

# 受扰细杆的 Melnikov 分析<sup>1)</sup>

赵广慧<sup>2)</sup> 张年梅 杨桂通

(太原理工大学应用力学研究所, 太原 030024)

**摘要** 研究了计入 Peierls-Nabarro (P-N) 力和固体黏性效应的一维金属杆在简谐外力扰动下的动力响应, 其位移波的运动规律是 Sine-Gordon (SG) 型方程. 采用集结坐标 (collective coordinate) 将方程的解设为未扰系统呼吸子解的形式, 研究扰动作用下, 组成呼吸子的扭结 - 反扭结波的中心分离. 通过用集结坐标表示系统的哈密顿量, 从而将 SG 型方程转化为常微分方程组. 分析了未扰系统的异宿轨道, 并将之用于 Melnikov 方法对系统进行分析, 给出横截异宿点出现的必要条件, 从而预测混沌运动的发生.

**关键词** 集结坐标, Sine-Gordon 方程, Melnikov 方法, 异宿轨道, 混沌

**中图分类号:** O347.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2005)04-0511-05

## 引 言

金属材料在动力加载过程中会产生两种力学效应, 即动力变形效应和热效应. 金属材料在外力作用下产生位错时会发生移动, 这种情况称之为变形效应. 而热效应是由于温度的上升, 来源于材料的热量会产生内聚力效应, 它也会引起变形. Peierls-Nabarro(P-N) 阻力<sup>[1]</sup> 是位错运动的许多障垒中很基本也很重要的一种, 它们存在于变化了的晶格中, 是晶格对位错运动的抵抗, 根据原子结构的周期性, 位错一个距离  $\phi$  所需的力也应该具有周期曲线的特征, 所以 P-N 力可以写为:  $F_P = P \sin \beta \phi$ ; 同时材料中的能量会在位错运动而发生耗散, 因此存在一个与载荷方向相反的耗散力, 这个效应可以被看作是固体的黏性行为, 近似表示为:  $F_v = \xi \frac{\partial \phi}{\partial t}$ . 这样一维金属杆在受到随时间简谐变化的外力扰动作用时的运动方程为<sup>[2]</sup>

$$\phi_{tt} = \frac{E}{\rho} \phi_{xx} - \frac{P}{\rho} \sin(\beta \phi) - \frac{\xi}{\rho} \phi_t + \frac{F}{\rho} \cos(\omega t) \quad (1)$$

其中,  $E$  为弹性模量;  $\rho$  为杆的密度;  $P, F$  分别为作用在单位体积金属杆上的 P-N 力和纵向外力的幅值;  $\omega$  为外力的作用频率;  $\xi$  为黏性系数. 对方程进行无量纲化后可以得到<sup>[3]</sup>

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = -\varepsilon \alpha \phi_t + \varepsilon f \cos(\omega t) \quad (2)$$

其中  $\varepsilon$  为小量, 此为受到微扰的 SG 型方程, 本文将从理论上分析由此方程所描述的金属杆中位移波的运动特征.

在非线性的固体力学领域, 孤立子和混沌是两个主要研究内容. SG 方程存在孤立子解, 而受到微扰的 SG 方程在不同的扰动作用下分别会呈现出周期运动、准周期运动、混沌运动等丰富的动力响应<sup>[4]</sup>, 成为研究无穷维动力系统混沌吸引子的典型模型. 在加入扰动后难以得到其解析解, 只能以各种方法求其近似解<sup>[5]</sup>. 集结坐标法是近年来发展起来的一种研究受微扰 SG 系统的方法, 可以研究扭结波、呼吸子等初始波形在微扰作用下的演化规律. Quinter<sup>[6]</sup> 分析了无耗散和有耗散两种情况下, 微小简谐外力作用的 SG 系统, 将解设为扭结波的形式, 扭结中心的位置和速度作为系统的新变量, 从而给出孤立子中心的运动规律, 因此称这种方法为集结坐标法. Forinash<sup>[7]</sup> 和 Laurent<sup>[8]</sup> 利用集结坐标法研究了位于常值力场中受到随时间简谐变化及准周期变化的脉冲外力作用的长 Josephson 结, 将组成呼吸子的扭结 - 反扭结中心的分离作为集结坐标<sup>[9]</sup>, 利用 Melnikov 方法预测了系统混沌运动的出现.

