

# 砂土的应力路径本构模型<sup>1)</sup>

路德春<sup>2)</sup> 姚仰平

(北京航空航天大学土木工程系, 北京 100083)

**摘要** 将微元应力路径线性逼近, 转变成与其充分接近且易于计算应变的等平均应力微元和等应力比微元, 计算任意加荷应力路径所产生的塑性应变, 建立了双屈服面的砂土应力路径本构模型. 模型体现了岩土塑性理论分量屈服和非关联流动法则的要求, 在  $p, q$  平面内根据双线性的屈服线确定了加卸载准则. 结合广义非线性强度理论采用变换应力三维化方法简单、合理地使模型实现三维化. 通过试验数据的验证表明, 砂土应力路径本构模型可以合理地描述各种应力路径下砂土的变形和强度特性.

**关键词** 砂土, 应力路径, 本构模型, 广义强度理论, 变换应力, 试验

**中图分类号:** TU441 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2005)04-0451-09

## 引 言

大量的试验结果<sup>[1~3]</sup>表明, 土体在荷载的作用下其变形不仅取决于自身材料的性质, 而且与外力作用密切相关, 具有应力路径的相关性. 然而, 现有的砂土本构模型大都忽略了应力路径的相关性而采用某种唯一性假设. 沈珠江院士指出<sup>[4]</sup>, 在复杂应力路径下, 尤其在应力路径有较大转折时, 唯一性假设是得不到保证的. 笔者将任意应力路径微元分解, 并利用两个线性微元应力路径逼近任意微元应力路径, 通过计算两线性微元路径的塑性应变, 得到任意微元的塑性应变, 进而计算任意应力路径的塑性应变. 以此为基础建立了可以考虑应力路径影响的砂土三维本构模型<sup>[5]</sup>. 由于模型在等平均应力微元路径采用双曲线变形模式, 因而不能反映土的临界状态. 本文所建立的砂土应力路径本构模型在等平均应力微元路径上采用修正剑桥模型的变形模式; 在等应力比微元上采用变换关系通过正常固结曲线确定变形模式; 双屈服面变形模式体现了岩土塑性理论分量屈服和非关联流动法则的观点<sup>[6]</sup>, 采用变换应力方法<sup>[7~9]</sup>结合广义非线性强度理论<sup>[9]</sup>使模型简单地实现了三维化, 对于砂土应力路径本构模型可以合理地描述各种应力路径下砂土的应力应变关系, 而且模型表述简单、实用性较强.

## 1 应力路径分析

砂土的应力应变曲线具有应力路径的相关性. 在相同的起始和结束应力状态下, 所经历的应力路径不同, 砂土的应力应变曲线也就不同; 如果所经历的应力路径充分接近, 其应力应变曲线也就基本相同. 基于这一认识, 任意应力路径上所产生的塑性应变, 可以利用与其充分接近的应力路径上产生的塑性应变得到. 如图 1 所示, 将任意应力路径  $AB$  分解为  $n$  个微元路径  $u_0u_1, \dots, u_{i-1}u_i, \dots, u_{n-1}u_n$ , 而任意微元路径  $u_{i-1}u_i$  用等  $p$  微元  $v_iu_i$  和等  $\eta$  微元  $u_{i-1}v_i$  逼近. 应力参量  $p$  为平均应力,  $q$  为广义剪

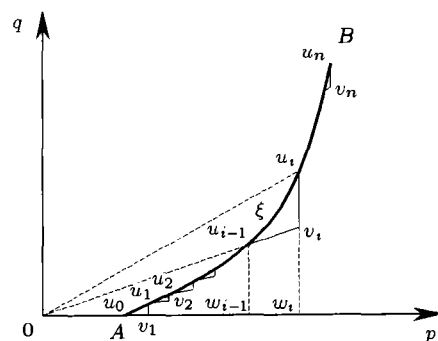


图 1 任意应力路径等效原理

Fig.1 Principle of equivalently approaching

2004-04-25 收到第 1 稿, 2004-12-20 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (50479001).

2) E-mail: dechun@buaa.edu.cn

应力,  $\eta$  为应力比, 表达式分别为

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2)$$

$$\eta = \frac{q}{p} \quad (3)$$

式中,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  为主应力. 令  $\xi$  为应力路径上相邻两点之间的最大弧长,  $\xi$  值越小, 应力路径逼近的结果就越接近于真值. 当  $\xi$  充分小时, 任意微元路径  $u_{i-1}u_i$  上的应变增量  $d\varepsilon$ , 有如下关系

$$(d\varepsilon)_{u_{i-1}u_i} = (d\varepsilon)_{u_{i-1}v_i} + (d\varepsilon)_{v_iu_i} \quad (4)$$

将任意微元路径等效为等  $p$  微元和等  $\eta$  微元, 具体分析等平均应力路径和等应力比路径上应力应变曲线的特点. Nakai<sup>[2]</sup> 的 Toyoura 标准砂土常规三轴试验的应力路径如图 2 所示,  $AD, BE, CF$  为等  $p$  路径;  $DEF, ABC$  为等应力比路径. 试验结果如图 3, 图 4 所示.  $\varepsilon_v^p$  为塑性体积应变,  $\varepsilon_d^p$  为等

