

用格子 Boltzmann 方法模拟流场中 可变形膜的运动¹⁾

祖迎庆 施卫平²⁾

(吉林大学数学科学学院力学与工程科学系, 长春 130012)

摘要 采用格子 Boltzmann 方法模拟可变形膜与周围流体的相互作用. 分析了格子 Boltzmann 方法中的边界处理方法和边界受力的计算方法, 并且用此方法计算流场中可变形膜的受力. 可将离散化后的膜看作一系列的质点, 从而得到膜的动力学方程. 将可变形膜在流场中受到的力引入方程中, 可以计算膜的变形. 求解了几种不同情况下, 膜的形状随时间的变化. 发现, 如果可变形膜非常软或者非常硬, 经过足够长的时间后, 膜的形状会接近一条直线, 即回到初始状态. 模拟过程是二阶精度的.

关键词 格子 Boltzmann 方法, 动量转换法, 可变形膜, 样条函数插值, leap-frog 格式

中图分类号: O357.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2005)02-0164-05

引 言

染布过程中, 布被悬挂在一定的跨度内; 造纸过程中, 纸在一定跨度内传递; 吹笛子时, 膜产生振动. 自然界和生产、生活过程中, 类似的问题非常多. 这类问题都可以抽象成流场中悬挂在一定跨度内的可变形膜的运动. 膜与周围流体之间的相互作用可以引起膜的振动. 这是一个流体与膜的耦合问题. Cyrus 等人^[1] 在对此类问题进行的格子 Boltzmann 方法 (lattice Boltzmann method, LBM) 模拟过程中, 简单地认为离散后的每一段膜近似是一条水平直线. 这样就强制性地曲线边界简化为折线, 明显降低了计算的精度. Li 等人^[2] 也做了这方面的研究, 但并未对边界处理方法做详细介绍. 本文提出了解决此类问题的格子 Boltzmann 方法, 通过在边界上的二阶插值, 提高了计算精度, 模拟过程在时间和空间都具有二阶精度.

1 曲线边界的处理

LB 方程的离散化速度模型为

$$f_{\alpha}(x_i + e_{\alpha}\delta_t, t + \delta_t) - f_{\alpha}(x_i, t) = -\frac{1}{\tau}[f_{\alpha}(x_i, t) - f_{\alpha}^{(eq)}(x_i, t)] \quad (1)$$

其中, 如图 1 所示, e_{α} 是离散速度矢量, $\alpha = 0, 1, \dots, 8$. $f_{\alpha}(x, t)$ 和 $f_{\alpha}^{(eq)}(x, t)$ 分别是与第 α 个方向上的速度 e_{α} 相对应的粒子速度分布函数和平衡态分布函数, δ_t 是时间步长, τ 是无量纲松弛时间.

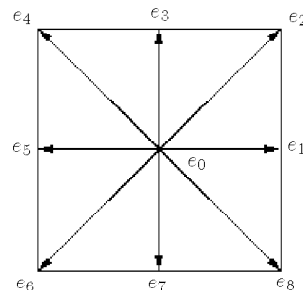


图 1 二维 9 速度 (D2Q9) 模型

Fig.1 Discrete velocity set of two-dimensional nine-velocity (D2Q9) model

LB 方程中的平衡态分布函数 $f_{\alpha}^{(eq)}(x_i, t)$ 可由 Maxwell-Boltzmann 分布函数对速度 u 的二阶 Taylor 展式获得^[3,4], 可表示为

$$f_{\alpha}^{(eq)}(x_i, t) = \omega_{\alpha} \rho \left[1 + \frac{3}{c^2} (e_{\alpha} \cdot u) + \frac{9}{2c^4} (e_{\alpha} \cdot u)^2 - \frac{3}{2c^2} u^2 \right] \quad (2)$$

2004-05-21 收到第 1 稿, 2005-01-18 收到修改稿.

1) 国家重大基础研究前期研究专项 (2002CCA01200), 吉林大学创新基金, 吉林省科技发展计划项目 (国际合作)(20040703-1) 和国家自然科学基金 (10471054) 资助项目.

2) E-mail: shiwp@public.cc.jl.cn

其中, $c \equiv \delta_x / \delta_t$; δ_x 是格子常数, 是相邻节点之间的距离. ω_α 是粒子分布函数的加权系数.

考虑如图 2 所示的任意曲线边界, x_w 是格子之间连线与边界的交点. x_f 是边界附近在流体一侧的节点, x_b 是边界附近在固体一侧的节点. 定义 Δ 为

$$\Delta = \frac{\|x_f - x_w\|}{\|x_f - x_b\|} \quad (3)$$

由图 2 中可以看出 $0 \leq \Delta \leq 1$.

