

悬索非线性动力学中的直接法与离散法¹⁾

赵跃宇²⁾ 王连华 刘伟长 周海兵

(湖南大学土木工程学院, 长沙 410082)

摘要 以悬索为例对结构非线性动力学中直接法与离散法的应用进行了研究. 针对悬索面内运动的第 n 阶模态的主共振, 分别利用这两种方法对悬索的非线性响应进行求解, 得到悬索非线性响应的二次近似解以及相应的幅频响应曲线, 并比较和讨论了这两种方法得到的结果及其差异. 通过分析得知: 离散法在用于非对称结构非线性动力学的求解时可能导致错误的结果.

关键词 直接法, 离散法, 悬索, 非线性响应, 多尺度法

中图分类号: O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2005)03-0329-10

引 言

分布参数结构的动力学是由一组偏微分方程及相应的边界条件所确定. 这些结构的非线性既可出现在偏微分方程中, 也可出现在边界条件中, 或者兼而有之. 结构动力学的主要目的是求解这组方程及相应的边界条件. 一般来说, 分析求解这些结构的非线性响应必须借助各种数值方法. 然而当非线性为弱非线性时, 可以利用各种摄动法得到结构的近似分析解.

从数学的角度上看, 在利用基于 Galerkin 法和摄动法的离散法求解非线性响应时必须用一组完备而且要满足边界条件的基函数, 以构成一完备的 Banach 空间 (通常选用结构的线性模态作为基函数). 然而, 这一点在结构动力学的实际求解过程中做不到, 也没有必要. 因此通常的办法就是只用几个基函数 (线性模态) 对连续系统进行离散, 得到有限维离散模型. 但由此带来的一个问题是这样做的误差有多大? 有没有相反的结论出现? 20 世纪 90 年代, Nayfeh 等^[1] 对这些问题进行了深入研究, 同时建立了基于偏微分方程直接求解的直接法. 这种方法直接对运动方程以及相应的边界条件进行摄动求解, 而不需要进行空间离散, 因此巧妙地解决了离散过程中基函数的选取问题. 后来他们又证明了这种方法与对无穷维 Galerkin 离散模型进行摄动求解得到的结果的一致性^[2,3]. 接着又有很多学者对

有限维 Galerkin 模型的离散法和直接法进行对比研究. Lacarbonara 等^[4] 的研究结果表明对运动方程及边界条件进行直接摄动可以得到和实验相一致的结果, 相反利用有限维 Galerkin 模型的离散法可能导致错误的结果. Rega 等^[5] 同时利用了离散法与直接法研究了悬索的多重共振情形, 他们的结果表明四自由度 Galerkin 模型得到的结果与直接从运动方程进行求解得到的结果不一致, 同时可能得到不同的分岔形式. Rega 等^[6] 对考虑主共振情况下屈曲梁以及悬索的 Galerkin 离散模型的收敛性进行了研究. 他们利用直接法和离散法对这两种结构的主共振响应进行了求解, 结果表明控制参数在一定范围内利用单自由度模型离散法会低估平方非线性的软化作用, 相反多自由度模型可以得到比较精确的结果. 然而取高阶模态时, 单自由度模型的离散法与直接法得到的结果差别不大. 对比 Rega 等^[6] 的结果可以发现这两种方法的应用与模态的选取有很大的关系, 因此有必要重新评估这两种方法在不同模态之间的应用情况. 最近, Arafat 等^[7] 研究了选取的模态数对悬索非线性响应的影响. 尽管进行了不少的研究, 但两种方法得到的误差到底有多大, 仍然没有定性的结论.

由于垂度的存在, 悬索是一种含有平方非线性和立方非线性的典型结构, 本文以这种结构为例, 就分布参数结构中的离散法和直接法应用进行研究. 首先分别利用离散法和直接法对悬索的主共振进行

2003-12-03 收到第 1 稿, 2005-01-28 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10272041).

2) E-mail: yzyhao@hnu.edu.cn

分析, 其中在离散法中只考虑了悬索的单自由度离散模型. 然后比较这两种方法在不同模态以及不同弹性-几何参数^[6]之间的结果差异.

1 基本方程

考虑两端悬挂, 受面内谐波激励 $F(x) \cos \Omega t$ 的弹性悬索, 如图 1 所示, 其中 $F(x)$ 是描述谐波激励面内分布的函数, Ω 是谐波激励的频率. 如果不考虑弯曲、扭转以及剪切, 则悬索非线性面内运动方程可以由下面的偏微分方程来确定^[8]

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial w}{\partial t} - H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{EA}{l} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \cdot \int_0^l \left[\frac{dy}{dx} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = F(x) \cos(\Omega t) \quad (1)$$

其中

$$y = \frac{4b}{l^2} x(l-x), \quad H = \frac{mgl^2}{8b} \quad (2)$$

m 是悬索单位长度的质量, $w(x, t)$ 是 x 处 t 时刻的位移, c 是黏性阻尼系数, b 是悬索的垂度, l 是悬索的跨度, E 是悬索的弹性模量, A 是悬索的横截面积, g 是重力加速度. 另外, 悬索的边界条件可以写成

$$w(x, t) = 0, \quad x = 0, \quad x = l \quad (3)$$

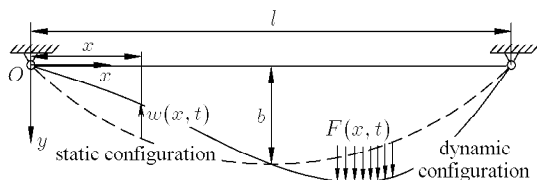


图 1 悬索的几何模型

Fig.1 The suspended cable's configuration

引入无量纲参数

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad w^* = \frac{w}{l}, \quad f = \frac{b}{l}, \quad t^* = \sqrt{\frac{g}{8b}} t \quad (4)$$