本文研究计及 P-N 力和固体黏性效应的一维金属杆在受到沿空间均匀分布、随时间简谐变化的外力扰动的动力响应, 采用集结坐标法将 SG 型方程

2004-04-25 收到第 1 稿, 2005-03-03 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10172063), 山西省青年科学基金 (20051004) 和太原理工大学青年基金 (12901116) 资助项目.

2) E-mail: zhaozhaogh@sohu.com

转化为关于呼吸子的形状和动量的常微分方程组，并利用 Melnikov 方法对其进行定性分析，从而得到系统出现横截异宿点的必要条件，以预测混沌运动的发生。

1 集结坐标法

受到微扰的 SG 型方程 (2) 的哈密顿量可以写为

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\phi_t^2 + \phi_x^2 + 2(1 - \cos \phi)] dx - \epsilon f \cos \omega t \int_{-\infty}^{\infty} \phi dx = H_0 + \epsilon H_1 \quad (3)$$

系统的耗散效应由耗散函数表示为

$$Q = \frac{\epsilon \alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t^2 dx \quad (4)$$

设受到微扰的 SG 方程的解具有同未扰呼吸子相同的形式，取呼吸子的包络轮廓为扭结 - 反扭结对

$$\phi(x, t) = 4 \tan^{-1} e^{k(x-z)} + 4 \tan^{-1} e^{-k(x+z)} - 2\pi = 4 \tan^{-1} \left[ \frac{\sinh(kz)}{\cosh(kx)} \right] \quad (5)$$

其中  $z$  为时间  $t$  的函数，对于单个的扭结或反扭结波， $dz(t)/dt = c$ ， $c$  为扭结或反扭结波的传播速度； $k$  为 Lorentz 因子，是表征呼吸频率的量，与呼吸子振荡频率  $\omega_b$  之间的关系为： $\omega_b = (1 - k^2)^{1/2}$ 。呼吸子模态由下式定义

$$\sinh[kz(t)] = \frac{k}{\omega_b} \sin(\omega_b t + \varphi_0), \quad k \leq 1 \quad (6)$$

将方程 (6) 代入式 (5) 即为未扰 SG 方程精确的呼吸子解。定义呼吸子的集结坐标为<sup>[9]</sup>： $X = 2kz(t)$ ，它能定性表示组成呼吸子的扭结 - 反扭结波中心的空间分离，即呼吸子的宽度。根据集结坐标的定义及系统哈密顿量的表达式，采用文献 [8,10] 的思想，将  $k$  作为与时间无关的量，定义正则坐标

$$P = \frac{4}{k} \left( 1 + \frac{X}{\sinh X} \right) \dot{X} \quad (7)$$

使得  $(X, P)$  为正则共轭变量。考虑到未扰 SG 系统为保守系统，则哈密顿量 (3) 中的未扰哈密顿量  $H_0$  与哈密顿扰动项  $H_1$  就可以用正则共轭变量表示为

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= \frac{P^2}{2M(X)} + V(X) = \text{const} \\ H_1 &= -\frac{2\pi}{k} X f \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中势能  $V(X)$  和式中的  $M(X)$  分别为

$$\left. \begin{aligned} V(X) &= 2M(X) \tanh^2 \left( \frac{X}{2} \right) + 8k \left( 1 - \frac{X}{\sinh X} \right) \\ M(X) &= \frac{4}{k} \left[ 1 + \frac{X}{\sinh X} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将耗散函数用正则共轭变量表示为

$$Q = \frac{\epsilon \alpha P^2}{2M(X)} \quad (10)$$

由哈密顿量 (8) 并考虑到耗散效应，可以得到受扰系统的常微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= f_1(X, P) = \frac{\partial H_0}{\partial P} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial P} = \frac{\partial H_0}{\partial P} \\ \dot{P} &= f_2(X, P) = -\frac{\partial H_0}{\partial X} - \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial X} - \frac{\partial Q}{\partial P} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中  $R = -\partial Q / \partial P = -\epsilon \alpha P / M(X)$  为耗散力。

