第 37 卷 第 4 期　　力 学 学 报　　Vol. 37, No. 4
2005 年 7 月　　Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics　　July, 2005

I 型定常扩展裂纹尖端的弹黏塑性场

贾 斌 *,1)　王振清 †　李永东 **

*(哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001)
†(哈尔滨工程大学建筑工程学院, 哈尔滨 150001)
**(装甲兵工程学院机械工程系, 北京 100072)

摘要　考虑材料在扩展裂纹尖端的黏性效应, 假设黏性系数与塑性应变率的幂次成反比, 对幂硬化材料中平面应变扩展裂纹尖端场进行了弹黏塑性渐近分析, 得到了不含间断的连续解, 并讨论了 I 型裂纹数值解的性质随各参数的变化规律. 分析表明应力和应变均具有幂奇异性, 并且只有在线性硬化时, 尖端场的弹、黏、塑性才可以合理匹配. 对于 I 型裂纹, 裂尖场不含弹性卸载区. 当裂纹扩展速度趋于零时, 动态解趋于准静态解, 表明准静态解是动态解的特殊形式; 如果进一步考虑硬化系数为零的极限情况, 便可退化为 Hui 和 Riedel 的非线性黏弹性解.

关键词　准静态扩展, 动态扩展, 幂硬化, 弹黏塑性材料, 裂纹尖端场

中图分类号: O346.1　**文献标识码:** A　**文章编号:** 0459-1879(2005)04-0421-07

引　言

扩展裂纹尖端的动态渐近解虽然解决了准静态解中存在的许多矛盾 [1], 但是其自身也存在一些问题. 例如, 某些动态解中含有塑性激波 [2~4]; 而在某些情况下, 当裂纹扩展速度趋于零时, 动态解趋于静态解而非准静态解 [2,5]. 但在这些动态解中, 都没有考虑材料的黏性效应.

无论是准静态扩展还是动态扩展, 由于在裂纹尖端存在应变的奇异性, 材料都将产生很高的应变率. 例如, 对动态扩展, 其塑性应变率的典型值高达 $10^3 \sim 10^5\mathrm{s}^{-1}$[6]. 因此, 即使对于率敏感性很小的材料, 在这样高的应变率下, 黏性效应也会对材料性质产生重要影响. 另外, 理论分析和实验研究均表明, 在扩展裂纹尖端高度的能量集中导致不可逆变形, 一大部分变形能将以热的形式释放出来, 使裂纹尖端局部温度升高, 其幅度可达几百摄氏度, 甚至上千摄氏度 [7,8]. 在这样的高温下, 材料的性质必然发生变化, 黏性流动在裂纹尖端的变形中所占的比例将大大增加. 因此, 在研究裂纹尖端渐近场时, 如果考虑材料的黏性效应, 不仅更加符合实际情况, 得到更精确的解, 而且可能因此而解决率无关解中所存在的问题.

为了研究黏性效应作用下的扩展裂纹尖端场, 高玉臣 [9] 对理想弹塑性材料引入了一种简化的弹黏塑性模型, 即忽略弹性阶段的黏性效应, 如图 1 所示. 对 I 型裂纹, 分别得到了对数型 [9] 和幂型 [10] 两种奇异解, 并确定了两种奇异解的分界 [10]. 在此基础上, 李范春等人 [11] 研究了Ⅲ型裂纹, 贾斌等人 [12] 研究了Ⅱ型裂纹, 得到了与 I 型问题相似的结论. 但是, 这些研究中所设想的黏性系数均与距离裂纹尖端的极径 r 成正比, 这虽然使奇异量级得到了匹配, 却也造成材料性质成为坐标的函数从而失去了均匀性. 此外, 对同种材料得到两种奇异解, 这也是值得深入讨论的. 本文假设黏性系数与塑性应变率的幂次成反比, 并进一步考虑材料的硬化, 经过渐近分析得到了均匀材料中的单一幂奇异解. 最后通过与两种极限情况的对比, 验证了解的正确性.

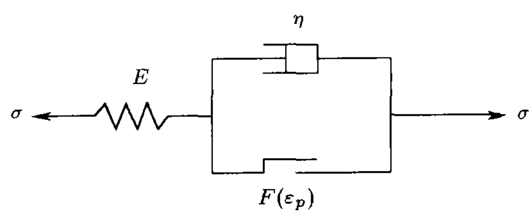

图 1　弹黏塑性力学模型

Fig.1　Elastic-viscoplastic constitutive model

2004-03-31 收到第 1 稿, 2004-12-09 收到修改稿.

