触，即满足

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{b} \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 为约束曲面上的点；$\boldsymbol{r}=\xi\boldsymbol{e}_\xi+\eta\boldsymbol{e}_\eta+\zeta\boldsymbol{e}_\zeta$ 为截面形心的矢径；$\boldsymbol{b}(s,t)$ 为 s 截面的边界曲线方程，t 为参数，设 $\boldsymbol{b}$ 关于 s,t 具有二阶连续偏导数，且 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_3=0$，在 p-xy 平面中围成的区域是凸的.

对于给定的 s，存在唯一的一点 $t=t(s)$ 满足式 (6). 由此得

$$\xi_c=\xi+b_\xi,\quad \eta_c=\eta+b_\eta,\quad \zeta_c=\zeta+b_\zeta \tag{7}$$

式中 b_ξ,b_η,b_ζ 为 $\boldsymbol{b}$ 在轴 ξ,η,ζ 上的投影. 导出对杆截面位形的约束方程

$$g(\xi+b_\xi,\eta+b_\eta,\zeta+b_\zeta)=0 \tag{8}$$

一般情况下，式 (8) 显含 s 因而是非定常的，其对弧坐标的导数可化为

$$\dot{g}=\boldsymbol{n}_c\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{n}_c\cdot\mathring{\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}_c)=0 \tag{9}$$

式中 $\boldsymbol{n}_c$ 为约束曲面在接触点的法向量；顶部“∘”号表示是在主轴坐标系 p-xyz 中对 s 求导. 式 (8) 和式 (9) 使截面的广义坐标数和自由度分别减为 5 和 2. 将线分布约束力向截面形心简化，得

$$\boldsymbol{f}^C=\lambda\boldsymbol{n}_c,\quad \boldsymbol{m}^C=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{f}^C \tag{10}$$

其中 λ 为不定乘子. 对于圆形等截面杆，有关系：$f_3^C=\boldsymbol{f}^C\cdot\boldsymbol{e}_3=0$ 和 $\boldsymbol{m}^C=\boldsymbol{0}$. 如果约束为单面，则截面的受约束条件为

$$\lambda=\boldsymbol{f}^C\cdot\boldsymbol{n}_c\geq 0,\ \text{或}\ \lambda=\boldsymbol{f}^C\cdot\boldsymbol{n}_c\leq 0 \tag{11}$$

式中等号为临界情形. 以上讨论容易推广到受两个曲面约束的情形.

给定 O-$\xi\eta\zeta$ 中的一个单位常矢量 $\boldsymbol{h}$，限制截面的弯扭度方向构成非完整约束. 非完整约束仅使自由度减少. 例如：

(1) 截面弯扭度与给定方向 $\boldsymbol{h}$ 垂直：$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{h}=0$. 显然其坐标式是不可积的. 在此约束下，杆截面的自由度减为 2.

(2) 截面弯扭度与给定方向 $\boldsymbol{h}$ 平行：$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}$，其分量形式也是不可积的. 截面的自由度为零，约束方程已完全规定了截面的位形，Kirchhoff 方程寻求实现这一约束的力作用方式.

(3) 给定截面弯扭度的模平方变化规律：$\omega^2=u(s)$，在 s 的定义域内 $u(s)\geq 0$. 用 Euler 角表示为 $\dot{\psi}^2+\dot{\vartheta}^2+\dot{\varphi}^2+2\cos\vartheta\dot{\psi}\dot{\varphi}=u(s)$, 它构成对截面姿态的非线性非完整约束.

3 虚位移及其限制方程

弹性理论表明，直杆的弯扭变形 (小应变) 不改

变截面上的点在 p-xy 平面上投影的位置. 因此, 横截面上的点可表为: $\boldsymbol{R}_i(s)=\boldsymbol{r}(s)+\boldsymbol{b}_i$, 其中 $\boldsymbol{b}_i=x_i\boldsymbol{e}_1(s)+y_i\boldsymbol{e}_2(s)$, i 为 s 截面上点的标号. 称同时满足约束条件和平衡条件的位形为截面的实际平衡状态, 只满足约束条件的位形称为截面的可能平衡状态.

定义 1 (点的真实位移) : 在实际平衡状态 $\boldsymbol{R}_i$ 下, s 截面上一点的真实位移定义为

$$\Delta\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{R}_i(s+\Delta s)-\boldsymbol{R}_i(s) \tag{12}$$

定义 2 (点的可能位移) : 在可能平衡状态 $\bar{\boldsymbol{R}}_i$ 下, s 截面上一点的可能位移定义为

$$\Delta\bar{\boldsymbol{R}}_i=\bar{\boldsymbol{R}}_i(s+\Delta s)-\bar{\boldsymbol{R}}_i(s) \tag{13}$$

显然这里的 "位移" 不是运动学意义上的, 而是不同两点的位置矢径之差.

定义 3 (点的虚位移) : 在给定位形下发生的、约束所允许的、假想的、与弧坐标无关的截面上一点的无限小位移称为点的虚位移, 记为 $\delta\boldsymbol{R}_i$, 称 δ 为等弧长变分.