则无量纲悬索的面内运动方程可以写成

$$\ddot{w} + 2c\dot{w} - w'' - \alpha(w'' + y'') \cdot \int_0^1 \left(y' w' + \frac{1}{2} w'^2 \right) dx = F(x) \cos(\Omega t) \quad (5)$$

其边界条件相应可以写成

$$w(x, t) = 0, \quad x = 0, \quad x = 1 \quad (6)$$

悬索的无量纲初始变形曲线是

$$y(x) = 4fx(1-x) \quad (7)$$

式 (5)~(7) 中的 “*” 为了书写方便已经省略. 其中 “.” 代表对无量纲时间 t 的导数, 而 “'” 一撇代表对无量纲坐标 x 的导数, 另外

$$\alpha = \frac{EA}{H}, \quad F^* = \frac{lF}{H}, \quad c^* = \sqrt{\frac{8b}{g}} \frac{c}{m}, \quad \Omega^* = \Omega \sqrt{\frac{8b}{g}} \quad (8)$$

振形以及固有频率由下式来确定^[9]

$$\ddot{w} - w'' - \alpha y'' \int_0^1 w' y' dx = 0 \quad (9)$$

$$w = 0, \quad x = 0, \quad x = 1 \quad (10)$$

对称的面内模态是

$$\phi_i = c_i \left[1 - \tan \left(\frac{1}{2} \omega_i \right) \sin \omega_i x - \cos \omega_i x \right] \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 3, 5, \dots \end{array} \right\} \quad (11)$$

其中 c_i 满足正交化条件

$$\int_0^1 \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (12)$$

而 ω_i 由下式来确定

$$\frac{1}{2} \omega_i - \tan \left(\frac{\omega_i}{2} \right) - \frac{1}{2\lambda^2} \omega_i^3 = 0 \quad (13)$$

其中 $\lambda^2 = EA/mgl(8b/l)^3$. 反对称的面内模态以及相应的固有频率由下式来确定

$$\phi_i = \sqrt{2} \sin i\pi x, \quad \omega_i = i\pi, \quad i = 2, 4, 6, \dots \quad (14)$$

图 2 给出了无量纲频率与弹性-几何参数 λ 的曲线图, 其中实线代表对称模态的固有频率, 而虚线代表反对称模态的固有频率. 从图中可以看出对

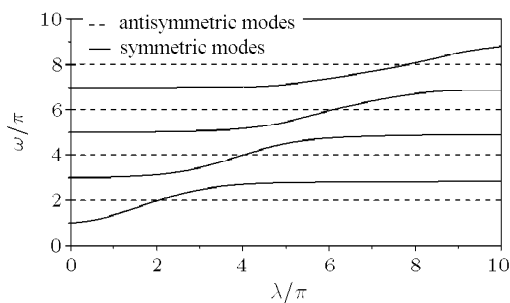


图 2 悬索的无量纲频率

Fig.2 The nondimensional natural frequencies of the suspended cable

称模态的频率与 λ 有很大关系, 而反对称模态的固有频率不随 λ 变化. 实线与虚线相交的点称为横截点. 在此附近, 悬索的模态作用现象非常复杂, 对这些模态作用已进行了很多研究工作, 详细的介绍可以见文献 [6].

2 摄动分析

在本节的研究过程中, 不考虑任何内共振情况, 而只研究第 n 阶模态的主共振情形. 在第 2.1 节中, 首先建立悬索的单自由度离散模型, 然后利用多尺度法进行求解. 在第 2.2 节中, 利用直接法对运动方程以及边界条件直接进行求解.

2.1 离散法

由于考虑单自由度离散模型情况, 所以可以设 $w(x, t) = q_n(t)\phi_n(x)$, 其中 $\phi_n(x)$ 是悬索的第 n 阶模态, $q_n(t)$ 为广义坐标. 对式 (5) 进行 Galerkin 离散之后可以得到

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -2\mu_n \dot{q}_n + A_{nnn} q_n^2 + \Gamma_{nnnn} q_n^3 + f_n \cos(\Omega t) \quad (15)$$

其中

$$A_{nnn} = \int_0^1 \left(\alpha \phi_n'' \int_0^1 \phi_n' y' dx + \frac{1}{2} \alpha y'' \int_0^1 \phi_n' \phi_n' dx \right) \phi_n dx \quad (16)$$

$$\Gamma_{nnnn} = \int_0^1 \frac{1}{2} \alpha \phi_n'' \int_0^1 \phi_n' \phi_n' dx dx \quad (17)$$

$$f_n = \int_0^1 F(x) \phi_n(x) dx, \quad \mu_n = \int_0^1 c(x) \phi_n^2(x) dx \quad (18)$$

对于第 n 阶模态的主共振情形, 可以假设 $\Omega = \omega_n + \varepsilon^2 \sigma$, 其中 σ 为调谐参数. 为了使阻尼效应、非线性和激励全部出现在同阶中, 用 $\varepsilon^2 \mu_n$ 代替 μ_n , $\varepsilon^3 f_n$ 代替 f_n . 为了用多尺度法求二次近似解, 引入时间尺度

$$T_0 = t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (19)$$

因为永年项出现在 $O(\varepsilon^3)$, 方程的解不依赖时间 T_1 . 因此可以设

$$q_n(t; \varepsilon) = \varepsilon q_{1n}(T_0, T_2) + \varepsilon^2 q_{2n}(T_0, T_2) + \varepsilon^3 q_{3n}(T_0, T_2) + \dots \quad (20)$$

把式 (20) 代入式 (15), 并按 ε 的幂次进行整理, 然后利用文献 [10] 中的结果, 可以得到

$$2i\omega(D_2 A_n + \mu_n A_n) = 8\omega_n \tilde{\alpha}_\varepsilon A_n^2 \bar{A}_n + \frac{1}{2} f_n e^{i\sigma T_2} \quad (21)$$

其中 $D_2 = \partial/\partial T_2$, $\bar{A}_n$ 代表 A_n 的共轭, 并且

$$\tilde{\alpha}_\varepsilon = \frac{1}{8\omega_n} \left(\frac{10A_{nnn}^2}{3\omega_n} + 3\Gamma_{nnnn} \right) \quad (22)$$