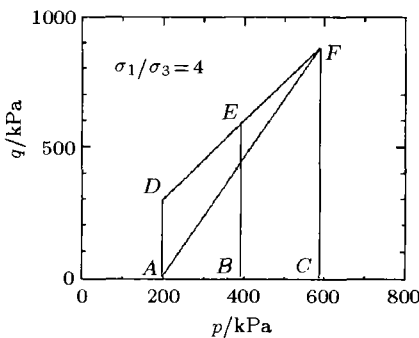


图 2 应力路径  
Fig.2 Stress path

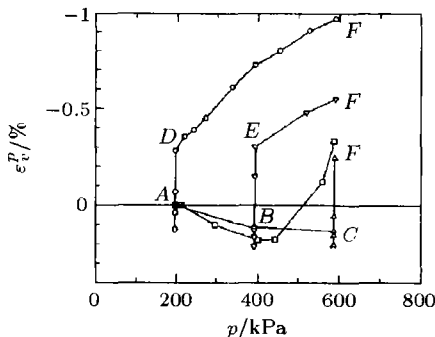


图 3  $\varepsilon_v^p$ - $p$  关系曲线  
Fig.3 The curves of  $\varepsilon_v^p$ - $p$  relation

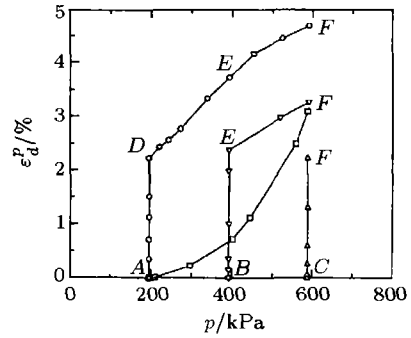


图 4  $\varepsilon_d^p$ - $p$  关系曲线  
Fig.4 The curves of  $\varepsilon_d^p$ - $p$  relation

效塑性剪应变, 表达式分别为

$$\varepsilon_v^p = (\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p) \quad (5)$$

$$\varepsilon_d^p = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p)^2 + (\varepsilon_3^p - \varepsilon_1^p)^2} \quad (6)$$

式中  $\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p$  分别为主应变的塑性应变分量. 分析试验结果, 其特点为:

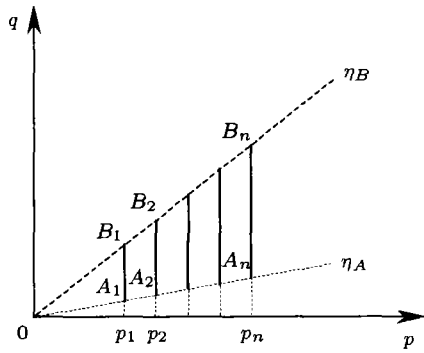
(1) 沿等  $p$  路径 ( $AD, BE, CF$ ) 从相同的应力比状态 ( $A, B, C$ ) 加荷至另一相同的应力比状态 ( $D, E, F$ ), 产生的塑性体积应变基本相同 (图 3), 产生的塑性剪应变基本相同 (图 4).

(2) 沿等  $\eta$  路径 ( $ABC, DEF$ ) 从相同的平均应力状态 ( $A, D$ ) 加荷至另一相同的平均应力状态 ( $C, F$ ), 产生的塑性体积应变和塑性剪应变都相差甚远, 与所处的应力比状态有关.

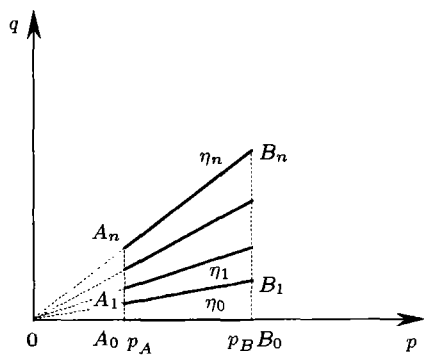
在分析 Toyoura 标准砂土三轴试验结果的基础上, 笔者总结如下规律:

(1) 如图 5(a) 所示, 沿等  $p$  应力路径 ( $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ ) 从相同的应力比  $\eta_A$  状态 ( $A_1, A_2, \dots, A_n$ ) 加荷至另一相同的应力比  $\eta_B$  状态 ( $B_1, B_2, \dots, B_n$ ), 砂土所产生的塑性体积应变和塑性剪应变相同, 与所受的平均应力 ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) 无关. 即处于相同的应力比状态并沿等  $p$  应力路径加荷, 砂土在应力比  $\eta$  的作用下所产生的塑性应变与所受平均应力  $p$  无关.