显然, 一点的可能位移是虚位移中的一个. 两者的差别在于可能位移源于弧坐标的变化, 而虚位移是运动学意义上的, 与弧坐标无关. 根据 Kirchhoff 刚性截面假定, 同一截面上不同点的虚位移形成截面的虚角位移.

定义 4 (截面虚角位移) : 约束所允许的、与弧坐标变化无关的、假想的截面无限小角位移定义为虚角位移, 记为 $\delta\boldsymbol{\Phi}$.

截面的虚角位移导致杆的虚变形, 它也是杆的可能平衡状态. 因此可以计算点的虚位移和截面的虚角位移对弧坐标的导数. 设微分和变分服从交换关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\delta(\,)=\delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\,) \tag{14}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\delta\boldsymbol{R}_i)=\delta\boldsymbol{v}_i\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\delta\boldsymbol{\Phi}=\tilde{\delta}\boldsymbol{\omega}\\&\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\delta\boldsymbol{\Phi}=\delta\boldsymbol{\omega}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{v}_i=\mathrm{d}\boldsymbol{R}_i/\mathrm{d}s$. d,δ 上的波浪号表示运算是相对主轴坐标系的. 给定截面 $\boldsymbol{r}(s)$ 上的一点 $\boldsymbol{R}_i(s)$, 有如下关系

$$\delta\boldsymbol{R}_i=\delta\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{b}_i\,,\quad \delta\boldsymbol{b}_i=\delta\boldsymbol{\Phi}\times\boldsymbol{b}_i \tag{16}$$

选定截面的姿态坐标 $q_i(i=1,2,3)$ 后, 截面的弯扭度和虚角位移可表示为

$$\boldsymbol{\omega}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\omega}_{\dot{q}_i}\dot{q}_i \tag{17a}$$

$$\delta\boldsymbol{\Phi}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\omega}_{\dot{q}_i}\delta q_i \tag{17b}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{\dot{q}_i}$ 为姿态坐标 $q_i(i=1,2,3)$ 的可微矢值函数. 设横截面受有一般的几何约束

$$g_i(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6,s)=0\quad(i=1\text{ 或 }1,2) \tag{18}$$

其中 $q_4=\xi,q_5=\eta,q_6=\varsigma$. 约束 (18) 加在虚位移上的限制方程为

$$\delta g_i=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_i}{\partial q_j}\delta q_j=0\quad(i=1\text{ 或 }1,2) \tag{19}$$

非完整约束的一般形式由形如

$$h_i(q_1,\cdots,q_6,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_6,s)=0\quad(i=1\text{ 或 }1,2) \tag{20}$$

的不可积约束方程给出. 其加在虚位移上的限制方程按 Appell-Chetaev 定义为

$$\delta h_i=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial h_i}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j=0 \tag{21}$$

由于虚位移的任意性, 不能将式 (3) 预先嵌入约束方程 (20). Appell-Chetaev 定义是对非完整约束条件 (20) 实现方式的一个选择 [19,20].

曲面约束 (9) 加在坐标空间虚位移上的限制可化为

$$\delta g=\boldsymbol{n}_c\cdot\delta\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}_c)\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}=0 \tag{22}$$

其中函数的变分源于姿态坐标的变分, 它与约束力的虚功相关

$$\lambda\delta g=\boldsymbol{f}^C\cdot\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m}^C\cdot\delta\boldsymbol{\Phi} \tag{23}$$

若约束力在所有虚位移上所作的功为零, 称这种约束为理想约束. 值得注意的是, 由于式 (3) 是伪非完整约束, 它仅限制截面的自由度而不构成对虚位移的限制.

4　微分变分原理

建立截面平衡的微分变分原理. 杆 s^- 截面上的 m_i 点相对主轴坐标系的矢径为 $\boldsymbol{b}_i$, 围绕 m_i 点取面积微元 A_i , 其上的应力为 $-\boldsymbol{p}_i$. 当 s 截面沿中心线

"移动" 到 $s+\Delta s$ 时, m_i"移动" 到 m_i' 点, 矢径为 $\boldsymbol{b}_i+\Delta\boldsymbol{b}_i$, 应力为 $\boldsymbol{p}_i+\Delta\boldsymbol{p}_i$. 面积微元的 "移动" 形成微元体 V_i. 此微元体的虚位移由 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\boldsymbol{\Phi}$ 给出. 略去二阶微量, 作用在 V_i 上的所有力的虚功之和为

$$\delta W_D=\sum_i\left[\left(A_i\Delta\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{f}_i^G\Delta s+\boldsymbol{f}_i^C\Delta s\right)\cdot\delta\boldsymbol{R}_i+\left(\Delta\boldsymbol{R}_i\times A_i\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{m}_i^G\Delta s\right)\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}\right]\tag{24}$$

其中 $\boldsymbol{f}_i^G,\boldsymbol{m}_i^G$ 为主动力和力偶关于弧坐标 s 的集度, $\boldsymbol{f}_i^C$ 为侧面约束力关于弧坐标 s 的集度. 将上式各项除以 Δs , 并令 $\Delta s\to 0$, 记为 W_D^* , 简化后导出

$$W_D^*=(\dot{\boldsymbol{F}}+\boldsymbol{f}^G)\cdot\delta\boldsymbol{r}+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{m}^G\right)\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}\tag{25a}$$

$$\boldsymbol{f}^C\cdot\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m}^C\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}=0\tag{25b}$$