1) E-mail: jiabin@hit.edu.cn

1 基本方程

令 $X_\alpha(\alpha=1,2)$ 表示平面上的固定坐标系. 考虑一条半无限大的裂纹在无限大的固体中以恒定速度 V 沿 X_1 方向扩展, X_2 与裂纹面垂直. 再以裂纹尖端为原点建立与裂纹尖端一起移动的随动坐标系 oxy 和 $or\theta$, 如图 2 所示. 对于定常扩展, 裂尖场中任何物理量 Ω 的物质导数为

$$\dot{\Omega}=\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=-V\frac{\partial\Omega}{\partial x}=V\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)\Omega \quad (1)$$

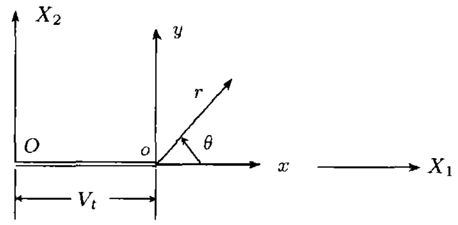

图 2 固定坐标系与随动坐标系

Fig.2 Stationary and moving coordinates

对于图 1 所示的弹黏塑性模型, 在一维情况下, 如果用 ε, ε_e 和 ε_p 分别表示总应变、弹性应变和塑性应变, 用 σ, σ_ν 和 σ_p 分别表示总应力、黏性应力和塑性应力, 则可以得到如下的联立方程组

$$\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_p, \quad \varepsilon_e=\frac{\sigma}{E}, \quad \dot{\varepsilon}_p=\lambda S_p \quad (2)$$

$$\sigma=\sigma_\nu+\sigma_p, \quad \sigma_\nu=\eta\dot{\varepsilon}_p, \quad S_p=\sigma_p-\sigma_p^m \quad (3)$$

其中: E 为弹性模量, λ 为塑性流动因子, η 为黏性系数, S_p 为塑性偏应力, σ_p^m 为平均塑性应力.

由上述方程组可以推得一维情况下的本构方程为

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\dot{\sigma}}{E}+\frac{\lambda}{1+\eta\lambda}S \quad (4)$$

在三维情况下, 对式 (2) 和式 (3) 用张量形式加以推广, 并由类似的推导可得其本构方程为

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij}-\frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}+\frac{1}{\eta}\left(1-\frac{K}{\sqrt{J_2}}\right)S_{ij} \quad (5)$$

式中 ν 为 Poisson 比, δ 为 Kroneker 符号, K 为材料屈服强度, J_2 为应力张量的第二不变量.

定义等效应力 $\bar{\sigma}$, 等效塑性应力 $\bar{\sigma}_p$ 和等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}_p$ 的表达式分别为

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\sigma}=\left(\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{\sigma}_p=\left(\frac{3}{2}S_{ij}^pS_{ij}^p\right)^{\frac{1}{2}}\\&\bar{\varepsilon}_p=\int\left(\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^p\dot{\varepsilon}_{ij}^p\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

并设材料的硬化规律为

$$\bar{\sigma}_p-f(\bar{\varepsilon}_p)=0 \quad (7)$$

式中 $f(\bar{\varepsilon}_p)$ 为塑性加载函数. 考虑在裂纹尖端高应变率区域内, 材料的黏性是应变率的函数, 为保证奇异量级的匹配, 同时各相关物理量的表达式不过于复杂, 假设黏性系数 η 具有如下幂函数形式

$$\eta=C(\dot{\bar{\varepsilon}}_p)^{-\beta} \quad (8)$$

式中 C 为非负常数, β 为待定幂指数. 把上式代入式 (5), 经过整理后可得

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ij}=&\frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij}-\frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}+\frac{3S_{ij}}{2\bar{\sigma}}\left(\frac{2}{3C}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\cdot\\&H[\bar{\sigma}-f(\bar{\varepsilon}_p)]\,[\bar{\sigma}-f(\bar{\varepsilon}_p)]^{\frac{1}{1-\beta}}\end{aligned} \quad (9)$$

其中 Heaviside 阶跃函数为

$$H[\bar{\sigma}-f(\bar{\varepsilon}_p)]=\begin{cases}1, & \text{当 } \bar{\sigma}-f(\bar{\varepsilon}_p)>0\\0, & \text{当 } \bar{\sigma}-f(\bar{\varepsilon}_p)\le 0\end{cases} \quad (10)$$

假设应力具有如下形式的幂奇异性

$$\sigma_{ij}\sim r^{-\delta}, \qquad 0<\delta<1/2 \quad (11)$$

并进一步假定在裂纹尖端, 黏性应力和塑性应力同量级, 且弹性应变和塑性应变同量级, 则由式 (9) 的量级协调可得

$$\delta=\frac{1}{\beta}-1 \quad (12)$$

由 $0<\delta<1/2$, 可知黏性系数 η 的表达式中待定幂指数 β 的取值范围是 $2/3<\beta<1$.