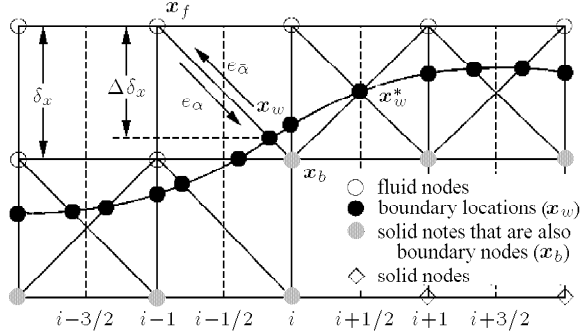


图 2 矩形格子排布与曲线固壁边界

Fig.2 Layout of the regularly spaced lattices and curved wall boundary

将方程 (2) 的计算分为以下两个过程:
碰撞

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\alpha(x_i, t) &= f_\alpha(x_i, t) - \frac{1}{\tau} [f_\alpha(x_i, t) - \\ &f_\alpha^{(\text{eq})}(x_i, t)] \end{aligned} \quad (4a)$$

传递

$$f_\alpha(x_i + e_\alpha \delta_t, t + \delta_t) = \tilde{f}_\alpha(x_i, t) \quad (4b)$$

由此可以看出, 碰撞是局部的, 而传递与周围的点有关. 对于 D2Q9 模型, LBM 方法中任意几何形状的边界处理方法如下: 在边界处, 如图 2 所示, 为了确定 x_f 处的分布函数值, 必须先确定 x_b 点的分布函数值. 在物理上, x_w 必须满足边界条件. 于是, 对式 (4b) 右侧分布函数在边界作 Chapman-Enskog 展开, 并代入边界条件可得

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\alpha(x_b, t) &= (1 - \chi) \tilde{f}_\alpha(x_f, t) + \chi f_\alpha^*(x_b, t) + \\ &2\omega_\alpha \rho \frac{3}{c^2} e_{\bar{\alpha}} \cdot u_w \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} f_\alpha^*(x_b, t) &= \omega_\alpha \rho(x_f, t) \left[1 + \frac{3}{c^2} (e_\alpha \cdot u_{bf}) + \right. \\ &\left. \frac{9}{2c^4} (e_\alpha \cdot u_f)^2 - \frac{3}{2c^2} u_f^2 \right] = f_\alpha^{(\text{eq})}(x_f, t) \\ &+ \omega_\alpha \rho(x_f, t) \frac{3}{c^2} e_\alpha (u_{bf} - u_f) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{bf} &= u_f(x_f + e_{\bar{\alpha}} \delta_t, t) \\ \chi &= \frac{(2\Delta - 1)}{(\tau - 2)}, \quad 0 \leq \Delta < \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{bf} &= \frac{1}{2\Delta} (2\Delta - 3) u_f + \frac{3}{2\Delta} u_w \\ \chi &= \frac{(2\Delta - 1)}{(\tau - 1/2)}, \quad \frac{1}{2} \leq \Delta < 1 \end{aligned} \right\} \quad (7b)$$

式中, $\bar{\alpha}$ 表示与 α 方向相反, $e_{\bar{\alpha}} \equiv -e_\alpha$, u_{bf} 是为了插值引入的虚拟速度, u_f 是位于点 x_f 的值, u_w 是位于点 x_w 的值, χ 为可由 Δ 确定的加权因子.

将式 (6) 代入式 (5) 可得

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\alpha(x_b, t) &= \tilde{f}_\alpha(x_f, t) - \chi [\tilde{f}_\alpha(x_f, t) - f_\alpha^{(\text{eq})}(x_f, t)] + \\ &\omega_\alpha \rho(x_f, t) \frac{3}{c^2} e_\alpha [\chi (u_{bf} - u_f) - 2u_w] \end{aligned} \quad (8)$$

由此, x_b 处所需的分布函数值就完全确定了. 该方法具有二阶精度 [5].

2 计算流体对膜的作用力: 动量转换法

为了计算方便, 作者定义一个二维数组 $w(i, j)$, 规定流体内的节点 $w(i, j) = 0$, 否则 $w(i, j) = 1$.