其中

$$\boldsymbol{F}=\sum_i A_i\boldsymbol{p}_i,\quad \boldsymbol{M}=\sum_i\boldsymbol{b}_i\times A_i\boldsymbol{p}_i$$
$$\boldsymbol{f}^G=\sum_i\boldsymbol{f}_i^G,\quad \boldsymbol{m}^G=\sum_i\boldsymbol{b}_i\times\boldsymbol{f}_i^G$$
$$\boldsymbol{f}^C=\sum_i\boldsymbol{f}_i^C,\quad \boldsymbol{m}^C=\sum_i(\boldsymbol{b}_i\times\boldsymbol{f}_i^C)$$

式 (25b) 为理想约束条件, 对于自由弹性杆自然满足.

上述过程并非简单地将动力学普遍方程中的时间变量替换成弧坐标, 两者的不同在于弧坐标既是空间变量, 按 Kirchhoff 动力学比拟, 又充当 "时间变量".

D'Alembert-Lagrange 原理 受有理想双面约束的 Kirchhoff 杆平衡时, 对满足理想约束条件 (25b) 的任意虚位移, 有

$$W_D^*=(\dot{\boldsymbol{F}}+\boldsymbol{f}^G)\cdot\delta\boldsymbol{r}+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{m}^G\right)\cdot\delta\boldsymbol{\Phi}=0\tag{26}$$

式 (26) 可以从平衡方程导出. 微元体 V_i 的力和力矩平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}&A_i\Delta\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{f}_i^G\Delta s+\boldsymbol{f}_i^C\Delta s=0\\&\Delta\boldsymbol{R}_i\times A_i\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{m}_i^G\Delta s+\boldsymbol{m}_i^C\Delta s=0\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

将 Δs 去除上式, 并令 $\Delta s\to 0$, 导出微元体 V_i 当 $\Delta s\to 0$ 时的平衡微分方程

$$\left.\begin{aligned}&A_i\dot{\boldsymbol{p}}_i+\boldsymbol{f}_i^G+\boldsymbol{f}_i^C=\boldsymbol{0}\\&\dot{\boldsymbol{R}}_i\times A_i\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{m}_i^G+\boldsymbol{m}_i^C=\boldsymbol{0}\end{aligned}\quad (i=1,2,\cdots)\right\}\tag{28}$$

将 $\delta\boldsymbol{R}_i$ 和 $\delta\boldsymbol{\Phi}$ 分别点乘式 (28) 两式后相加并对 i 求和, 利用式 (25b) 即得式 (26).

原理 (26) 不涉及杆的本构关系. 设杆服从线性本构关系

$$\left.\begin{aligned}M_1&=A(\omega_1-\omega_1^0)\\M_2&=B(\omega_2-\omega_2^0)\\M_3&=C(\omega_3-\omega_3^0)\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

式中 A,B 为关于 x,y 轴的抗弯刚度, C 为关于 z 轴的抗扭刚度; $\omega_i^0=\omega_i^0(s)$ $(i=1,2,3)$ 为原始弯扭度分量. 用 $q_i(i=1,2,3)$ 表示截面的 3 个 Euler 角, 存在如下关系 [18]

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{\omega}}{\partial q_i}=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}\times\boldsymbol{\omega}\quad(i=1,2,3)\tag{30}$$

式中波浪号表示相对主轴坐标系的导数. 导出

$$\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{M}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\quad(i=1,2,3)\tag{31}$$

式中 $T=\frac{1}{2}\left[A(\omega_1-\omega_1^0)^2+B(\omega_2-\omega_2^0)^2+C(\omega_3-\omega_1^0)^2\right]$ 为 s 截面的弹性应变势能. 记 $\boldsymbol{m}^F=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F}$, 原理 (26) 可表示为 Euler-Lagrange 形式

$$W_D^*=(\dot{\boldsymbol{F}}+\boldsymbol{f}^G)\cdot\delta\boldsymbol{r}+\sum_{i=1}^3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}+m_{\dot{q}_i}^F+m_{\dot{q}_i}^G\right)\delta q_i=0\tag{32}$$

式中 $m_{\dot{q}_i}^F=\boldsymbol{m}^F\cdot\partial\boldsymbol{\omega}/\partial\dot{q}_i$, $m_{\dot{q}_i}^G=\boldsymbol{m}^G\cdot\partial\boldsymbol{\omega}/\partial\dot{q}_i$. 对于不受主动力和侧面约束力作用的特殊情形, 取虚位移为平移, 推知 $\boldsymbol{F}$ 在惯性空间中为常矢量, 设与 ζ 轴平行, 可写为

$$\boldsymbol{F}=F(\sin\vartheta\sin\varphi\boldsymbol{e}_1+\sin\vartheta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2+\cos\vartheta\,\boldsymbol{e}_3)\tag{33}$$