再进一步讨论塑性硬化规律, 设式 (7) 取为以下幂硬化形式

$$\bar{\sigma}_p-k\bar{\varepsilon}_p^\alpha=0 \quad (13)$$

其中硬化系数 k 为一常数, α 为幂硬化指数. 而由奇异性分析可知

$$\bar{\sigma}_p\sim r^{-\delta}, \qquad \bar{\varepsilon}_p\sim r^{-\delta} \quad (14)$$

因此只有 $\alpha=1$, 即在线性硬化情况下, 才能使弹性、黏性和塑性三者匹配. 此时材料的弹黏塑性本构关系变为

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ij}=&\frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij}-\frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}+\frac{3S_{ij}}{2\bar{\sigma}}\left(\frac{2}{3C}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\cdot\\&H[\bar{\sigma}-k\bar{\varepsilon}_p]\,[\bar{\sigma}-k\bar{\varepsilon}_p]^{\frac{1}{1-\beta}}\end{aligned} \quad (15)$$

2 动态扩展裂纹渐近解

对于平面应变 I 型裂纹，在极坐标下，几何方程、运动方程及本构方程分别为

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\\&\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\Big)\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{r\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=\rho w_r\\&\frac{\partial\sigma_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r}=\rho w_\theta\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot\varepsilon_r=-\dot\varepsilon_\theta=\frac{1}{4\mu}(\dot\sigma_r-\dot\sigma_\theta)+\\&\frac{3(\sigma_r-\sigma_\theta)}{4\bar\sigma}\Big(\frac{2}{3C}\Big)^{\frac{1}{1-\beta}}(\bar\sigma-k\bar\varepsilon_p)^{\frac{1}{1-\beta}}\\&\dot\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2\mu}\dot\sigma_{r\theta}+\frac{3\sigma_{r\theta}}{2\bar\sigma}\Big(\frac{2}{3C}\Big)^{\frac{1}{1-\beta}}(\bar\sigma-k\bar\varepsilon_p)^{\frac{1}{1-\beta}}\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

在不可压缩条件下，引入位移势函数 U，则位移分量可以表示为

$$u_r=-\frac{\partial U}{r\partial\theta},\quad u_\theta=\frac{\partial U}{\partial r}\tag{19}$$

根据量级匹配的原则，设位移势函数 U 为如下形式

$$U=r^{2-\delta}g(\theta)\tag{20}$$

并且可以把各应力分量、等效应力及等效塑性应变分别表示为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=r^{-\delta}[P(\theta)+S(\theta)]\\&\sigma_\theta=r^{-\delta}[P(\theta)-S(\theta)]\\&\sigma_{r\theta}=r^{-\delta}T(\theta)\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

$$\bar\sigma=\Sigma(\theta)r^{-\delta},\quad \bar\varepsilon_p=r^{-\delta}R(\theta)\tag{22}$$

引入下列无量纲量

$$\left.\begin{aligned}&D^*=\frac{1}{V}\Big(\frac{2\mu}{3C}\Big)^{\frac{1}{1-\beta}}\\&\tilde\lambda=\frac{3D^*}{2\tilde\Sigma}\tilde H(\tilde\Sigma-fR)(\tilde\Sigma-fR)^{\frac{1}{1-\beta}}\\&h(\theta)=\sin\theta g'(\theta)-(2-\delta)\cos\theta g(\theta)\\&\tilde T=\frac{T}{\mu},\quad\tilde S=\frac{S}{\mu},\quad\tilde P=\frac{P}{\mu},\\&\tilde\Sigma=\frac{\Sigma}{\mu},\quad M^2=\frac{\rho V^2}{\mu},\quad f=\frac{k}{\mu}\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