对于原偏微分方程 (2)，当外力频率小于但接近于 1 时会与低幅呼吸子空间结构发生共振，从而可能出现复杂的非规则运动。呼吸子的能量为  $E_B = 16(1 - \omega_b^2)^{1/2}$ ，与呼吸频率有关，本文以  $\omega_b = 0.7$  为例，以获得低能呼吸子，外力频率取为  $\omega = 0.87$ ，此方法完全可以用于其它参数值下受扰 SG 系统的分析。

利用四阶 Runge-Kutta 法积分未扰常微分方程 (11)( $\epsilon=0$ ) 可以得到未扰常微分系统的相轨迹 (图 1)，不同的闭曲线分别对应不同的初始条件，如图所示，最外层的闭曲线为连接两不稳定平衡点  $X_1$  和  $X_2$  的异宿轨道，同时还可以得到集结坐标  $X$  随时间的变化，再由式 (5) 可知： $\phi(0, t) = 4 \tan^{-1}[\sinh(X/2)]$ ，从而给出由未扰常微分系统得到的金属杆中点位移随时间的变化规律 (图 2)，这是周期为  $T$  的周期运动，此运动规律与呼吸频率为  $2\pi/T$  的 SG 呼吸子在  $x=0$  点处最大位移随时间的变化完全符合，说明了

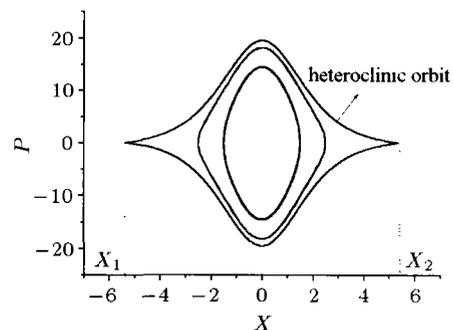


图 1 未扰常微分系统 (11) 的相轨迹 ( $\epsilon = 0$ )  
Fig.1 The phase trajectory of unperturbed ODE (11) ( $\epsilon = 0$ )

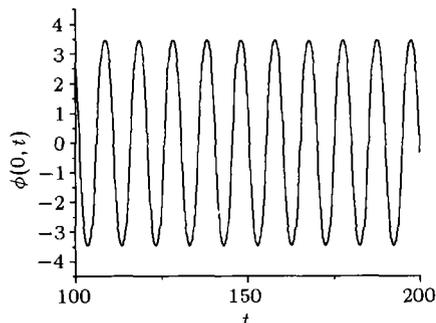
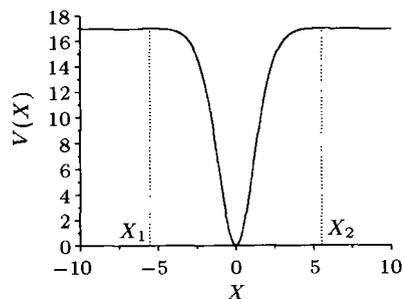


图 2 由未扰常微分方程 (11) 得到的杆中点最大位移随时间的变化  
Fig.2 Displacement varying with time obtained from unperturbed ODE (11)