存在关系

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}\times\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial}{\partial q_i}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_3)\tag{34}$$

引进新函数

$$\varGamma=T+V\tag{35}$$

其中 $V=-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_3$. 式 (32) 可写作

$$W_D^*=\sum_{i=1}^3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\varGamma}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\varGamma}{\partial q_i}+m_{\dot{q}_i}^G\right)\delta q_i=0\tag{36}$$

原理 (36) 也可化作 Nielsen 形式

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\dot{\Gamma}}{\partial\ddot{q}_i}-2\frac{\partial\Gamma}{\partial q_i}+m_{\dot{q}_i}^G\right)\delta q_i=0 \tag{37}$$

和 Appell 形式

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\ddot{q}_i}+m_{\dot{q}_i}^G\right)\delta q_i=0 \tag{38}$$

其中函数 Π 定义为

$$\Pi=\frac{1}{2}[A(\dot{\omega}_1-\dot{\omega}_1^0)^2+B(\dot{\omega}_2-\dot{\omega}_2^0)^2+ C(\dot{\omega}_3-\dot{\omega}_3^0)^2]+[(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{M})+(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F})]\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{39}$$

5 Hamilton 原理和 Hamilton 正则方程

将式 (26) 乘 ds 后对 s 沿杆长积分，化作积分变分原理

$$\int_0^l W_D^*\mathrm{d}s=-\int_0^l(\boldsymbol{M}\cdot\tilde{\delta}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{f}^G\cdot\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{m}^G\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})\mathrm{d}s- (\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})|_{s=0}+(\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}+\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})|_{s=l}=0 \tag{40}$$

在忽略体积力和接触力的条件下，截面主矢为常矢量．原理 (40) 化为

$$\int_0^l W_D^*\mathrm{d}s=-\int_0^l[\boldsymbol{M}\cdot\tilde{\delta}\boldsymbol{\omega}-\delta(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_3)]\mathrm{d}s- (\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})_{s=0}+(\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})_{s=l}=0 \tag{41}$$

如果杆服从线性本构关系 (29), 式 (41) 化为

$$\int_0^l W_D^*\mathrm{d}s=-\int_0^l(\delta\Gamma)\mathrm{d}s-(\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})_{s=0}+ (\boldsymbol{M}\cdot\delta\boldsymbol{\Phi})_{s=l}=0 \tag{42}$$

直接计算变分，注意到微分和变分的交换关系，式 (42) 化作 Euler-Lagrange 形式

$$\int_0^l W_D^*\mathrm{d}s=\int_0^l\sum_{i=1}^{3}\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\Gamma}{\partial q_i}\right]\delta q_i\right\}\mathrm{d}s+ \left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i}-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}_i\right)\delta q_i\right]_{s=0}+ \left[\sum_{i=1}^{3}\left(-\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i}+\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}_i\right)\delta q_i\right]_{s=l}=0 \tag{43}$$

考虑到虚角位移 δq_i 的任意性和端点坐标变分 $(\delta q_i)_{s=0}$, $(\delta q_i)_{s=l}$ 的独立性，从式 (43) 导出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\Gamma}{\partial q_i}=0\\&\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i}-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}_i\right)_{s=0}=0\qquad(i=1,2,3)\\&\left(-\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i}+\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega}_i\right)_{s=l}=0\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

上述第 1 组方程是杆的 Euler-Lagrange 形式的平衡微分方程，它等同于动力学中的第 2 类 Lagrange 方程，只要将 Γ 比作 Lagrange 函数，即将弹性应变势能 T 比作动能， $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_3$ 比作势能．第 2, 3 组方程是弧坐标端面的边界条件．由此表明，式 (44) 中杆两端力偶的虚功仅与边界条件相关．形式上可以把变分问题 (42) 化为泛函

$$S=\int_0^l\Gamma\mathrm{d}s \tag{45}$$

在端点变分条件 $(\delta q_i)_{s=0}=(\delta q_i)_{s=l}=0\ (i=1,2,3)$ 下的驻值问题．称 S 为弹性杆的 Hamilton 作用量，则有：

Hamilton 原理　除端点外不受力作用的弹性杆的实际平衡状态与可能平衡状态的区别在于前者使弹性杆的 Hamilton 作用量取驻值，即

$$\delta S=0 \tag{46}$$

原理 (46) 即弹性力学中的最小势能原理．进一步推知，稳定平衡位形使杆的总势能，即 Hamilton 作用量取极小值．

引入正则变量： $q_i, p_i=\partial\Gamma/\partial\dot{q}_i\ (i=1,2,3)$, 定义 Hamilton 函数

$$H(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)= \left(\sum_{i=1}^{3}p_i\dot{q}_i-\Gamma\right)\Big|_{\dot{q}_j=\dot{q}_j(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3)}= T-V \tag{47}$$

直接计算偏导数，导出

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad(i=1,2,3) \tag{48}$$

此即描述 Kirchhoff 杆平衡的 Hamilton 正则方程.