其中

$$\tilde H(\tilde\Sigma-fR)=\begin{cases}1, & 当\ \tilde\Sigma-fR>0\\0, & 当\ \tilde\Sigma-fR\le 0\end{cases}\tag{24}$$

把各相关量代入运动方程和本构方程，同时注意物质导数的求导规则式 (1)，经无量纲化并整理得

$$R'=-\delta R\cot\theta+\frac{D^*}{\sin\theta}(\tilde\Sigma-fR)^{\frac{1}{1-\beta}}\tag{25}$$

$$\tilde S'=\frac{2\delta h'}{\sin\theta}-\frac{3D^*\tilde S}{\tilde\Sigma\sin\theta}(\tilde\Sigma-fR)^{\frac{1}{1-\beta}}-\delta\tilde S\cot\theta+2\tilde T\tag{26}$$

$$\begin{aligned}\tilde P'=&\frac{2\delta h'}{\sin\theta}-\frac{3D^*\tilde S}{\tilde\Sigma\sin\theta}(\tilde\Sigma-fR)^{\frac{1}{1-\beta}}-\delta\tilde S\cot\theta+\\&\delta\tilde T-\delta M^2[h'\sin\theta-(1-\delta)h\cos\theta]\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}(1-M^2\sin^2\theta)\tilde T'=&M^2\sin\theta\Big[2\tilde S\sin\theta+\delta\tilde T\cos\theta+\\&\frac{3D^*\tilde T}{\tilde\Sigma}(\tilde\Sigma-fR)^{\frac{1}{1-\beta}}+(1-\delta^2)h\Big]-\\&M^2[(1-\delta)h\sin\theta+\delta h'\cos\theta]+\\&\delta(\tilde P+\tilde S)-2\tilde S\end{aligned}\tag{28}$$

$$\begin{aligned}(1-M^2\sin^2\theta)h''=&-(1-\delta^2)h-\delta\tilde T\cos\theta-\\&\frac{3D^*\tilde T}{\tilde\Sigma}(\tilde\Sigma-fR)^{\frac{1}{1-\beta}}-\delta(\tilde P+\tilde S)\sin\theta+\\&M^2\sin\theta[(1-\delta)h\sin\theta+\delta h'\cos\theta]\end{aligned}\tag{29}$$

3 数值计算与结果分析

在本问题中共有 4 个参数需要选择：反映材料硬化的系数 f，反映裂纹扩展速度的参数 M，反映材料黏性的系数 D^* 及指数 β. 问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\tilde T(0)=h(0)=0,\quad h'(0)=\frac{\sqrt3}{2}R(0)\\&\tilde S(0)=\frac{1}{\sqrt3}\Big\{\Big[\frac{\delta R(0)}{D^*}\Big]^{1-\beta}+fR(0)\Big\}\\&\tilde P(\pi)-\tilde S(\pi)=0,\quad\tilde T(\pi)=0\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

因此以 $R(0)$ 和 $\tilde P(0)$ 为未知量进行双参数打靶，对上述 4 个参数分别取可能的数值进行计算，典型结果见表 1～表 4，图 3 为塑性流动因子随各参数的变化曲线，图中的各量均已无量纲化 (图表中未注明参数均取自 $\beta=0.8, f=0.01, D^*=1.1, M=0.1$；取 β 为 0.909 1, 0.833 3, 0.769 2, 0.714 3, 相当于 δ 取 0.1, 0.2, 0.3, 0.4).

表 1 解随 f 的变化

Table 1 Solutions for different f

f	0.3	0.1	0.01	0.0
$\tilde{P}(0)$	2.4556	1.7463	1.5371	1.5164
$R(0)\times 10^{-2}$	0.8597	2.7925	3.5461	3.6237

表 2 解随 M 的变化

Table 2 Solutions for different M

M	0.3	0.1	0.01	0.0001
$\tilde{P}(0)$	1.4279	1.5371	1.5507	1.5509
$R(0)\times 10^{-2}$	1.4980	3.5461	3.9328	3.9369

表 3 解随 D^* 的变化

Table 3 Solutions for different D^*

D^*	100.0	1.0	0.01	0.0001
$\tilde{P}(0)$	0.4978	1.5742	4.9780	15.7415
$R(0)\times 10^{-2}$	1.1484	3.6316	11.4843	36.3165

表 4 解随 β 的变化

Table 4 Solutions for different β

β	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143
$\tilde{P}(0)$	2.3096	1.7963	1.2737	7.2920×10^{-1}
$R(0)$	1.2626	1.2263×10^{-1}	8.4141×10^{-3}	9.4906×10^{-5}

通过对计算结果的分析与比较可以发现，所得到的解是完全连续的，并且裂尖场完全被塑性区包围. 数值解随各参数的变化规律为:

(1) 随着 f 单调递增, 即材料的硬化程度增加, 应力幅值单调递增，塑性应变初值递减但随坐标 θ 增加很快变为递增. 当 f 递增到一定值的时候方程组无解；而当 $f=0$ 时仍有解，此时材料趋于文献 [13] 中的弹黏性状态.