(2) 如图 5(b) 所示, 沿等  $\eta$  应力路径 ( $A_0B_0, A_1B_1, \dots, A_nB_n$ ) 从相同的平均应力  $p_A$  状态 ( $A_0, A_1, \dots, A_n$ ) 加荷至另一相同的平均应力  $p_B$  状态 ( $B_0, B_1, \dots, B_n$ ), 砂土所产生的塑性体积应变和塑性剪应变都分别不同, 与所处的应力比 ( $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ ) 状态有关. 因此, 可建立在相同的平均应力作用下, 沿任意等应力比路径 ( $A_1B_1, \dots, A_nB_n$ )



(a) 等  $p$  应力路径  
(a) Stress path with same  $p$



(b) 等  $\eta$  应力路径  
(b) Stress path with same  $\eta$

图 5 应力路径

Fig.5 Stress path

加载所产生的塑性体积应变增量  $d\varepsilon_v^p$  与等向压缩荷载作用下所产生塑性体积应变增量  $(d\varepsilon_v^p)_{\eta=0}$  的关系

$$f(\eta) = \frac{d\varepsilon_v^p}{(d\varepsilon_v^p)_{\eta=0}} \quad (7)$$

$f(\eta)$  应具有如下特性:

- (1) 等向压缩时,  $d\varepsilon_v^p = (d\varepsilon_v^p)_{\eta=0}$ , 有  $f(0) = 1$ .
- (2) 当  $0 < \eta < M$  时,  $f(\eta) > 0$ .  $M$  为塑性体积应变增量由剪缩发展为剪胀即变向时的应力比.
- (3) 当  $\eta = M$  时,  $f(\eta) = 0$ .
- (4) 当  $M < \eta < M_f$  时,  $f(\eta) < 0$ .  $M_f$  为  $\eta - \varepsilon_d$  曲线峰值应力比,  $\varepsilon_d$  为等效剪应变. 如图 6 所示.

笔者利用砂土三轴试验已证明, 等应力比路径和等向压缩路径分别产生的塑性体积应变的关系  $f(\eta)$  可用下式合理描述<sup>[10]</sup>

$$f(\eta) = \frac{M_f^4}{M^4} \cdot \frac{M^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} \quad (8)$$

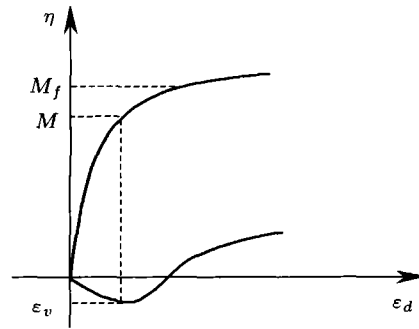


图 6  $M, M_f$  的物理意义示意图

Fig.6 Position of  $M$  and  $M_f$  in the curve of  $\eta - \varepsilon_d$  relation

## 2 砂土的应力路径本构模型

从上述应力路径分析可知, 将任意微元路径  $u_{i-1}u_i$  等效为等应力比微元  $u_{i-1}v_i$  和等平均应力微元  $v_iu_i$ , 如图 1 所示. 即将压缩特性等  $\eta$  微元  $u_{i-1}v_i$  和剪切特性等  $p$  微元  $v_iu_i$  分离开来, 分别计算两微元路径上产生的塑性应变, 进而间接得到任意微元路径  $u_{i-1}u_i$  上产生的塑性应变. 弹性应变由广义虎克定律求得. 所以可建立增量型的砂土弹塑性本构模型, 模型是建立在应力路径的基础上, 其特点就是可以考虑塑性应变对应力路径的依赖性, 故而称为砂土的应力路径本构模型. 基于广义非线性强度理论<sup>[9]</sup> 采用变换应力三维化方法使模型简单地实现三维化, 三维模型适用于一般的应力路径.

### 2.1 弹性应变增量计算

弹性应变与应力路径无关, 根据广义虎克定律求得弹性应变增量如下

$$d\varepsilon_v^e = \frac{dp}{K} \quad (9)$$

$$d\varepsilon_d^e = \frac{dq}{3G} \quad (10)$$

式中,  $K, G$  为弹性体积模量和弹性剪切模量, 有

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (11)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (12)$$

式中,  $\nu$  为泊松比,  $E$  为杨氏弹性模量

$$E = \frac{3(1-2\nu)(1+e_0)p}{\kappa} \quad (13)$$

式中,  $e_0$  为初始孔隙比,  $\kappa$  为等向压缩回弹指数.