6 Jourdain 变分与虚功率原理

在位形保持不变的前提下，约束所允许的、假想的截面内一点的弧坐标速度 $\boldsymbol{v}_i=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i/\mathrm{d}s$ 的变更称

为虚速度，记为 $\delta_J \boldsymbol{v}_i$. 称 δ_J 为 Kirchhoff 杆的 Jourdain 变分. 此处的速度是指点的矢径相对弧坐标的变化率. 同一截面上不同点的虚速度形成截面的虚弯扭度.

定义 5 (截面虚弯扭度) 在保持截面位形的前提下，约束所允许的、与弧坐标变化无关的、假想的截面弯扭度的变更定义为虚弯扭度，记为 $\delta_J\boldsymbol{\omega}$.

由式 (17a) 导出虚弯扭度为

$$\delta_J\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\omega}_{\dot{q}_i}\delta_J\dot{q}_i \tag{49}$$

给定点的虚速度和虚弯扭度，存在如下关系

$$\delta_J\dot{\boldsymbol{R}}_i = \delta_J\dot{\boldsymbol{r}} + \delta_J\dot{\boldsymbol{b}}_i, \quad \delta_J\dot{\boldsymbol{b}}_i = \delta_J\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{b}}_i \tag{50}$$

约束 (18) 和 (20) 加在虚弯扭度上的限制方程分别为

$$\left.\begin{aligned} \delta_J\dot{g}_i &= \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_i}{\partial q_j}\delta_J\dot{q}_j = 0 \\ \delta_J h_i &= \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial h_i}{\partial \dot{q}_j}\delta_J\dot{q}_j = 0 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

作用在 V_i 上的所有力在虚速度上所作的虚功率 W_J^* 为

$$W_J^* = (\dot{\boldsymbol{F}}+\boldsymbol{f}^G)\cdot\delta_J\dot{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{e}_3\times \boldsymbol{F}+\boldsymbol{m}^G\right)\cdot\delta_J\boldsymbol{\omega} \tag{52}$$

上式的推导中用到理想约束条件

$$\boldsymbol{f}^C\cdot\delta_J\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{m}^C\cdot\delta_J\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{53}$$

Jourdain 原理 受有理想双面约束的 Kirchhoff 杆平衡时，对满足理想约束条件 (53) 的任意虚速度，截面作用力的虚功率为零，即

$$W_J^* = (\dot{\boldsymbol{F}}+\boldsymbol{f}^G)\cdot\delta_J\dot{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{e}_3\times \boldsymbol{F}+\boldsymbol{m}^G\right)\cdot\delta_J\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{54}$$

可用 Euler 角表示为

$$W_J^* = (\dot{\boldsymbol{F}}+\boldsymbol{f}^G)\cdot\delta_J\dot{\boldsymbol{r}} + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\boldsymbol{M}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \boldsymbol{M}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial q_i} + \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}\times\boldsymbol{e}_3\right) + \boldsymbol{m}^G\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}\right]\delta_J\dot{q}_i = 0 \tag{55}$$

Jourdain 原理指出杆截面的实际平衡状态与位置相同，但弯扭度不同的可能平衡状态的区别. 如果截面主矢 $\boldsymbol{F}$ 为常矢量，注意到式 (34)，式 (55) 化作

$$W_J^* = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\boldsymbol{M}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \boldsymbol{M}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_3) + m_{\dot{q}_i}^G\right]\delta_J\dot{q}_i = 0 \tag{56}$$

满足线性本构关系 (29) 时，式 (56) 化作 Euler-Lagrange 形式

$$W_J^* = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\Gamma}{\partial q_i} + m_{\dot{q}_i}^G\right)\delta_J\dot{q}_i = 0 \tag{57}$$

同理也可化作 Nielsen 形式和 Appell 形式.

7 Gauss 变分与 Gauss 原理、 Gauss 最小拘束原理

在保持点的位形和弧坐标速度不变的前提下，约束所允许的、假想的截面内一点的弧坐标加速度 $\boldsymbol{a}_i = \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i/\mathrm{d}s$ 的变更，称为点的虚加速度，记为 $\delta_G\boldsymbol{a}_i$，称 δ_G 为 Gauss 变分. 在 Kirchhoff 假定下，同一截面上不同点的虚加速度形成截面的虚角加速度 $\delta_G\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}s$.

定义 6 (截面虚角加速度) 在保持截面位形和弯扭度的前提下，约束所允许的、与弧坐标变化无关的、假想的截面角加速度变更定义为虚角加速度，记为 $\delta_G\boldsymbol{\alpha}$.