(2) 随着 M 单调递减, 即裂纹扩展速度减小, 应力幅值和塑性应变单调递增，解稍有变化但不大，且当 $M\to 0$ 时仍有解，此解即应为准静态解，可以通过下文与准静态解的比较得到这一结论.

(3) 随着 D^* 单调递减 (相当于 C 递增)，此时材料的黏性增加, 应力幅值和塑性应变单调递增, 解的变化比较显著, 但塑性流动因子不随 D^* 变化. 当 $D^*=0$ 时，方程组无解.

(4) 随着 β 单调递减 (相当于 δ 递增)，此时材料的黏性和裂尖场的奇异性都增加，应力幅值、塑性应变和塑性流动因子都单调递减. 当 $\beta\to 2/3$，即 $\delta\to 1/2$ 时，塑性应变和塑性流动因子趋于零，即趋于纯弹性解. 当 $\beta\to 1$ 时，$\delta\to 0$，问题无解.

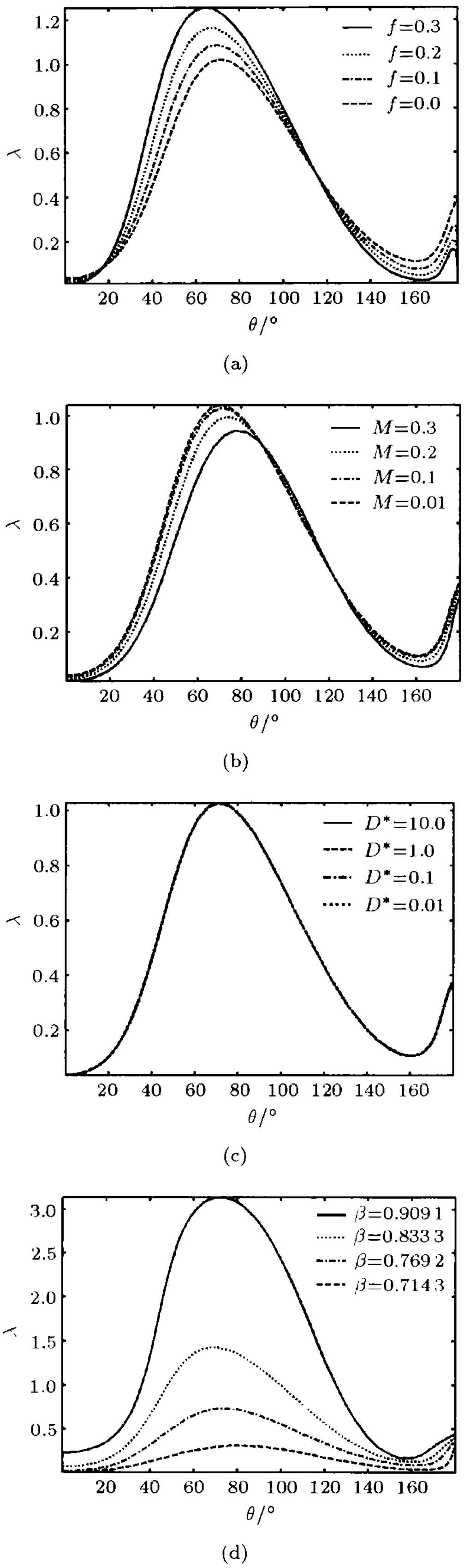

图 3 塑性流动因子随各参数的变化

Fig.3 Variations of plastic flow factor according to each parameter

4 极限情况 —— 与准静态解和 HR 解的比较

对相应的准静态问题，引入 Airy 应力函数 $\phi(x,y)$ 或 $\phi(r,\theta)$，使得应力表达式自动满足静平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\\ &\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{\phi}{r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

应变率协调方程为

$$\frac{\partial^2\dot\varepsilon_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\dot\varepsilon_\theta}{\partial r}\right) - r\frac{\partial\dot\varepsilon_r}{\partial r} = 2\frac{\partial^2(r\dot\varepsilon_{r\theta})}{\partial r\partial\theta} \tag{32}$$