### 2.2 塑性应变增量计算

塑性应变与应力路径相关, 总塑性应变增量通

过两线性微元路径计算得到。

2.2.1 等  $\eta$  微元路径上塑性应变增量计算

由式 (7) 可知, 等  $\eta$  微元路径上的塑性体积应变可通过等向压缩试验曲线计算得到。在  $v-\ln p$  平面内等向压缩曲线如图 7 所示,  $\lambda$  为等向固结压缩指数, 体积应变  $(\varepsilon_v)_{\eta=0}$  与孔隙比  $e$  (或比容  $v = 1 + e$ ) 的改变有关系式

$$(\varepsilon_v)_{\eta=0} = \frac{-\Delta e}{1 + e_0} \quad (14)$$

所以

$$(\varepsilon_v^p)_{\eta=0} = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p}{p_0} \quad (15)$$

即得等向压缩路径的塑性体积应变增量为

$$(d\varepsilon_v^p)_{\eta=0} = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \frac{dp}{p} \quad (16)$$

由式 (7) 得

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \frac{dp}{p} \cdot f(\eta) \quad (17)$$

将式 (8) 代入到式 (17) 得

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \cdot \frac{M_f^4 M^4 - \eta^4}{M^4 M_f^4 - \eta^4} \cdot \frac{1}{p} \cdot dp \quad (18)$$

文献 [1] 已证明适用于正常固结黏土的修正剑桥模型的剪胀方程  $\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta}$  同样适用于砂土, 所以本文引用该方程得

$$d\varepsilon_d^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \cdot \frac{M_f^4 2\eta(M^2 + \eta^2)}{M^4 M_f^4 - \eta^4} \cdot \frac{1}{p} \cdot dp \quad (19)$$

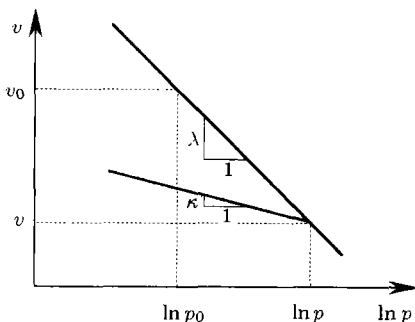


图 7  $v-\ln p$  关系曲线

Fig.7 The curve of  $v-\ln p$  relation

2.2.2 等  $p$  部分塑性应变增量计算

对于正常固结黏土 (下文简称黏土), 修正剑桥

模型被公认为是最好的弹塑性模型之一, 其屈服函数和塑性势函数可以用下式统一表示。

$$f = g = \ln \frac{p}{p_0} + \ln \left[ 1 + \frac{q^2}{M^2 p^2} \right] - \int \frac{d\varepsilon_v^p}{c_p} = 0 \quad (20)$$

式中,  $p_0$  为初始平均应力,  $M (= q/p)$  为黏土在临界状态的应力比,  $c_p$  可以写为下式

$$c_p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \quad (21)$$

式 (20) 也可以表示砂土的塑性势函数, 因为修正剑桥模型的剪胀方程仍然能表示砂土的剪胀 [1]。

若应用相关联流动法则, 则屈服函数也用塑性势函数式 (20) 表示, 其同样也可以表示砂土的屈服函数。

$$f = g = \ln \frac{p}{p_0} + \ln \left[ 1 + \frac{q^2}{M^2 p^2} \right] - H = 0 \quad (22)$$

硬化参数  $H$  常常被认为是塑性应变增量  $d\varepsilon_{ij}^p$  的组合, 如塑性功。因此表示为

$$H = \int dH = \int |c_1(\sigma_{ij})d\varepsilon_v^p + c_2(\sigma_{ij})d\varepsilon_d^p| \quad (23)$$

式中  $c_1(\sigma_{ij}), c_2(\sigma_{ij})$  为所用应力张量的函数, 把剪胀方程  $\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta}$  代入上式得

$$H = \int \left| c_1(\sigma_{ij})d\varepsilon_v^p + c_2(\sigma_{ij}) \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} d\varepsilon_v^p \right| = \int c(\sigma_{ij})d\varepsilon_v^p \quad (24)$$

式中,  $c(\sigma_{ij})$  为应力张量的函数。硬化参数具有与应力路径无关的特性, 图 8 表示了在等  $p$  路径 (路径  $AB$ ) 和等向压缩路径 (路径  $AC$ ), 即沿着路径  $AB$  和路径  $AC$  硬化时, 硬化参数  $H$  的变化相等, 具体确定方法如下。

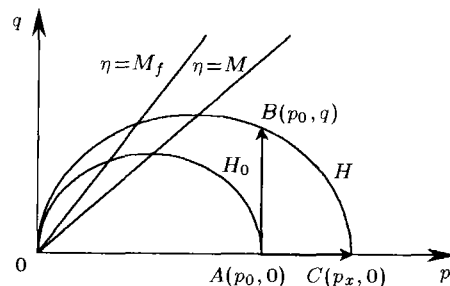


图 8 确定硬化参数  $H$  的应力路径

Fig.8 Stress paths on deriving hardening parameter  $H$

(1) AB 路径

把式 (24) 代入式 (22) 得, 比例常数  $\Lambda$  可以表示成

$$\Lambda = \frac{1}{c(\sigma_{ij})} \frac{\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{\frac{\partial f}{\partial p}} \quad (25)$$

对式 (22) 分别求  $p, q$  偏导, 得如下两个等式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} &= \frac{1}{p} \cdot \frac{M^2 - \eta^2}{M^2 + \eta^2} \\ \frac{\partial f}{\partial q} &= \frac{1}{p} \cdot \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

把式 (26) 代入式 (25), 塑性剪应变增量表示为

$$d\epsilon_d^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{c(\sigma_{ij})} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{4\eta^2}{M^4 - \eta^4} dq \quad (27)$$