由式 (17a) 和角加速度的定义，角加速度的 Gauss 变分为

$$\delta_G\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\omega}_{\dot{q}_i}\delta_G\ddot{q}_i \tag{58}$$

给定点的虚加速度和虚角加速度，存在如下关系

$$\delta_G\ddot{\boldsymbol{R}}_i = \delta_G\ddot{\boldsymbol{r}} + \delta_G\ddot{\boldsymbol{b}}_i, \quad \delta_G\ddot{\boldsymbol{b}}_i = \delta_G\boldsymbol{\alpha}\times\ddot{\boldsymbol{b}}_i \tag{59}$$

约束 (18) 和 (20) 加在 Euler 虚角加速度上的限制方程分别为

$$\left.\begin{aligned} \delta_G\ddot{g}_i &= \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial g_i}{\partial q_j}\delta_G\ddot{q}_j = 0 \\ \delta_G\dot{h}_i &= \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial h_i}{\partial \dot{q}_j}\delta_G\ddot{q}_j = 0 \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

V_i 上的作用力与虚加速度的数量积 W_G^* 在理想约束条件

$$\boldsymbol{f}^C\cdot\delta_G\ddot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{m}^C\cdot\delta_G\boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{61}$$

下为

$$W_G^* = (\dot{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{f}^G)\cdot\delta_G\ddot{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s} + \boldsymbol{e}_3\times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{m}^G\right)\cdot\delta_G\boldsymbol{\alpha} \tag{62}$$

Gauss 原理 受有理想双面约束的 Kirchhoff 杆平衡时，对满足理想约束条件 (61) 的任意虚加速度，有

$$W_G^* = (\dot{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{f}^G)\cdot\delta_G\ddot{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s} + \boldsymbol{e}_3\times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{m}^G\right)\cdot\delta_G\boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{63}$$

或用 Euler 角表示为

$$W_G^* = (\dot{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{f}^G)\cdot\delta_G\ddot{\boldsymbol{r}} + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\boldsymbol{M}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \boldsymbol{M}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial q_i} + \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}\times\boldsymbol{e}_3\right) + \boldsymbol{m}^G\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\dot{q}_i}\right]\delta_G\ddot{q}_i = 0 \tag{64}$$

或

$$W_G^* = (\dot{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{f}^G)\cdot\delta_G\ddot{\boldsymbol{r}} + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\ddot{q}_i} + m_{\dot{q}_i}^G\right)\delta_G\ddot{q}_i = 0 \tag{65}$$

Gauss 原理指出了截面的实际平衡状态与位置和弯扭度相同，但角加速度不同的可能平衡状态的区别. 定义自由 Kirchhoff 杆的拘束函数

$$Z = \frac{1}{2}\left\{A\left[\dot{\omega}_1 + \frac{1}{A}(\omega_2 M_3 - \omega_3 M_2 - F_2 + m_1)\right]^2 + B\left[\dot{\omega}_2 + \frac{1}{B}(\omega_3 M_1 - \omega_1 M_3 + F_1 + m_2)\right]^2 + C\left[\dot{\omega}_3 + \frac{1}{C}(\omega_1 M_2 - \omega_2 M_1 + m_3)\right]^2\right\} \tag{66}$$

式中 $m_i = \boldsymbol{m}^G\cdot\boldsymbol{e}_i$，本构关系为式 (29).

Gauss 最小拘束原理：Kirchhoff 杆的任一截面随弧坐标的实际运动和位形与弯扭度相同，但角加速度不同的可能运动比较，拘束函数在 Gauss 变分下取驻值，即有

$$\delta_G Z = 0 \tag{67}$$

计算可能运动的拘束函数 Z^* 与实际运动的拘束函数 Z 之差，有

$$\delta_G Z = Z^* - Z = \frac{1}{2}\left[A(\Delta\dot{\omega}_1)^2 + B(\Delta\dot{\omega}_2)^2 + C(\Delta\dot{\omega}_3)^2\right] > 0 \tag{68}$$

式中 $\Delta\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_i^* - \dot{\omega}_i$. 从而证明，实际运动对应的拘束取极小值.

8 平衡微分方程、首次积分以及微分弧段的大曲率问题

对于自由 Kirchhoff 杆，截面形心和姿态的虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\boldsymbol{\Phi}$ 都是独立的，从式 (26) 导出 Kirchhoff 方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s} + \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F} + \boldsymbol{m}^G = \boldsymbol{0},\quad \dot{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{f}^G = \boldsymbol{0} \tag{69}$$

从式 (32) 导出 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + m_{\dot{q}_i}^F + m_{\dot{q}_i}^G = 0\quad (i=1,2,3) \tag{70a}$$

$$\dot{\boldsymbol{F}} + \boldsymbol{f}^G = \boldsymbol{0} \tag{70b}$$

当 $\boldsymbol{F}$ 为常矢量时，由式 (36) 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\Gamma}{\partial q_i} + m_{\dot{q}_i}^G = 0\quad (i=1,2,3) \tag{71}$$

同理从式 (37) 和 (38) 可导出 Nielsen 方程和 Appell 方程. 当杆处在约束条件 (18) 或 (20) 下，诸 δq_i 不都独立，受到的约束是式 (19) 或 (21). 从式 (32) 导出带乘子的 Lagrange 方程:

几何约束下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + m_{\dot{q}_i}^F + m_{\dot{q}_i}^G + \sum_{j=1}^{1\text{或}2}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0\qquad (i=1,2,3) \tag{72a}$$

$$\dot{F}_i + f_i^G + \sum_{j=1}^{1\text{或}2}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0\quad (i=4,5,6) \tag{72b}$$

非完整约束下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + m_{\dot{q}_i}^F + m_{\dot{q}_i}^G + \sum_{i=1}^{1\text{或}2}\lambda_J\frac{\partial h_j}{\partial\dot{q}_i} = 0\qquad (i=1,2,3) \tag{73a}$$

$$\dot{F}_i + f_i^G + \sum_{j=1}^{1\text{或}2}\lambda_j\frac{\partial h_j}{\partial\dot{q}_i} = 0\quad (i=4,5,6) \tag{73b}$$

也可化作 Nielsen 或 Appell 形式的方程.