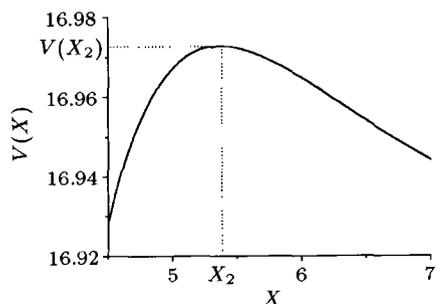
集结坐标表示的常微分系统可以很好地近似原系统 (2)。当受扰系统 (11) 的相轨迹出现不规则运动时, 可以说明原偏微分系统的运动状态。

### 2 Melnikov 分析

下面首先分析系统 (11) 在未扰情况下的势能。由式 (9) 可知势能曲线关于  $X = 0$  对称, 如图 3 所示, 此时  $X_1 = -5.3707$  和  $X_2 = 5.3707$  为势能极大值点, 即不稳定平衡点, 其势能极大值为  $V(X_1) = V(X_2) = 16.9728$ 。为了判定这两个平衡点



(a)



(b)

图 3 未扰常微分系统的势能随 X 的变化曲线图 (图 3(b) 为图 3(a) 在  $X_2$  点处的局部放大图)

Fig.3 Potential energy vs. X for unperturbed ODE system (Fig.3(b) is the local amplification in  $X_2$  of the Fig.3(a))

的类型, 我们研究未扰情况下的非线性方程 (11) ( $\epsilon = 0$ ), 其线性系统在平衡点处的 Jacobian 行列式为

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X} & \frac{\partial f_1}{\partial P} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X} & \frac{\partial f_2}{\partial P} \end{vmatrix}_{\substack{X=X_1(\text{或 } X_2) \\ P=0}}$$

得到 A 在两个不稳定平衡点处的特征值为:  $\pm 0.3305$ , 因此这两个平衡点都是双曲鞍点。设连接两双曲鞍点的异宿轨道为  $p(t)$ , 过图 1 的  $X_1$  和  $X_2$  点, 要找受扰系统的稳定流形与不稳定流形的横截异宿点, 它的出现有可能导致混沌运动。

利用 Melnikov 方法对受扰系统 (11) 进行分析 [11], 由式 (7) 并考虑到系统 (11) 在未扰情况下 ( $\epsilon = 0$ ) 为哈密顿系统, 则异宿轨道  $p(t)$  的 Melnikov 函数可以写为

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{p}(t) \left[ \frac{2\pi}{k} f \cos \omega(t + \tau) - \alpha p(t) \right] dt = \frac{2\pi f}{k} (K \cos \omega\tau - I \sin \omega\tau) - \alpha J \quad (12)$$

其中起始时刻  $\tau$  为任意实数, 当  $M(\tau)$  具有简单零点时, 系统会出现横截异宿点, 即出现 Smale 马蹄变换意义下的混沌。由于得不到式 (12) 中的 3 个积分  $K, I, J$  的解析解, 我们转而对未扰系统的势能进行分析, 给出积分的数值结果 [12]。由方程 (8) 可知, 未扰系统沿着连接双曲鞍点  $X_1$  和  $X_2$  的异宿轨道  $X(t) = p(t)$  的哈密顿量为常数

$$H_0 = \frac{M(p)}{2} \dot{p}^2 + V(p) = \text{const} \quad (13)$$

式中  $V(p)$  如式 (9) 所示, 则有

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}^2 &= \frac{2}{M(p)} [V(X_1) - V(p)] \\ p(-\infty) &= X_1, \quad p(+\infty) = X_2, \quad \dot{p}(\pm\infty) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这样 Melnikov 函数中的积分分别为

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_{X_1}^{X_2} \sin[\omega t(p)] dp \\ J &= \int_{X_1}^{X_2} \sqrt{\frac{2}{M(p)} [V(X_1) - V(p)]} dp \\ K &= \int_{X_1}^{X_2} \cos[\omega t(p)] dp \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中  $I$  和  $K$  中的  $t(p)$  由式 (14) 确定如下

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{\frac{2}{M(p)}[V(X_1) - V(p)]}$$