假设 $A_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\beta_n}$, 代入式 (21), 分离实部与虚部, 可以得到

$$a_n' = -\mu_n a_n + \frac{f_n}{2\omega_n} \sin \gamma \quad (23)$$

$$a_n \beta_n' = -\tilde{\alpha}_\varepsilon a_n^3 - \frac{f_n}{2\omega_n} \cos \gamma \quad (24)$$

其中 $\gamma = \sigma T_2 - \beta_n$. 因此幅频响应曲线可以由下式来确定

$$\sigma = -\tilde{\alpha}_\varepsilon a_n^2 \pm \left(\frac{f_n^2}{4\omega_n^2 a_n^2} - \mu_n^2 \right)^{1/2} \quad (25)$$

相应地, 悬索稳态挠度的二次近似可以写成

$$w(x, t) = \left\{ a_n \cos(\Omega t - \gamma) + \frac{A_{nnn}}{6\omega_n^2} a_n^2 \cdot [3 - \cos 2(\Omega t - \gamma)] + \dots \right\} \phi_n(x) \quad (26)$$

其中, 已经令 ε 等于 1.

2.2 直接法

下面, 直接用多尺度法对偏微分方程以及相应的边界条件进行求解. 设解的形式可以写成

$$w(x, t; \varepsilon) = \varepsilon w_1(x, T_0, T_2) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_2) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_2) + \dots \quad (27)$$

把上式代入式 (5), 并按 ε 的幂次进行整理, 可以得到:

一次幂 ε

$$D_0^2 w_1 - w_1'' - \alpha y'' \int_0^1 w_1' y' dx = 0 \quad (28)$$

二次幂 ε^2

$$D_0^2 w_2 - w_2'' - \alpha y'' \int_0^1 w_2' y' dx = \alpha w_1'' \int_0^1 w_1' y' dx + \frac{1}{2} \alpha y'' \int_0^1 w_1' w_1' dx \quad (29)$$

三次幂 ε^3

$$D_0^2 w_3 - w_3'' - \alpha y'' \int_0^1 w_3' y' dx = -2D_0 D_2 w_1 - 2c D_0 w_1 + \alpha w_1'' \int_0^1 w_2' y' dx + \alpha w_2'' \int_0^1 w_1' y' dx + \alpha y'' \int_0^1 w_1' w_2' dx + \frac{1}{2} \alpha w_1'' \int_0^1 w_1' w_1' dx + F(x) \cos(\Omega t) \quad (30)$$

其中 $D_0 = \partial/\partial T_0$, 另外为了使阻尼效应、非线性和激励全部出现在同阶中, 用 $\varepsilon^2 c$ 代替 c , $\varepsilon^3 F$ 代替 F . 边界条件是

$$x = 0, 1; \quad w_j = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (31)$$

因为不考虑内共振, 故响应中只存在直接激发的模态. 因而在考虑第 n 阶模态的主共振时, 式 (28) 的解可以写成

$$w_1 = A_n(T_2)\phi_n(x)e^{i\omega_n T_0} + cc \quad (32)$$

其中 cc 代表前面项的共轭项, $\phi_n(x)$ 是悬索的第 n 阶模态. 代入方程 (29), 可以得到

$$\begin{aligned} D_0^2 w_2 - w_2'' - \alpha y'' \int_0^1 w_2' y' dx = \\ (A_n^2 e^{2i\omega_n T_0} + A_n \bar{A}_n) \cdot \\ \left(\alpha \phi_n'' \int_0^1 \phi_n' y' dx + \frac{1}{2} \alpha y'' \int_0^1 \phi_n' \phi_n' dx \right) + cc \end{aligned} \quad (33)$$

上式的解可以写成

$$w_2(x, T_0, T_2) = A_n^2 e^{2i\omega_n T_0} \Psi_1(x) + A_n \bar{A}_n \Psi_2(x) + cc \quad (34)$$

其中 $\Psi_1(x)$ 和 $\Psi_2(x)$ 是以下边界值问题的解

$$\begin{aligned} \Psi_1'' + \alpha y'' \int_0^1 \Psi_1' y' dx + 4\omega_n^2 = \alpha \phi_n'' \int_0^1 \phi_n' y' dx + \\ \frac{1}{2} \alpha y'' \int_0^1 \phi_n' \phi_n' dx \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2'' + \alpha y'' \int_0^1 \Psi_2' y' dx = \alpha \phi_n'' \int_0^1 \phi_n' y' dx + \\ \frac{1}{2} \alpha y'' \int_0^1 \phi_n' \phi_n' dx \end{aligned} \quad (36)$$

$$x = 0, 1; \quad \Psi_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (37)$$

把式 (32) 和式 (34) 代入式 (30), 可以得到

$$\begin{aligned} D_0^2 w_3 - w_3'' - \alpha y'' \int_0^1 w_3' y' dx = \\ -2i\omega(D_2 A_n + c A_n) e^{i\omega_n T_0} \phi_n + \\ A_n^2 \bar{A}_n \chi(x) e^{i\omega_n T_0} + \\ \frac{1}{2} F(x) e^{i(\omega_n T_0 + \sigma T_2)} + cc + NST \end{aligned} \quad (38)$$

其中 NST 代表不产生永年项的多项式, 并且

$$\begin{aligned} \chi(x) = \alpha \Psi_1'' \int_0^1 \phi_n' y' dx + \alpha \phi_n'' \int_0^1 \Psi_1' y' dx + \\ \alpha y'' \int_0^1 \Psi_1' \phi_n' dx + 2\alpha \Psi_2'' \int_0^1 \phi_n' y' dx + \\ 2\alpha \phi_n'' \int_0^1 \Psi_2' y' dx + 2\alpha y'' \int_0^1 \Psi_2' \phi_n' dx + \\ \frac{3}{2} \alpha \phi_n'' \int_0^1 \phi_n' \phi_n' dx \end{aligned} \quad (39)$$