当 $m_{\dot{q}_i}^G = 0$ 时，式 (71) 与保守系统的 Lagrange 方程形式完全相同

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\Gamma}{\partial q_i} = 0\quad (i=1,2,3) \tag{74}$$

其首次积分和利用首次积分使原方程降阶的问题与分析力学的积分理论完全等同.

(1) 若 $\partial\Gamma/\partial q_i = 0$，则存在“循环积分”：$\partial\Gamma/\partial\dot{q}_i = c_i$，式中 c_i 为积分常数．其物理意义是截面主矩关于 $\dot{q}_i$ 的分量守恒．

(2) 若 $\partial\Gamma/\partial s = 0$, 则有“能量积分”: $T - V = c$.

对于离散系统，平衡条件可用势能函数 V 表示为 $\partial V/\partial q_i = 0$. 按 Kirchhoff 动力学比拟，对应于截面保持原始弯扭度，即主矩为零，平衡条件为

$$\frac{\partial F_3}{\partial q_i} \equiv 0 \quad (i = 1,2,3) \tag{75}$$

稳定条件为 F_3 有极小值．由式 (33) 和 (75) 知，$\vartheta = n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$. 当 n 为奇数时稳定，为偶数时不稳定，即带原始扭率的直杆在轴向力作用下受拉为不稳定，受压为稳定．此处的稳定性是指关于弧坐标的 Lyapunov 稳定性.

研究 Kirchhoff 杆变形后中心线存在尖点的情形．这本质上是微分弧段内出现的大曲率问题．设微分弧段的弧坐标分别为 s 和 $s + \Delta s$, 将 ds 乘式 (74) 并在 s 和 $s + \Delta s$ 内积分

$$\int_s^{s+\Delta s} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\Gamma}{\partial q_i} + m_{\dot{q}_i}\right)\mathrm{d}s = 0 \quad (i = 1,2,3) \tag{76}$$

导出近似计算式

$$\Delta\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{q}_i}\right) + \hat{m}_{\dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1,2,3) \tag{77}$$

式中 $\hat{m}_{\dot{q}_i} = \int_s^{s+\Delta s} m_{\dot{q}_i}\mathrm{d}s$. 这对应于动力学中的碰撞方程．虽然大曲率情形已越出 Kirchhoff 假定的前提，但在微分弧段内式 (77) 对截面弯扭度突变的近似描述是有效的.

9 结 论

(1) 描述自由弹性细杆位形需要截面形心和姿态共 6 个广义坐标，由于存在一个非完整约束的矢量方程使自由度减为 3. 这个非完整约束是无需约束力就能自动实现的伪非完整约束.

(2) 在单个曲面约束下，弹性细杆的广义坐标数和自由度分别减为 5 和 2.

(3) 讨论了由离散系统分析力学理论移植的超细长弹性杆平衡问题的分析力学原理．建立了 D'Alembert-Lagrange 原理、 Jourdain 原理、 Gauss 原理和 Gauss 最小拘束原理.

(4) 根据 Kirchhoff 动力学比拟, 弹性细杆的最小势能原理相似于离散系统动力学的 Hamilton 原理. 建立了弹性细杆平衡问题的 Hamilton 原理和 Hamilton 正则方程.

(5) 从截面平衡的变分原理导出了受约束杆的带乘子的 Lagrange 方程.

(6) 杆中心线在微小弧段内的大曲率现象可与物体的碰撞相比拟，该微小弧段杆的平衡方程与物体的碰撞方程形式相同.

参 考 文 献

1 Love AEH. A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity. 4th ed, New York: Dover, 1927

2 陈至达．杆板壳大变形理论．北京：科学出版社， 1994. 45~85(Chen Zhida. Theories of Large Deformation of a Rod, Plate and Shell. Beijing: Science Press, 1994. 45~85 (in Chinese))

3 Fuller FB. The writhing number of a space curve. *Proc Natl Acad Sci*, 1971, 68(4): 815~819

4 Benham CJ. Onset of writhing in circular elastic polymers. *Physical Review A*, 1989, 39(5): 2582~2586

5 刘延柱．弹性杆基因模型的力学问题．力学与实践， 2003, 25(1): 1~5(Liu Yanzhu. Mechanical problems on elastic rod model of DNA. *Mechanics in Engineering*, 2003, 25(1): 1~5(in Chinese))

6 刘延柱．具有初曲率和初挠率弹性直杆的平衡稳定性．上海交通大学学报， 2002, 36(11): 1587~1590 (Liu Yanzhu. Stability of equilibrium of a straight elastic rod with intrinsic curvature and twisting. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2002, 36(11): 1587~1590(in Chinese))