则

$$t(p) = \int_{x_0}^p \frac{dp}{\sqrt{\frac{2}{M(p)}[V(X_1) - V(p)]}}$$

由式 (12) 可知, 当阻尼系数  $\alpha$  与外力幅值  $f$  的比值满足

$$\frac{\alpha}{f} \leq \left(\frac{\alpha}{f}\right)_c = \frac{2\pi}{kJ} (K \cos \omega\tau - I \sin \omega\tau)_{\max} \quad (16)$$

时,  $M(\tau)$  可能出现零值. 当呼吸频率为  $\omega_b = 0.7$  时,  $(\alpha/f)_c$  随外力频率的变化如图 4 所示, 由此可知, 横截异宿点的出现强烈依赖于外力频率. 为了与 Bishop<sup>[13]</sup> 文中的数值结果相比较, 我们这里也将耗散系数取为  $\varepsilon\alpha = 0.04$ , 得到:  $\alpha/f \leq 1.9998$ , 出现横截异宿点时外力所需满足的必要条件为  $\varepsilon f \geq 0.02$ . 文献 [13] 中数值计算得到混沌发生的阈值为  $\varepsilon f = 0.07$ , 本文结果与之有一定差别, 事实上 Melnikov 方法判定的出现横截异宿点的阈值条件往往与真实混沌反映的奇怪吸引子出现的阈值是有差别的, 后者往往高于前者, 故本文结果在定性上是合理的.

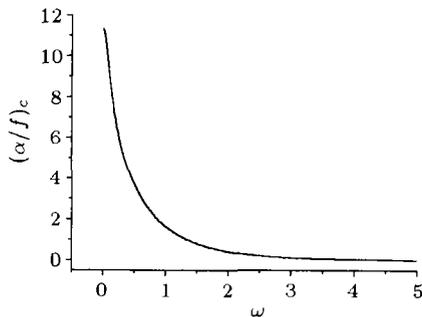


图 4  $(\alpha/f)_c$  随外力频率  $\omega$  的变化

Fig.4  $(\alpha/f)_c$  versus the driving frequency  $\omega$

### 3 结 论

金属杆件在动力加载过程中会产生位错运动, 同时材料中的能量会在位错运动而发生耗散. 在阻碍位错运动的障垒中, P-N 阻力是很基本也很重要的一种, 它具有周期特征. 本文正是研究计入 P-N 阻力效应及固体黏性效应的一维金属杆, 在沿空间单峰分布的初始位移及简谐外力场作用下的动力响应, 杆中位移波的传播为受扰的 SG 型方程. 采用近年来发展起来的集结坐标法, 将表示组成呼吸子

模态的扭结 - 反扭结中心的空间分离的量作为系统的新变量——集结坐标, 从而将受扰的偏微分系统近似为常微分系统. 常微分系统在未扰情况下与 SG 方程具有很好的一致性, 可将此常微分系统用于研究原系统的运动规律. 未扰常微分系统为哈密顿系统, 从而可以用 Melnikov 方法估测系统出现横截异宿点的条件. Melnikov 函数中沿着异宿轨道的函数积分无法用解析的方法得出, 本文通过分析其势能函数, 避免直接求解异宿轨道. 最后给出了系统出现横截异宿点的阈值随外力频率的变化, 可知横截异宿点的出现强烈依赖于外力频率, 从而得到受扰细杆可能发生不规则运动的必要条件. 将计算结果与文献 [13] 中数值计算所得混沌发生的阈值相比较, 考虑到横截异宿点的出现参数值低于混沌吸引子出现的参数值, 故结果在定性上是合理的.