由正交化条件^[8]可以得到以下的可解化条件

$$2i\omega(D_2 A_n + \mu_n A_n) = 8\omega\alpha_\epsilon A_n^2 \bar{A}_n + \frac{1}{2} f_n e^{i\sigma T_2} \quad (40)$$

上式中的 f_n 和 μ_n 的表达式和式 (18) 一致, 另外

$$\alpha_\epsilon = \frac{1}{8\omega} \int_0^1 \phi_n(x) \chi(x) dx \quad (41)$$

因此平均方程以及幅频响应曲线同 Galerkin 离散法得到的平均方程以及幅频响应曲线具有相同的形式, 只需要用 $\tilde{\alpha}_\epsilon$ 代替 α_ϵ . 从上面的推导过程, 可以看出幅频曲线的性质完全由 $\tilde{\alpha}_\epsilon(\alpha_\epsilon)$ 来确定, 因此为了研究的方便, 可以把它定义为“有效非线性系数” (effective nonlinearity coefficient^[6]). 而悬索的稳态挠度可以写成

$$\begin{aligned} w(x, t) = a_n \cos(\Omega t - \gamma) \phi_n(x) + \\ \frac{1}{2} a_n^2 [\cos 2(\Omega t - \gamma) \Psi_1(x) + \Psi_2(x)] + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

同理, 上式中已经令 ε 等于 1. 对比式 (26) 和式 (42) 可以得到, 两者得到的稳态挠度从形式上有很大的差别.

3 数值结果

因为本文没有考虑内共振情况, 所以悬索非线性响应中只存在外激励直接激发的模态 (即发生主共振情况的模态), 而其它模态在阻尼的作用下, 逐渐衰减. 从式 (22) 和式 (41) 可以看出, 有效非线性系数 ($\tilde{\alpha}_\epsilon(\alpha_\epsilon)$) 由激发的模态所确定. 因此, 当外激励激发的模态不同时, 有效非线性系数也随之不同. 下面, 利用上一节的结果研究不同模态和不同弹性-几何参数对悬索的有效非线性系数以及幅频响应曲线的影响. 其中研究按对称模态主共振 ($\Omega \approx \omega_n^s$) 和反对称模态主共振 ($\Omega \approx \omega_n^a$) 两种不同情况进行, 这里 ω_n^s 和 ω_n^a 分别表示第 n 阶对称和反对称模态的固有频率.

3.1 对称模态主共振情况 ($\Omega \approx \omega_n^s$)

在不同对称模态主共振情况下, 图 3 给出了有效非线性系数随 λ/π 的变化情况, 其中虚线代表由离散法得到的结果, 实线代表由直接法得到的结果. 图 3(a), 图 3(b), 图 3(c) 分别给出的是最低三阶对称模态主共振的结果. 对于第一阶对称模态主共振情况, 从图 3(a) 中可以看出当 $\lambda < 3.5\pi$ 时, 由离散法和直接法得到的结果差不多, 两条曲线非常接近, 同时两种方法得到的有效非线性系数都大于零. 因此由有效非线性系数确定的幅频响应曲线呈现软弹簧性质. 当 $\lambda > 3.5\pi$ 时, 有效非线性系数随着 λ 的增大而减小, 因此, 幅频响应曲线有硬化的趋势. 最终当 $\lambda > 3.8\pi$ 时, 由两种方法得到的幅频响应曲线都呈硬弹簧性质, 但是由两种方法得到的有效非线性系数差别越来越大. 在 $\lambda > 5.5\pi$ 时, 两种方法得

到的有效非线性系数有了本质上的区别, 此时由直接法得到的有效非线性系数由负值转变为正值, 而离散法得到的有效非线性系数仍然保持为负值. 因此, 由两种方法得到的幅频响应曲线在性质上也有了本质区别: 由离散法得到的幅频响应曲线呈硬弹簧性质, 相反由直接法得到的幅频响应曲线呈软弹簧性质. 这里必须指出的一点就是当 λ (或垂度) 逐渐减小时, 水平张力 H (见式 (2)) 却随之迅速增大. 当 λ (或垂度) 接近零时, 水平张力将会趋向无穷, 所以很难确定此时的有效非线性系数. 本文以 $\lambda = 0.0001$ 来代替张拉弦的情形, 而对于张拉弦的情况可以参考文献 [10]. 此时实际上并不存在平方非线性项, 因此两者得到的有效非线性系数完全一致. 另外从图 3(a) 中还可以看出, 当 λ 接近于零时, 两种方法得到的非线性系数为负值, 因此得到的幅频曲线都

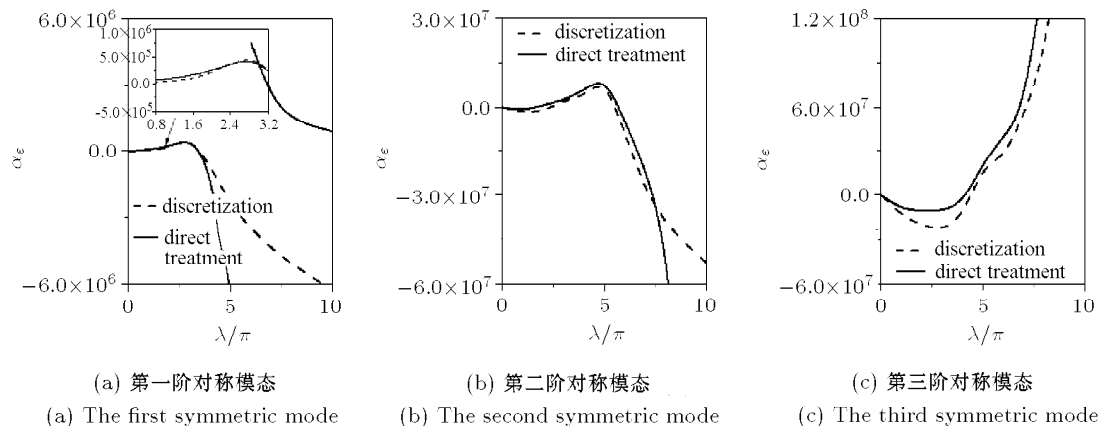


图 3 悬索的有效非线性系数

Fig.3 The effective nonlinearity coefficients

呈硬弹簧性质.