图 9 表示三轴压缩试验砂土和黏土的  $\eta-\epsilon_d$  曲线 (数据来源于文献 [2])。从图 9 可以看出对于砂土和黏土的曲线形状是相似的。黏土存在破坏应力比  $M$ , 砂土分别有变相应力比  $M$  和破坏应力比  $M_f$ 。通过比较, 修正剑桥模型中 AB 路径下 ( $p$  为常数), 黏土和砂土的塑性剪应变增量的表达式分别为

$$\left. \begin{aligned} \text{黏土: } d\epsilon_d^p &= c_p \frac{1}{p} \cdot \frac{4\eta^2}{M^4 - \eta^4} dq \\ \text{砂土: } d\epsilon_d^p &= \rho \frac{1}{p} \cdot \frac{4\eta^2}{M_f^4 - \eta^4} dq \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式中  $\rho$  为常数。式 (28) 也可以表示成如下的形式

$$\left. \begin{aligned} \text{黏土: } \frac{M^4 - \eta^4}{4\eta^2} &= c_p \frac{d\eta}{d\epsilon_d^p} \\ \text{砂土: } \frac{M_f^4 - \eta^4}{4\eta^2} &= \rho \frac{d\eta}{d\epsilon_d^p} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

联立式 (27) 和式 (28), 则  $c(\sigma_{ij})$  可表示为

$$c(\sigma_{ij}) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} \quad (30)$$

把式 (30) 代入式 (24) 得

$$H = \int dH = \int \frac{1}{\rho} \cdot \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\epsilon_v^p \quad (31)$$

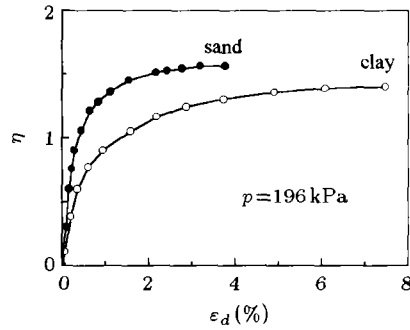


图 9 砂土和黏土的试验结果 [2]

Fig.9 Test results of clay and sand [2]

(2) AC 路径

当应力比  $\eta = 0$  (路径 AC), 式 (31) 化为

$$H = \int dH = \int \frac{1}{\rho} \cdot \frac{M_f^4}{M^4} d\epsilon_v^p \quad (32)$$

在等向压缩条件下, 由式 (20) 得,  $\int \frac{d\epsilon_v^p}{c_p} = \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$ ; 由式 (22) 得,  $\int dH = \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)$ ; 所以, 硬化参数  $H$

$$H = \int dH = \int \frac{d\epsilon_v^p}{c_p} \quad (33)$$

联立式 (32) 和式 (33) 得

$$\rho = c_p \cdot \frac{M_f^4}{M^4} \quad (34)$$

将式 (34) 代入式 (28) 得

$$d\epsilon_d^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \cdot \frac{M_f^4}{M^4} \cdot \frac{4\eta^2}{M_f^4 - \eta^4} d\eta \quad (35)$$

由剪胀方程  $\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_d^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta}$  得

$$d\epsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \cdot \frac{M_f^4}{M^4} \cdot \frac{M^2 - \eta^2}{M_f^4 - \eta^4} \cdot 2\eta d\eta \quad (36)$$

2.3 加卸载准则

如图 10 所示, 在复杂受力情况下, 当应力矢量  $\sigma$  的端点位于点  $P$  时, 其增量  $d\sigma$  指向区域  $S_1$  为双向加载, 其增量  $d\sigma$  指向区域  $S_2, S_4$  为单向加载, 其增量  $d\sigma$  指向区域  $S_3$  为卸载。加载时产生塑性应变, 卸载时不产生塑性应变, 应力矢量  $\sigma$  的端点在区域  $S_3$  内移动也不产生塑性应变。定义应力增量

$$\left. \begin{aligned} \langle dp \rangle &= \begin{cases} dp, & dp > 0 \text{ 和 } p = p_{\max} \\ 0, & dp \leq 0 \text{ 或 } p < p_{\max} \end{cases} \\ \langle d\eta \rangle &= \begin{cases} d\eta, & d\eta > 0 \text{ 和 } \eta = \eta_{\max} \\ 0, & d\eta \leq 0 \text{ 或 } \eta < \eta_{\max} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

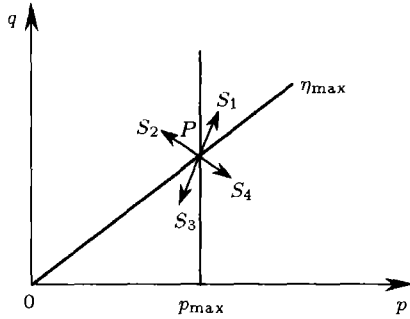


图 10 加载准则

Fig.10 Loading criterion

由式 (18), (19) 和式 (35)~(37) 得总塑性体积应变增量

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \cdot \frac{M_f^4}{M^4} \left[ \frac{M^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} \cdot \frac{1}{p} \langle dp \rangle + 2\eta \frac{M^2 - \eta^2}{M_f^4 - \eta^4} \langle d\eta \rangle \right] \quad (38)$$