7 Tanaka F, Takahashi H. Elastic theory of supercoiled DNA. *J Chem Physics*, 1985, 83: 6017~6026

8 van der Heijden, Champneys AR, Thompsen JMT. Spatially complex localisation in twisted elastic rods constrained to a cylinder. *Solids and Structures*, 2002, 39: 1863~1883

9 刘延柱，薛纭，陈立群．弹性细杆平衡的动态稳定性．物理学报， 2004, 53(8): 2424~2428 (Liu Yanzhu, Xue Yun, Chen Liqun. Dynamical stability of a thin elastic rod. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53 (8): 2424~2428(in Chinese))

10 Xue Yun, Liu Yanzhu, Chen Liqun. The Schrödinger equation for a Kirchhoff elastic rod with noncircular cross section. *Chinese Physics*, 2004, 13(6): 794~797

11 薛纭，陈立群，刘延柱．受曲面约束弹性细杆的平衡问题．物理学报， 2004, 53(7): 2040~2045 (Xue Yun, Chen Liqun, Liu Yanzhu. Problems on equilibrium of a thin elastic rod constrained on a surface. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53 (7): 2040~2045(in Chinese))

12 薛纭，陈立群，刘延柱． Kirchhoff 方程的相对常值特解及其 Lyapunov 稳定性．物理学报, 2004, 53 (12): 4029~4036 (Xue Yun, Chen Liqun, Liu Yanzhu. Special solutions of Kirchhoff equations and their Lyapunov stability. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53 (12): 4029~4036(in Chinese))

13 刘延柱. 高等动力学. 北京: 高等教育出版社, 2001(Liu Yanzhu. Advanced Dynamics. Beijing: Higher Education Press, 2001(in Chinese))

14 陈滨. 分析动力学. 北京: 北京大学出版社, 1987(Chen Bin. Analytical Dynamics. Beijing: Peking University Press, 1987(in Chinese))

15 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学. 北京: 北京理工大学出版社, 1991(Mei Fengxiang, Liu Duan, Luo Yong. Advanced Analytical Dynamics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1991(in Chinese))

16 Langer J, Singer DA. Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod. *SIAM Rev*, 1996, 38(4): 605~618

17 Pozo Coronado LM. Hamilton equations for elasticae in the Euclidean 3 space. *Physica D*, 2000, 141: 248~260

18 Westcott TP, Tobias I, Olson WK. Elasticity theory and numerical analysis of DNA supercoiling: An application to DNA looping. *J Phys Chemistry*, 1995, 99: 17926~17935

19 梅凤翔, 陈滨. 关于分析力学的学科发展问题, 见: 黄文虎, 陈滨, 王照林主编. 一般力学 (动力学、振动与控制) 最新进展. 北京: 科学出版社, 1994. 37~45(Mei Fengxiang, Chen Bin. On the developments in analytical mechanics. In: Huang Wenhu, Chen Bin, Wang Zhaolin, eds. New Developments of General Mechanics (Dynamics, Vibration and Control). Beijing: Science Press, 1994. 37~45(in Chinese))

20 薛纭. 约束条件的实现与非完整非完备力学系统的数学模型. 见: 陈滨主编. 动力学、振动与控制的研究. 北京: 北京大学出版社, 1994. 5~8(Xue Yun. Realizations of the constraint condition and mathematical models for nonholonomic imperfect mechanical systems. In: Chen Bin ed. Dynamics, Vibration and Control. Beijing: Peking University Press, 1994. 5~8(in Chinese))

ON ANALYTICAL MECHANICS FOR A SUPER-THIN ELASTIC ROD [1)]

Xue Yun[*,†,2)] Liu Yanzhu[**] Chen Liqun[*]

[*](*Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai* 200072, *China*)

[†](*School of Mechanical and Automation Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai* 200235, *China*)

[**](*Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030, *China*)

Abstract The investigations on the problems of equilibrium and stability of a super-thin elastic rod as model of DNA supercoiling have became an interdisciplinary area of classical mechanics and molecular biology with full of activities. Although there are papers using the methods of analytical mechanics to discuses some modeling problem, but the theory on analytical mechanics of a super-thin elastic rod has not formed systematically. In this paper, by applying the theory and method of analytical mechanics to the modeling of a thin-elastic rod, the framework of analytical mechanics is constructed for the equilibrium of a super-thin elastic rod. For the cross section of a rod, concepts such as freedom, constraints and constrained equations and constrained foces are analyzed. And various variational principles of mechanics, such as the D'Alembert-Lagrange principle, the Jourdain principle, and the Gauss principles are established. The principles are applied to derive the Hamilton canonical equation, the Lagrange equation, the Nielsen equation and the Appell equation. For the case that a rod is subjected to constraints, the Lagrange equation with undetermined multiplier is presented. In the neighborhood of a singular point, the equation of equilibrium is transformed into the same form as the one for collisions.

Key words super-thin elastic rod, Kirchhoff's dynamical analogy, analytical mechanics, statics, virtual displacement, variational principle

Received 10 June 2004, revised 24 February 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10472067).

2) E-mail: xueylyf@citiz.net