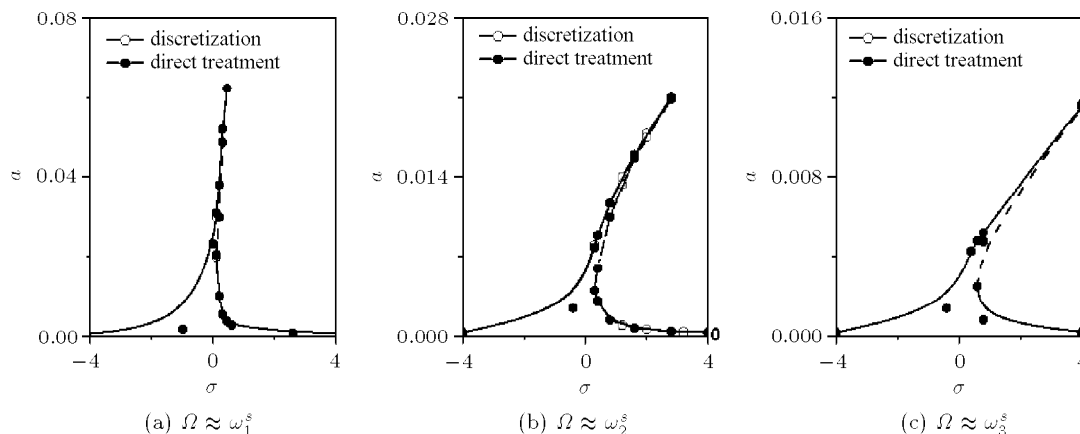
当 λ 较大时 ($\lambda > 10\pi$), 悬索已经属于松弛索的范畴, 不能再以抛物线方程 (见式 (2)) 来模拟悬索的曲线形状 [9]. 因此本文只给出了 $\lambda < 10\pi$ 的情形.

从图 3(b) 可以看出, 两种方法得到的有效非线性系数曲线基本上一致. 随着 λ 的增大, 幅频曲线呈软弹簧的性质, 当 $\lambda > 2\pi$ 时, 幅频曲线有硬化的趋势. 当 $\lambda > 2.2\pi$ 时, 幅频曲线已经呈硬弹簧性质. 而当 $\lambda > 5\pi$ 时, 幅频曲线又有软化的趋势. 由两种方法得到的曲线仅仅当 $\lambda > 7\pi$ 时在量上存在较大的区别. 从图 3(c) 中可以看出当 $\lambda < 4\pi$ 时, 由两种方法得到的幅频曲线都呈硬弹簧性质, 在当 $\lambda > 4.15\pi$ 时, 由两种方法得到的幅频曲线都呈软弹簧性质. 显然只有当弹性-几何参数在一个非常狭窄的区域 ($4\pi < \lambda < 4.15\pi$) 里时, 这两种方法得到的幅频曲线

才存在本质上的区别.

下面, 利用幅频响应曲线来定性说明由直接法与离散法得到的有效非线性系数的差别. 利用 Newton 法对式 (23), (24) 进行求解, 就可以得到悬索的稳态解, 根据这两式摄动项系数行列式的特征值就可以来判断稳态解的稳定性. 依此可以确定悬索在主共振情况下的幅频响应曲线. 在下面的幅频响应曲线中, 实线代表稳定解, 虚线代表不稳定解.

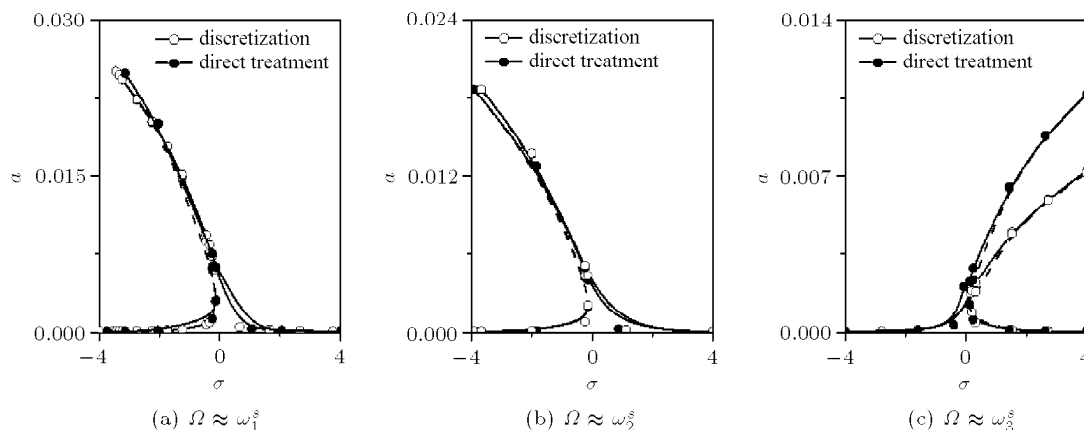
当 $\lambda = 0.05\pi$ 时, 由直接法与离散法得到悬索低阶对称模态主共振情况下的幅频响应曲线如图 4 所示, 其中图 4(a), 图 4(b), 图 4(c) 分别给出的是第一、二和三阶对称模态主共振的结果. 从图 4 可以看出, 对于 λ 很小时不同模态主共振的幅频曲线都呈硬弹簧性质, 值得注意的是, 由两种方法得到幅频响应曲线基本重合, 主要原因是当 λ 很小时, 两

图 4 对称模式主共振情况下的幅频响应曲线 ($\lambda = 0.05\pi$)Fig.4 The frequency-response curves of the suspended cable for the case of primary resonance ($\lambda = 0.05\pi$)

种方法得到有效非线性系数的差别很小 (见图 3). 因此对于 λ (或垂度) 非常小的索结构 (拉索), 可以直接利用 Galerkin 法进行离散求解^[11].