总塑性剪应变增量为

$$d\varepsilon_d^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \cdot \frac{M_f^4}{M^4} \cdot \left[ \frac{2\eta(M^2 + \eta^2)}{M_f^4 - \eta^4} \cdot \frac{1}{p} \langle dp \rangle + \frac{4\eta^2}{M_f^4 - \eta^4} \langle d\eta \rangle \right] \quad (39)$$

### 2.4 变换应力空间塑性应变的计算方法

变换应力空间塑性应变的计算只需要将一般应力空间的应力变换成变换应力空间中相应的变换应力即可。基于广义非线性强度理论的变换应力公式为<sup>[9]</sup>

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{p}\delta_{ij} + \frac{\bar{q}^*}{\bar{q}}(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{p}\delta_{ij}) \quad (40)$$

$$\bar{q}^* = \alpha\sqrt{\bar{I}_1^2 - 3\bar{I}_2} + \frac{2(1 - \alpha)\bar{I}_1}{3\sqrt{(\bar{I}_1\bar{I}_2 - \bar{I}_3)/(\bar{I}_1\bar{I}_2 - 9\bar{I}_3)} - 1} \quad (41)$$

$$\bar{q} = \sqrt{\frac{3}{2}(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{p}\delta_{ij})(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{p}\delta_{ij})} \quad (42)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{ij} = \left(\frac{P + \sigma_0}{p_r}\right)^n \cdot p_r \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3, & \bar{I}_3 &= \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 \\ \bar{I}_2 &= \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_1 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \left[ p_r \left( \frac{p + \sigma_0}{p_r} \right)^n - p \right] \delta_{ij} \quad (45)$$

式中,  $p_r$  为参考应力;  $\sigma_0$  为材料的三向拉伸强度;  $\alpha$  为反映材料单向拉伸和压缩强度比的参数;  $n$  为

静水压力效应指数. 参数确定方法请参考文献 [9]. 所以, 总塑性体积应变增量为

$$d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \cdot \frac{M_f^4}{M^4} \left[ \frac{M^4 - \eta^4}{M_f^4 - \eta^4} \cdot \frac{1}{\bar{p}} \langle d\bar{p} \rangle + 2\eta \frac{M^2 - \eta^2}{M_f^4 - \eta^4} \langle d\eta \rangle \right] \quad (46)$$

总塑性剪应变增量为

$$d\varepsilon_d^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \cdot \frac{M_f^4}{M^4} \cdot \left[ \frac{2\eta(M^2 + \eta^2)}{M_f^4 - \eta^4} \cdot \frac{1}{\bar{p}} \langle d\bar{p} \rangle + \frac{4\eta^2}{M_f^4 - \eta^4} \langle d\eta \rangle \right] \quad (47)$$

式 (9), (10), (46) 和 (47) 即为本文所建立的砂土三维弹塑性应力应变关系表达式.

## 3 试验结果预测

### 3.1 典型应力路径

利用 Nakai<sup>[2,3]</sup> 的 Toyoura 标准砂土三轴试验结果验证砂土应力路径本构模型, 固结应力为 196 kPa, 初始孔隙比为  $e_0 = 0.68$ , 最大孔隙比  $e_{max} = 0.98$ , 最小孔隙比  $e_{min} = 0.59$ . 砂土的土性参数与原文相同<sup>[2]</sup>

$$M = 0.95, \quad M_f = 1.66, \quad \nu = 0.3$$

$$\frac{\lambda}{1 + e_0} = 0.00403, \quad \frac{\kappa}{1 + e_0} = 0.00251$$

强度参数, 取参考应力为  $p_r = 196$  kPa, 饱和砂土一般  $\sigma_0 = 0$  kPa, 根据本文试验结果确定  $\alpha = 0$ ,  $n = 1$ , 强度参数的确定方法请参考文献 [9]. 试验结果与模型预测如图 11~ 图 14 所示.

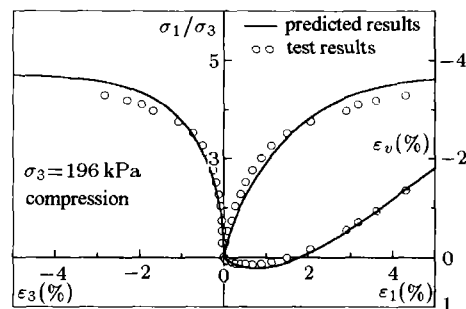


图 11 三轴压缩预测曲线与试验点比较

Fig.11 Comparison between predicted and test results under triaxial compression condition