根据量级分析，设应力函数 ϕ 的表达式为

$$\phi = r^{2-\delta}a(\theta) \tag{33}$$

引入无量纲量

$$\tilde a = \frac{a}{\mu} \tag{34}$$

把式 (33) 代入式 (31)，并和式 (22) 一起代入式 (32)，经无量纲化并整理得

$$\tilde Y'\sin\theta + (2+\delta)\tilde Y\cos\theta - 3D^*[(\delta^2-1)\tilde\Psi_1 - \tilde\Psi_1'' + 4\delta\tilde\Psi_2'] = 0 \tag{35}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\tilde Y(\theta) = \tilde a'''' + 2(\delta^2-2\delta+2)\tilde a'' + \delta^2(2-\delta)^2\tilde a,\\ &\tilde I(\theta) = \frac{(\tilde\Sigma - fR)^{\frac{1}{1-\beta}}}{\tilde\Sigma}\\ &\tilde\Psi_1(\theta) = \tilde{\mathrm{I}}(\theta)[\tilde a'' + \delta(2-\delta)\tilde a]\\ &\tilde\Psi_2(\theta) = \tilde{\mathrm{I}}(\theta)[(1-\delta)\tilde a']\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

其它各无量纲量的含义与动态问题相同. 所需的另一方程与式 (25) 相同.

问题的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\tilde a(\pi) = \tilde a'(\pi) = \tilde a'(0) = \tilde a'''(0) = 0\\ &\tilde a''''(0) = \frac{N_1+N_2+N_3}{D_n}\\ &\tilde a''(0) = -\frac{2}{\sqrt3}\left\{\left[\frac{\delta R(0)}{D^*}\right]^{1-\beta} + fR(0)\right\} - (2-\delta)\delta\tilde a(0)\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

其中

$$D_n = 2+\delta+3D^*\tilde I(0)\left\{1+\frac{3P0^2}{4\tilde\Sigma(0)}\cdot\left[\frac{1}{(1-\beta)D0} - \frac{1}{\tilde\Sigma(0)}\right]\right\} \tag{38}$$

$$N_1 = (2+\delta)[2(2\delta-\delta^2-2)\tilde a''(0) - \delta^2(2-\delta)^2\tilde a(0)] \tag{39}$$

$$N_2 = 3D^*\Big[(\delta^2-1)\tilde\Psi_1(0) + 4\delta\tilde\Psi_2'(0) - \delta(2-\delta)\tilde I(0)\tilde a''(0) + \frac{f\tilde I(0)R''(0)P0}{(1-\beta)D0}\Big] \tag{40}$$

$$N_3 = \frac{9D^*\tilde I(0)P0}{4\tilde\Sigma(0)}\left[\frac{1}{\tilde\Sigma(0)} - \frac{1}{(1-\beta)D0}\right]\cdot\{\delta(2-\delta)\tilde a''(0)P0 + [2(1-\delta)\tilde a''(0)]^2\} \tag{41}$$

$$D0 = \Sigma(0) - fR(0), \quad P0 = \tilde a''(0) + (2-\delta)\delta\tilde a(0) \tag{42}$$

以 $R(0)$ 和 $\tilde a(0)$ 为未知量进行双参数打靶，取典型参数值 ($f=0.01$, $D^*=1\,000$) 进行计算并与动态结果 ($M=0.001$) 作对比，图 4 为 $\beta=0.75$ 时的结果. 通过比较可知，两者吻合得非常好，并且结果中均不含弹性卸载区. 这表明对于本文采用的弹黏塑性模型及黏性假设，当马赫数 $M\to0$ 时，动态解能够还原为准静态解.