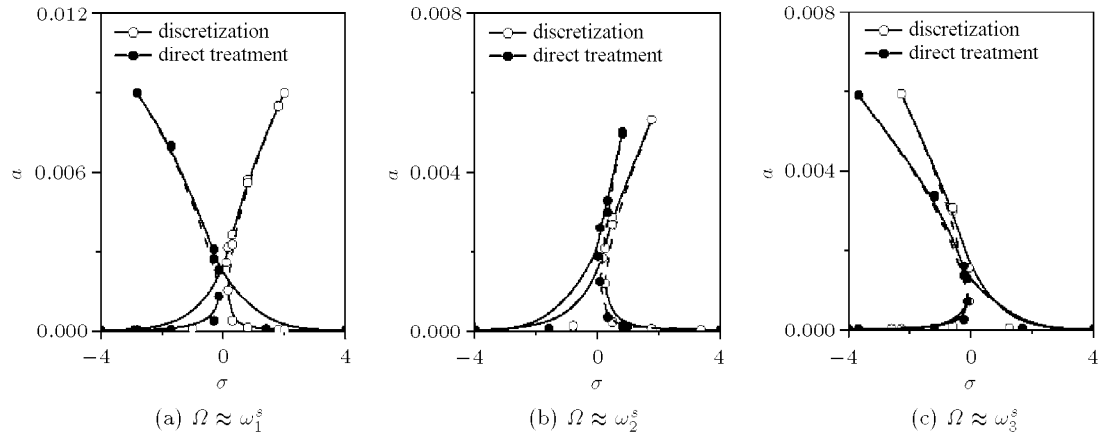
当 $\lambda = 2\pi$ 时, 图 5 给出了由直接法与离散法确定的悬索低阶对称模式主共振情况下的幅频响应曲线, 其中图 5(a), 图 5(b), 图 5(c) 分别给出的是第一、二和三阶对称模式主共振的结果. 对于低阶模式主共振情形, 幅频响应曲线都呈软弹簧性质 (图 5(a), 5(b)), 相反在高阶模式主共振时 (图 5(c)), 幅频响应曲线却都呈硬弹簧性质. 同时用离散法与直接法得到的幅值从数值上看已经有了较大差别,

对照图 3, 主要原因是直接法与离散法得到的有效非线性系数从数值上有比较大的差别. 另外, 鞍结分岔点的位置有了一定的飘移. 在图 5 中, 同时可以看出, 幅频曲线中仅存在鞍结分岔. 而实际上当 $\lambda = 2\pi$ 时, 悬索存在多种内共振情况 (比如: 1:1 内共振和 2:1 内共振), 这方面的介绍可以参考文献 [5]. 此时单模态响应可以通过叉形分岔得到多模态响应或面外响应^[5], 同样的情况也可能发生在拉索情况^[11]. 说明内共振不但可以影响结构的非线性响应, 同时也可以带来很多分岔形式. 因此, 有必要确定结构非线性响应中内共振的情况.

图 5 对称模式主共振情况下的幅频响应曲线 ($\lambda = 2\pi$)Fig.5 The frequency-response curves of the suspended cable for the case of primary resonance ($\lambda = 2\pi$)

当 $\lambda = 6\pi$ 时, 图 6 给出了由直接法与离散法确定的悬索低阶对称模式主共振情况下的幅频响应曲线, 其中图 6(a), 图 6(b), 图 6(c) 分别给出的是第一、二和三阶对称模式主共振的结果. 对于第一阶对称模式主共振情况 ($\Omega \approx \omega_1^s$), 明显可以看出两种

方法得到的幅频响应曲线不但在幅值上存在量的区别, 同时在曲线的性质上也存在本质的区别: 直接法得到的幅频响应曲线呈软弹簧性质, 而离散法得到的幅频响应曲线却呈硬弹簧性质. 主要原因是直接法与离散法得到的有效非线性系数的性质不同.

图 6 对称模态主共振情况下的幅频响应曲线 ($\lambda = 6\pi$)Fig.6 The frequency-response curves of the suspended cable for the case of primary resonance($\lambda = 6\pi$)

3.2 反对称模态主共振情况 ($\Omega \approx \omega_n^a$)

图 7 给出了有效非线性系数在不同反对称模态主共振情况下随 λ/π 的变化情况, 其中虚线代表由离散法得到的结果, 实线代表由直接法得到的结果. 图 7(a), 图 7(b), 图 7(c) 分别给出的是第一、二和三

阶对称模态主共振的结果. 相对对称模态来说, 此时曲线的规律要简单得多. 从图 7 中可以看出, 除了当第一阶反对称模态主共振时, 由直接法得到的结果有一个大的突变之外, 而当其它高阶反称模态主共振时, 有效非线性系数随 λ/π 的增大而减少,