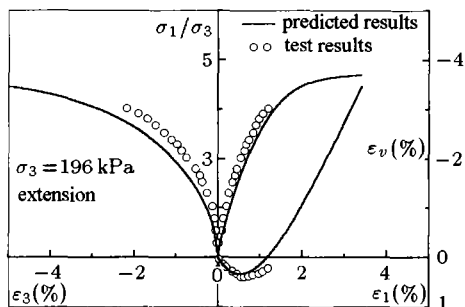


图 12 三轴拉伸预测曲线与试验点比较

Fig.12 Comparison between predicted and test results under triaxial extension condition

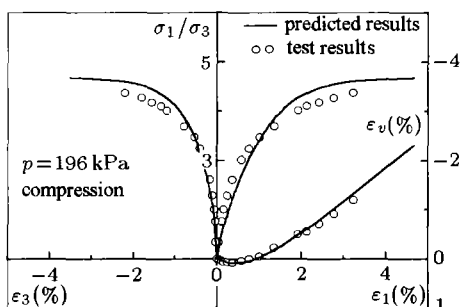


图 13 三轴压缩预测曲线与试验点比较

Fig.13 Comparison between predicted and test results under triaxial compression condition

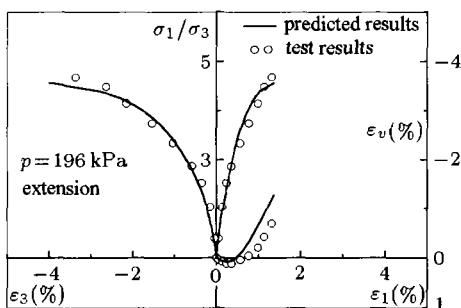


图 14 三轴拉伸预测曲线与试验点比较

Fig.14 Comparison between predicted and test results under triaxial extension condition

分析以上模型预测与试验结果的比较可以看出：图 12, 图 14 三轴拉伸条件下，模型预测与试验结果的吻合说明广义非线性强度理论可以合理描述砂土的屈服和破坏特性。图 13, 图 14 模型对试验结果的合理预测，表明了本文在等  $p$  应力路径条件下采用增量变形模式的合理性，与文献 [5] 比较减少了一个模型参数即破坏比  $R_f$ ，也体现了其优越性；图 11~ 图 14 模型对体积应变的合理预测说明模型

在反映剪胀性方面的功能；图 11~ 图 14 对应着 4 种应力路径，模型预测的合理性表明其反映应力路径方面的基本功能，并合理描述了砂土的破坏应力状态。

### 3.2 复杂应力路径

利用作者的砂土在复杂加载路径下的试验结果进一步验证砂土的应力路径本构模型。试初始固结压力为 50 kPa，初始孔隙比为  $e_0 = 0.58$ ，砂土土性参数为： $M = 1.08, M_f = 1.68, \nu = 0.3, \lambda = 0.0073, \kappa = 0.0041$ 。强度参数，参考应力为  $p_r = 100$  kPa，饱和砂土  $\sigma_0 = 0$  kPa， $\alpha = 0, n = 1$ 。应力路径如图 15 所示，其特点为该路径有较大转折。模型预测与试验结果的比较如图 16, 图 17 所示。应力路径 AB 在转折后  $q$  不变  $p$  减小，应力路径 AC 在转折后  $q$  不变  $p$  增大，根据图 10 定义的加卸载准则知为单向加载路径，本文模型可以合理计算其塑性应变如图 16, 图 17 所示，尤其应力路径 AB，如按一般的单屈服面弹塑性模型 [11] 计算会出现一大段的弹性范

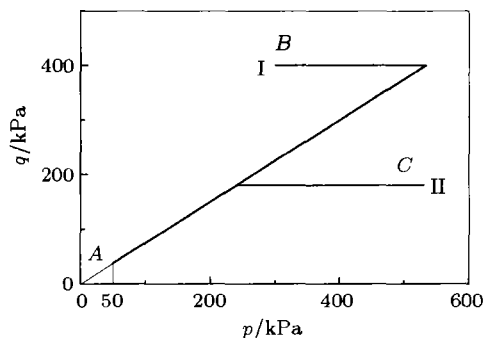


图 15 应力路径 I 和 II

Fig.15 Stress path I and II

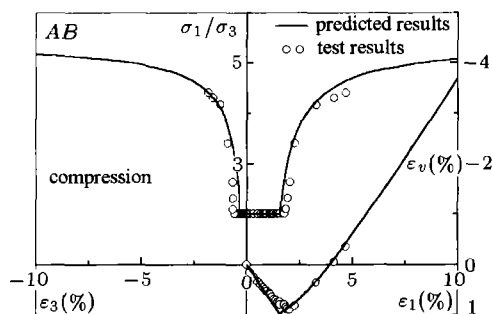


图 16 路径 I 试验结果与模型预测比较

Fig.16 Comparison between predicted and test results under stress path I condition