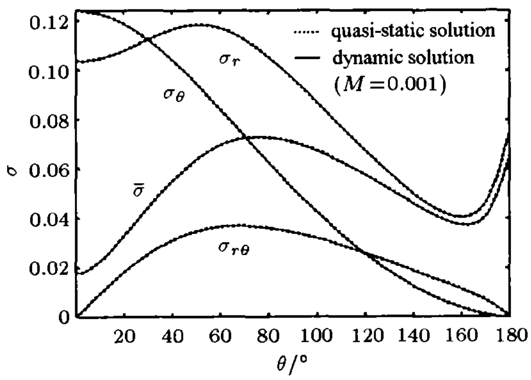

图 4 准静态解与 $M\to0$ 的动态解的比较

Fig.4 Comparison of quasi-static solution with dynamic solution when $M\to0$

进一步考虑当硬化系数 $f=0$ 时，即可退化为 Hui 和 Riedel[13] 的模型. 此时本构方程式成为

$$\dot\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\dot S_{\alpha\beta}}{2\mu} + \frac32\left(\frac{2}{3C}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\bar\sigma^{\left(\frac{1}{1-\beta}-1\right)}S_{\alpha\beta}, \quad \alpha,\beta = r,\theta \tag{43}$$

而在文献 [13] 中，平面应变 I 型裂纹问题的本构方程为

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{\dot{S}_{ij}}{2G}+\frac{3}{2}B\sigma_e^{n-1}S_{ij}, \quad i,j=r,\theta \tag{44}$$

式中 G 为剪切模量， σ_e 为等效应力，分别对应于本文中的 μ 和 $\bar{\sigma}$. 比较以上两式可见，如果取

$$B=\left(\frac{2}{3C}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad \beta=1-\frac{1}{n} \tag{45}$$

则这两个方程是相同的，两者应该有一致的结果.

首先从理论上分析，可以得到这样的结论：在文献 [13] 中，当 $n<3$ 时，弹性应变量级高于塑性应变，裂尖场为弹性场，而 $n<3$ 对应于本文中的 $\beta<2/3$, 此时裂尖场也为弹性场; 当 $3<n<\infty$ 时，弹性应变与塑性应变共同主导裂尖场，而 $3<n<\infty$ 恰对应于本文中的 $2/3<\beta<1$, 此时裂尖场也是弹黏塑性场.

数值计算也可以证明两者是一致的，结果如图 5 所示，参数的取值为： $f=0, D^*=1, M=0.001, \beta=0.75$(对应于文献 [13] 中的 $n=4$). 由图 5 可见，两个解完全重合. 因此，当硬化系数 $f=0$ 时，本文的模型可以退化为 Hui 和 Riedel 的解 [13]. 这进一步反映了本模型的正确性及合理性.

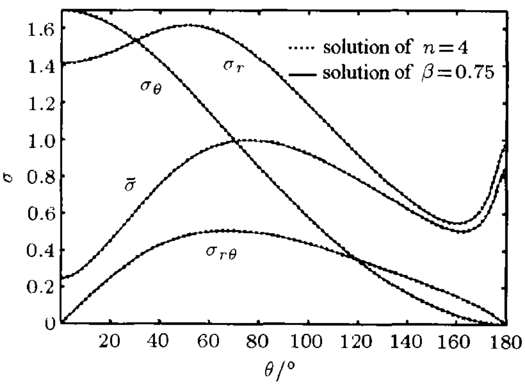

图 5 与 Hui 和 Riedel 的解 [13] 的比较

Fig.5 Comparison of solutions with that of Hui and Riedel[13]

5 结 论

(1) 由于在力学模型中考虑了材料的黏性效应，本文得到的裂纹尖端场是局部自治的，结果中不含必须由远场条件确定的待定参数或系数. 这一点与 Gao 等 [14] 得到的结论是一致的.

(2) 采用弹黏塑性模型，结合合理的黏性假设，通过渐近分析表明在裂纹尖端，应力和应变均具有形如 $r^{-\delta}(0<\delta<1/2)$ 的幂奇异性，奇异性指数 δ 由材料的黏性系数惟一确定.

(3) 对幂硬化材料，当硬化指数为 1，即成为线性硬化材料时，材料的弹性、黏性和塑性在量级上可以得到合理的匹配.

(4) 本文得到的裂尖场是完全连续的，不含有一些无黏性模型中存在的塑性激波.

(5) 对不可压缩条件下的平面应变 I 型裂纹问题，裂尖场完全由黏塑性区构成，不存在弹性卸载区.

(6) 当裂纹扩展的马赫数 $M\to 0$ 时，本文的动态解可以还原为相应的准静态解; 并且当硬化系数为零时，本文的弹黏塑性解能够退化为文献 [13] 中的弹性 —— 非线性黏性解.

(7) 由于黏性的引入，本文的结果具有很多更加合理的特性，这表明黏性是研究扩展裂纹尖端场时的一个重要因素.