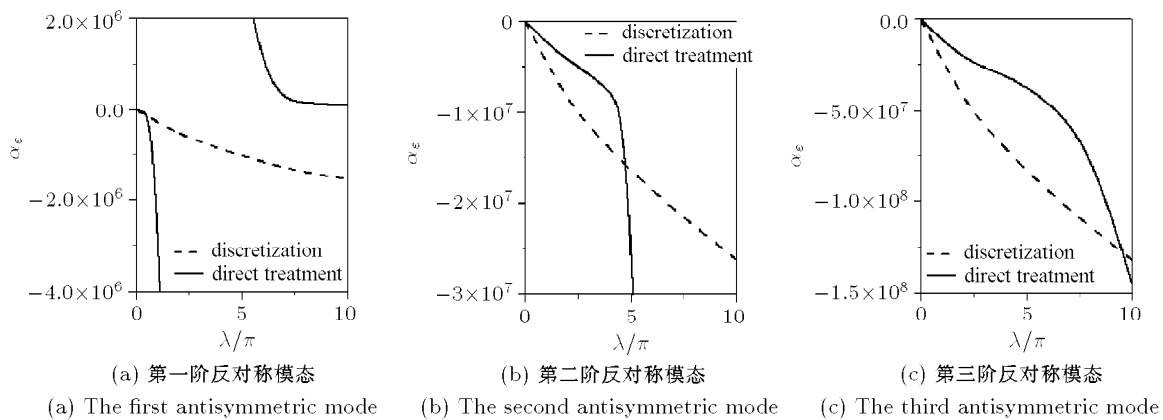


图 7 悬索的有效非线性系数

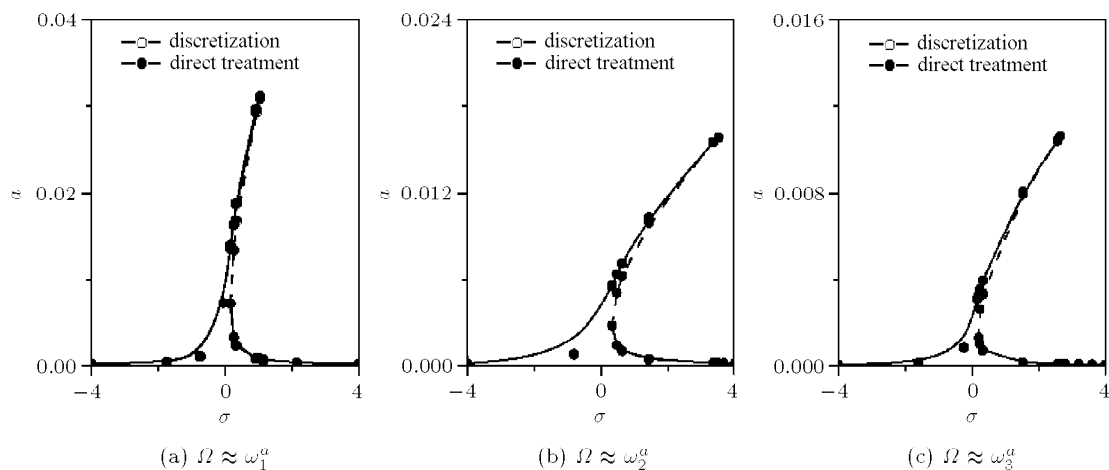
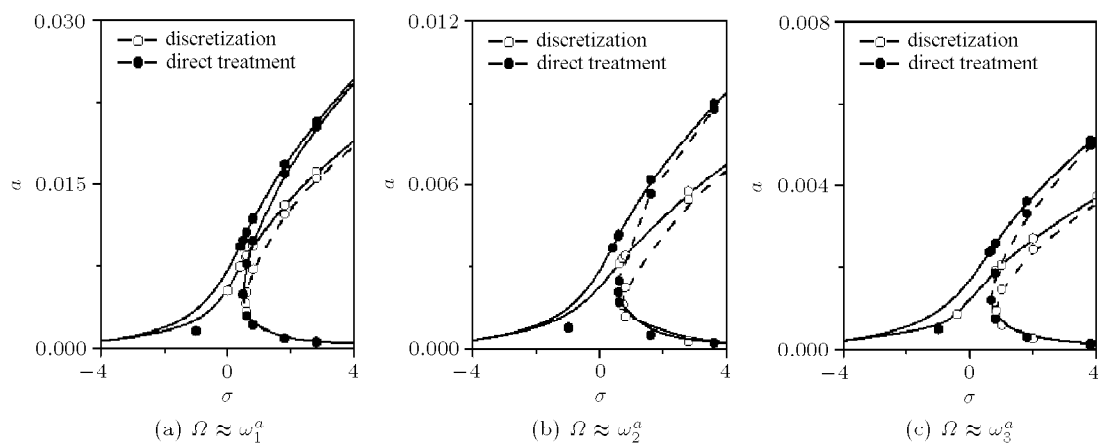
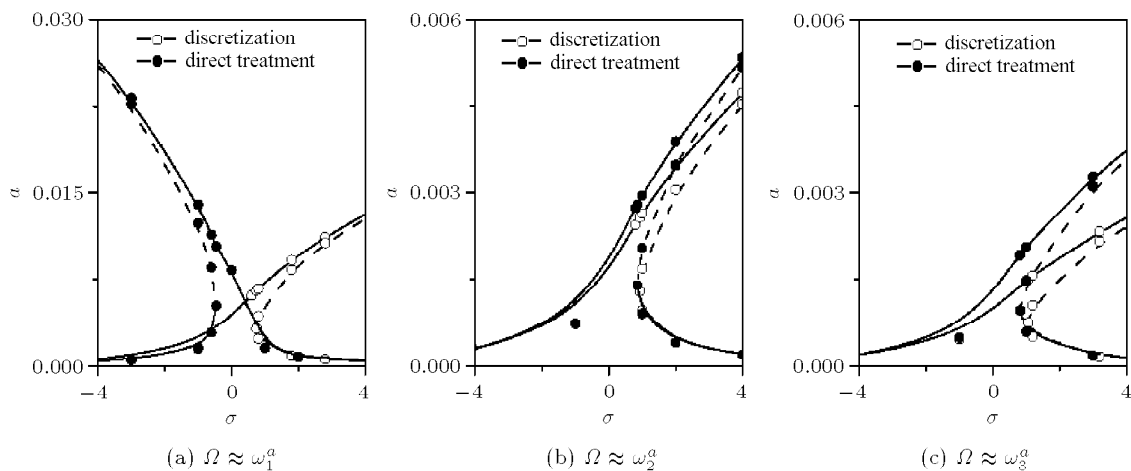
Fig.7 The effective nonlinearity coefficients

同时符号都保持不变.