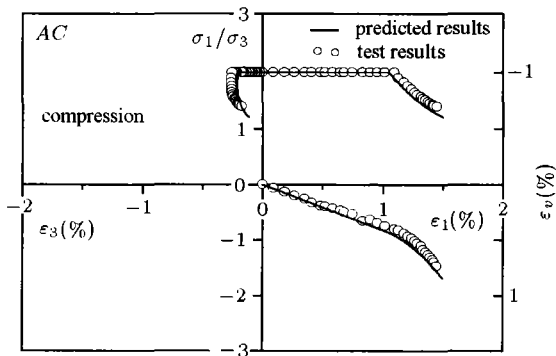


图 17 路径 II 试验结果与模型预测比较

Fig.17 Comparison between predicted and test results under stress path II condition

围, 与试验结果不符, 而本文模型预测更加合理, 体现了其考虑应力路径的优越性。

#### 4 结 论

作者从微元应力路径的线性逼近出发, 将不利于计算应变的加荷路径转变成与其充分接近易于计算的线性微元。结合广义非线性强度理论采用变换应力三维化方法简单、合理地使模型实现三维化。通过试验数据的验证表明, 三维模型适用于各种应力路径, 特别是对于  $q$  不变  $p$  减小的应力路径, 砂土应力路径本构模型可以合理地计算塑性应变, 表明了模型考虑应力路径相关性的优越性, 对不同应力路径体积应变的合理预测, 说明了模型反映剪胀性方面的功能, 且简单易懂, 实用性较强。

#### 参 考 文 献

- 1 Yao YP, Luo T, Sun DA. A simple 3-D constitutive model for both clay and sand. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(2): 240~246
- 2 Nakai T. An isotropic hardening elastoplastic model considering the stress path dependency in three-dimensional stresses. *Soils and Foundations*, 1989, 29(1): 119~139
- 3 Chowdhury EQ, Nakai T. Consequences of the  $t_{ij}$ -concept and a new modeling approach. *Computers and Geotechnics*, 1998, 23(4): 131~164
- 4 沈珠江. 理论土力学. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. 21~22 (Shen Zhujiang. Theoretical Soil Mechanics. Beijing: China Water Conservancy & Hydropower Press, 2000. 21~22(in Chinese))
- 5 罗汀, 路德春, 姚仰平. 考虑应力路径影响下砂土的三维本构模型. 岩土力学, 2004, 25(5): 688~693 (Luo Ting, Lu Dechun, Yao Yangping. Three-dimensional constitutive model of sand considering stress path. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, 25(5): 688~693 (in Chinese))
- 6 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 岩土塑性力学原理. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. 8~9 (Zheng Yingren, Shen Zhujiang, Gong Xiaonan. The Principles of Geotechnical Plastic Mechanics. Beijing: China Architecture & Building Press, 2002. 8~9(in Chinese))
- 7 Yao YP, Sun DA. Application of Lade's criterion to Cam-clay model. American Society of Civil Engineering. *J Engng Mech*, 2000, 126(1): 112~119
- 8 Matsuoka H, Yao YP, Sun DA. The Cam-clay models revised by the SMP criterion. *Soils and Foundations*, 1999, 39(1): 81~95
- 9 姚仰平, 路德春, 周安楠等. 广义非线性强度理论及其变换应力空间. 中国科学 (E 辑), 2004, 34(11): 1283~1299 (Yao Yangping, Lu Dechun, Zhou Annan, et al. The generalized nonlinear strength theory and transformed stress space. *Science in China Ser E*, 2004, 34(11): 1283~1299(in Chinese))
- 10 路德春, 罗汀, 姚仰平. 砂土应力路径本构模型的试验验证. 岩土力学, 2005, 26(5): 717~722 (Lu Dechun, Luo Ting, Yao Yangping. Test validating of constitutive model of sand considering complex stress path. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(5): 717~722
- 11 Yao YP, Matsuoka H, Sun DA. A unified elastoplastic model for clay and sand with the SMP criterion. In: Proc 8th Australia New Zealand Conference on Geomechanics, Hobart, 1999, 2: 997~1003



## CONSTITUTIVE MODEL OF SAND CONSIDERING COMPLEX STRESS PATHS<sup>1)</sup>

Lu Dechun<sup>2)</sup> Yao Yangping

(*Department of Civil Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China*)

**Abstract** The relativity of stress path is an important mechanical behavior of soils. In this paper, by the means of equivalently approaching the infinitesimal of stress path, it is decomposed into two parts, one of which is in the infinitesimal of constant hydrostatic pressure and the other is in the infinitesimal of constant ratio of shear stress to hydrostatic pressure. The plastic strain, which is caused in random stress paths under loading conditions, can be calculated easily by using this method. According to this idea, we propose a constitutive model of sand, which can consider the influence of stress path. There are two linear yield surfaces in  $p$ - $q$  plane. The loading criterion is easily determined based on these yielding surfaces. Using transformed stress method, it is easy and reasonable to combine the model with the Generalized Non-linear Strength Theory to make the model describe complex stress states. The model can rationally describe the characteristics of deformation and strength of sand under various stress paths.

**Key words** sand, stress path, constitutive model, generalized non-linear strength theory, transformed stress, tests

---

Received 25 April 2004, revised 20 December 2004.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272010).

2) E-mail: dechun@buaa.edu.cn