参 考 文 献

1 高玉臣，韩斌，黄克智. 扩展裂纹准静态渐近解中的矛盾. 力学学报， 1986, 18 (1): 88~92(Gao Yuchen, Han Bin, Hwang Kehchih. The contradictions in the quasi-static asymptotic solution to a growing crack. *Acta Mechanica Sinica*, 1986, 18(1): 88~92(in Chinese))

2 Gao YC, Nemat-Nasser S. Dynamic fields near a crack tip growing in an elastic-perfectly-plastic material. *Mech of Materials*, 1983, 2 (1): 47~60

3 Gao YC, Nemat-Nasser S. Near-tip dynamic fields for a crack advancing in a power-law elastic-plastic material: mode I, II and III. *Mech of Materials*, 1983, 2 (3): 305~317

4 Gao YC. Asymptotic dynamic solution to the mode I propagating crack tip field. *Int J Frac*, 1985, 29 (4): 171~180

5 Gao YC, Nemat-Nasser S. Mode II dynamic fields near a crack tip growing in an elastic-perfectly-plastic solid. *J Mech Phys Solids*, 1984, 32 (1): 1~19

6 Östlund S. On numerical modeling and fracture criteria of dynamic elastic-viscoplastic crack growth. *Int J Frac*, 1990, 44 (4): 283~299

7 Kumar RK, Narasimhan R, Prabhakar O. Temperature rise in a viscoplastic material during dynamic crack growth. *Int J Frac*, 1990, 48 (1): 23~40

8 Zehnder AT, Rosakis AJ. On the temperature distribution at the vicinity of dynamically propagating cracks in 4340 steel. *J Mech Phys Solids*, 1991, 39 (3): 385~415

9 Gao YC. Uniparameter plastic field near a dynamic crack-tip. *Mech Res Communications*, 1988, 15(5): 307~313

10 Gao YC. Further study on strain singularity behavior of moving cracks in elastic-viscoplastic materials. *Theo Appl Frac Mech*, 1990, 14(3): 233~242

11 李范春，齐辉，周健生. III型动态扩展裂纹尖端场的奇异性研究. 哈尔滨工程大学学报， 1996, 17 (3): 120~126(Li Fanchun,

Qi Hui, Zhou Jiansheng. Viscoplastic field near a propagation crack tip of mode III. *J Harbin Eng Univ*, 1996, 17(3): 120~126 (in Chinese))

12 贾斌, 王振清, 李永东等. 稳恒扩展裂纹尖端的弹黏塑性场. 应用力学学报, 2003, 20(1): 64~69(Jia Bin, Wang Zhenqing, Li Yongdong, et al. The elastic-viscoplastic field of a steady propagating crack tip. *J Appl Mech*, 2003, 20(1): 64~69(in Chinese))

13 Hui CY, Riedel H. The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions. *Int J Frac*, 1981, 17(4): 409~425

14 Gao YC, Wang ZQ. Stress and strain field near tip of mode III growing crack in materials with creep behavior. *Theo Appl Frac Mech*, 1996, 25 (2): 113~126

THE ELASTIC-VISCOPLASTIC FIELD AT MODE I STEADILY PROPAGATING CRACK-TIP

Jia Bin*,1)　Wang Zhenqing†　Li Yongdong**

*(*School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001, *China*)

†(*Architectural Engineering College, Harbin Engineering University, Harbin* 150001, *China*)

**(*Mechanical Engineering Department, Armored Forces Engineering Institute, Beijing* 100072, *China*)

Abstract The viscosity of material is considered at propagating crack-tip. Under the assumption that the artificial viscosity coefficient is in inverse proportion to power law of the plastic strain rate, an elastic-viscoplastic asymptotic analysis is carried out for moving crack-tip fields in power-hardening materials under plane-strain condition. A continuous solution is obtained containing no discontinuities. The variations of numerical solution are discussed for mode I crack according to each parameter. It is shown that stress and strain both possess power law singularity. The elasticity, plasticity and viscosity of material at crack-tip only can be matched reasonably under linear-hardening condition. And the tip field contains no elastic unloading zone for mode I crack. The quasi-static solution is recovered when the crack moving speed approaches zero, which show that the quasi-static solution is a special case of a dynamic one. If the limit case of zero hardening coefficient is further considered, the solution can be transformed to the elastic-nonlinear-viscous one of Hui and Riedel.

Key words quasi-static propagation, dynamic propagation, power hardening, elastic-viscoplastic material, crack-tip field

Received 31 March 2004, revised 9 December 2004.

1) E-mail: jiabin@hit.edu.cn