### 参 考 文 献

- 1 Meyers MA, Chawla KK. Mechanical Metallurgy, Prentice Hall, Inc. 1984
- 2 Shu XF, Yang GT. The influence of material properties on dynamic behavior of structures. In: Senoo M ed. Proceedings of IMMM'97. Mie University Press, 1997. 279~284
- 3 赵广慧, 张年梅, 杨桂通. 初始呼吸子对 SG 系统动力行为的影响. 固体力学学报, 2004, 25(4): 404~410 (Zhao Guanghui, Zhang Nianmei, Yang Guitong. Influence of the initial breather on the dynamic behavior of the SG system. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2004, 25(4): 404~410 (in Chinese))
- 4 Zhao Guanghui, Zhang Nianmei, Yang Guitong. Influence of the initial breather on the perturbed thin bar. In: Balkema AA, ed. The Second International Conference on Structural Engineering. Mechanics and Computation, University of Cape Town, South Africa, 2004-07. 491~494
- 5 徐振源, 刘曾荣. SG 方程的截断系统的同宿轨道. 力学学报, 1998, 30(3): 292~299 (Xu Zhenyuan, Liu Zengrong. Homoclinic orbits of the truncated systems of SG equation. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 30(3): 292~299(in Chinese))
- 6 Quintero NR, Sánchez A. DC motion of ac driven SG solitons. *Physics Letters A*, 1998, 247: 161~166
- 7 Forinash K, Willis CR. Nonlinear response of the SG breather to an a.c. driver, *Physica D*, 2001, 149: 95~106
- 8 Laurent Nana, Timoléon C. Kofané, Ernest Kaptouom. Subharmonic and homoclinic bifurcations in the driven and damped SG system. *Physica D*, 1999, 134: 61~74
- 9 Matsuda T. A variational analysis of the collision of solitary solutions. *Lett Nuovo Cimento*, 1979, 24: 207~212
- 10 Anatole Kenfack, Timoléon C. Kofané. Chaos in rf-driven long Josephson junctions in the presence of an external field. *Physical Review B*, 1994, 52(14): 10359~10363
- 11 Zhang Nianmei, Yang Guitong. Solitary waves and chaos

in nonlinear visco-elastic rod. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2003, 22: 917~923

12 Cicogna G. A theoretical prediction of the threshold for chaos in a Josephson junction. *Physics Letters A*, 1987,

121(8,9): 403~406

13 Bishop AR, Flesch R, Forest MG, et al. Correlations between chaos in a perturbed SG equation and a truncated model system. *SIAM J Math Anal*, 1990, 21: 1511~1536

## MELNIKOV ANALYSIS OF THE PERTURBED THIN BAR<sup>1)</sup>

Zhao Guanghui<sup>2)</sup> Zhang Nianmei Yang Guitong

(Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

**Abstract** The dynamical response of one-dimensional metal bar considering Peierls-Nabarro force and viscous effect of solid has been researched. Movement of displacement wave in the bar follows SG type equation. According to "Collective coordinate approach", solution of the SG type equation is assumed as breather-type solution of undisturbed system. Separation between the center of mass of the kink and the anti-kink that make up the breather is researched under perturbation. The partial differential equation is reduced to the ordinary differential equation through describing the Hamiltonian of the system with collective coordinate. The heteroclinic orbit of unperturbed system is analyzed through potential function and this is used in Melnikov method. Necessary condition for appearance of the cross-sectional heteroclinic point is given to forecast happening of chaotic.

**Key words** collective coordinate, Sine-Gordon equation, Melnikov method, heteroclinic orbit, chaos

### 更正

2004 年第 36 卷第 2 期上刊登的论文“火箭剩余推进剂排放过程的分析与模拟”(作者: 樊青, 刘宏立, 蒋建政等) 中, 第 131 页的公式 (5)  $\Gamma = \frac{16\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} \times \frac{Q_d}{\rho\mu^3}$  由于作者笔误, 右端的系数有误. 现更正如下:

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \times \frac{Q_d}{\rho\mu^3}$$

《力学学报》编辑部

2005 年 6 月 20 日

Received 25 April 2004, revised 3 May 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10172063), Shanxi Province Science Foundation of Youth (20051004) and Youth Foundation of Taiyuan University of Technology (12901116).

2) E-mail: zhaozhaogh@sohu.com