两种方法得到不同反对称模态主共振情况下的幅频响应曲线相应地在图 8~ 图 10 中给出, 其中实线代表稳定解, 虚线代表不稳定解. 其中图 8 给出了 $\lambda = 0.05\pi$ 时由直接法与离散法得到的悬索的幅频响应曲线. 图 9 给出了 $\lambda = 2\pi$ 时由直接法与离散法得到的悬索的幅频响应曲线. 图 10 给出了 $\lambda = 6\pi$ 时由直接法与离散法得到的悬索的幅频响应曲线. 从这些图中可以看出: 除了当 $\lambda > 4.5\pi$ 时, 由这两

种方法得到在第一阶反对称模态主共振情况下的幅频响应曲线存在性质上的不同; 而在其它情况下, 由这两种方法得到的曲线只存在幅值上的区别.

本文只对悬索单模态离散与直接法进行了对比研究, 两种方法得到系数差别随着平方非线性影响程度以及模态的不同而不同. 当进行多模态离散时, 这种差别会随着模态数的增加而减小 [7]. 当对悬索的无穷维 Galerkin 模型进行离散时, 这种差别将会消失, 详细的数学证明可以参考文献 [3].

图 8 反对称模态主共振情况下的幅频响应曲线 ($\lambda = 0.05\pi$)Fig.8 The frequency-response curves of the suspended cable in the case of primary resonance($\lambda = 0.05\pi$)图 9 反对称模态主共振情况下的幅频响应曲线 ($\lambda = 2\pi$)Fig.9 The frequency-response curves of the suspended cable for the case of primary resonance ($\lambda = 2\pi$)图 10 反对称模态主共振情况下的幅频响应曲线 ($\lambda = 6\pi$)Fig.10 The frequency-response curves of the suspended cable for the case of primary resonance ($\lambda = 6\pi$)

4 结 论

本文对分布参数结构非线性动力学中离散法以及直接法的应用进行了研究. 作为例子, 分别利用这两种方法对悬索的非线性响应进行了求解, 在离散法中, 利用多尺度法对 Galerkin 的一维离散模型进行摄动求解. 而在第 2 种方法中, 直接利用摄动法对运动方程和边界条件进行了求解. 分别得到了二次近似情况下悬索的稳态挠度. 最后利用数值结果对两种处理方法进行了对比研究. 从本文的研究中, 可以得到以下结论.

(1) 利用这两种方法得到的有效非线性系数不但有量的差别, 同时也可能符号相反, 因此导致幅频曲线的硬软性质不同;

(2) 对垂度非常小 (平方非线性非常弱) 的情况, 两种方法得到的结果非常接近. 因此可以直接用 Galerkin 法进行离散^[11];

(3) 平方非线性对低阶模态的影响比对高阶模态的影响要大很多;

(4) 由结构初始形状引起的平方非线性对幅频响应曲线起软化作用, 相反由结构伸长引起的立方非线性起硬化作用. 因此幅频响应曲线的性质最终由这两者的影响来确定.

另外从第 2 部分的数学推导过程中还可以得知: 平方非线性导致了两种方法得到不同的结果. 因此, 在对结构进行非线性动力学分析时, 如果结构是对称的 (弦线、梁和板等), 可以利用任何一种方法进行求解, 此时两种方法得到的结果相同; 如果结构是非对称的 (索、拱和壳等), 此时因为存在平方非线性, 就必须利用直接法才能得到比较精确的结果.

参 考 文 献

- 1 Nayfeh AH, Nayfeh SA, Pakdemirli M. On the discretization of weakly nonlinear spatially continuous systems. In: Kliemann W, SriNamachchivaya N, eds. *Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics*, 1995. 175~200
- 2 Lacarbonara W. Direct treatment and discretizations of non-linear spatially continuous systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 221: 849~866
- 3 Pakdemirli M, Boyaci H. Comparison of direct-perturbation methods with discretization-perturbation methods for non-linear vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 186: 837~845
- 4 Lacarbonara W, Nayfeh AH, Kreider W. Experimental validation of reduction methods for weakly nonlinear distributed-parameter systems: analysis of a buckled beam. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 17: 95~117
- 5 Rega G, Lacarbonara W, Nayfeh AH, et al. Multiple resonances in suspended cables: direct versus reduced-order models. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1999, 34: 901~924
- 6 Rega G, Lacarbonara W, Nayfeh AH. Reduction methods for nonlinear vibrations of spatially continuous systems with initial curvature. In: *IUTAM Symposium on Recent Developments in Non-linear Oscillations of Mechanical Systems*, Kluwer Academic Publishers, 2000. 235~246
- 7 Arafat HN, Nayfeh AH. Non-linear responses of suspended cables to primary resonance excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 266: 325~354
- 8 Nayfeh AH. *Non-linear Interactions*. New York: Wiley-Interscience, 2000
- 9 Irvine HM, Caughey TK. The linear theory of free vibrations of a suspended cable. In: *Proceedings of the Royal Society London*, 1974, A341: 299~315
- 10 Nayfeh AH, Mook DT. *Nonlinear Oscillations*. New York: Wiley-Interscience, 1979
- 11 Zhao YY, Wang LH, Chen DL, et al. Nonlinear dynamic analysis of the two-dimensional simplified model of an elastic cable. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 255: 43~59

DIRECT TREATMENT AND DISCRETIZATIONS OF NON-LINEAR DYNAMICS OF SUSPENDED CABLE¹⁾

Zhao Yucyu²⁾ Wang Lianhua Liu Weichang Zhou Haibing
(*College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China*)

Abstract The applications of direct treatment and discretizations of non-linear dynamics are investigated in this paper. These two approaches are applied to attack the primary resonance of the n th mode of suspended cables. These lead to obtain the second order approximate solutions and the associated frequency-response curves. The results obtained with these two approaches are compared. And the differences of these results are discussed. Finally, the results are obtained that the discretization of nonlinear dynamic of non-symmetric structure may lead to erroneous results.

Key words direct treatment, discretizations, cables, nonlinear response, the method of multiple scales

Received 3 December 2003, revised 28 January 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272041).

2) E-mail: yyzhao@hnu.edu.cn