对于给定的固体内部的边界点 x_b , 一个时间步长内 ($\delta_t = 1$) 与 α 方向上的相邻格子点的动量转换为

$$e_\alpha [\tilde{f}_\alpha(x_b, t) + \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(x_b + e_{\bar{\alpha}} \delta_t, t)] [1 - w(x_b + e_{\bar{\alpha}} \delta_t)] \quad (9)$$

如图 2 所示, 要计算第 i 段边界 (即 $x_{w1} \in [i - 1/2, i + 1/2]$, 其中 x_{w1} 为 x_w 的水平分量) 所受的流体作用力, 只需计算发生在第 i 段边界上的所有粒子碰撞所产生的动量转换的和. 如果碰撞发生在两段边界的相交点, 那么受力要平均分配给这两段边界. 如图 2 所示, x_w^* 点所受的力要平均分配给第 i 段和第 $i + 1$ 段边界. 适当的选择对第 i 段边界的动量转换有贡献的所有 x_b 点, 则第 i 段边界所受的流体应力可表示为

$$\begin{aligned} F_i &= - \sum_{x_b} \sum_{\alpha \neq 0} e_\alpha [\tilde{f}_\alpha(x_b, t) + \tilde{f}_{\bar{\alpha}}(x_b + \\ &e_{\bar{\alpha}} \delta_t, t)] \times [1 - w(x_b + e_{\bar{\alpha}} \delta_t)] \end{aligned} \quad (10)$$

动量转换法计算 F_i 是在碰撞过程完成后进行的, 边界点的 $\tilde{f}_{\bar{\alpha}}$ 的值由式 (8) 给出.

3 膜的离散及其动力学方程

一个可变形膜, 两个端点被固定在流场内. 为计算膜的变形, 如图 3 所示, 将可变形膜离散化, 使得每一段膜的水平长度仍为 δ_x . 可以简单的将每一段膜看作一个质点, 并且与相邻的质点以一定的曲线连结, 那么, 此质点的水平坐标与格子点的水平坐标一致.

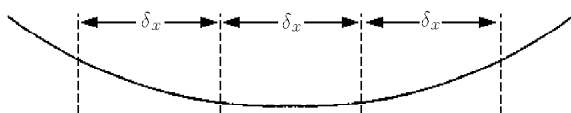


图 3 可变形膜的离散

Fig.3 Discretization of deformable membrane

接下来, 作者对离散后的其中一段膜进行受力分析. 因为膜在水平方向所受到的流体作用力变化不大, 因此忽略膜在水平方向的位移, 认为膜的位移只发生在竖直方向. 如图 4 所示, 张力 T 作用在每一段膜的左右两端, 方向与曲线相切. 左右端点的张力与水平方向的夹角分别为 α_1 和 α_2 . 另外, 在竖直方向, 膜受到流体对它的竖直方向的作用力 F , 这是膜两侧所受到的力的合力, 它的值可由式 (10) 给出. 设张力 T 为一常数, 每单位长度膜的质量为常数 m , 加速度为 a , 竖直方向的位移为 y . 那么, 膜的动力学方程为

$$F\delta_x + T \tan \alpha_2 - T \tan \alpha_1 = \delta_x m a \quad (11)$$

夹角的正切值可由曲线在端点处的空间导数确定, 即

$$\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (12)$$

将式 (12) 代入式 (11) 可得

$$F + T \frac{1}{\delta_x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_2 - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_1 \right) = m a \quad (13)$$

由于 δ_x 足够小, 因此可得膜在竖直方向的加速度表达式

$$a = \frac{F}{m} + \frac{T}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (14)$$

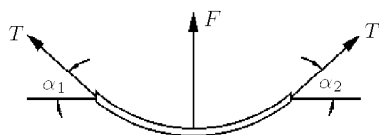


图 4 可变形膜的受力

Fig.4 Forces on a segment of discrete membrane

4 方程的求解

给定膜的初始位移和初速度 u_w 及流场的初、边值条件, 为了较精确地求解可变形膜的位移, 模拟可按如下步骤进行.

(1) 对于固定的膜, 给定膜的速度为零. 计算流体对边界的作用力, 直至得到稳定的流场. 可由整个流场区域 Ω 的 L_2 模的相对变化量 E_2 来确定流场是否达到稳态, 即

$$E_2 = \left[\left(\sum_{\mathbf{x}_i \in \Omega} \|u(\mathbf{x}_i, t+1) - u(\mathbf{x}_i, t)\|^2 \right) / \left(\sum_{\mathbf{x}_i \in \Omega} \|u(\mathbf{x}_i, t+1)\|^2 \right) \right]^{1/2} \leq \varepsilon \quad (15)$$

在计算过程中, 取 $\varepsilon = 10^{-6}$. 流场稳定后, 给定膜的初速度 u_w , 进行第 (2) 步.

(2) 开始计算膜的变形.

1) 将求解膜动力学方程的时间步长 Δt 设为 $\delta_t/100$. 已知膜在 t 时刻的位移 y , 速度 u_w 和由式 (10) 求得的膜所受的力 F , 用 leap-frog 格式^[6,7] 计算 $t + \Delta t$ 时刻的速度和位移

$$u_w \left(t + \frac{1}{2} \Delta t \right) = u_w \left(t - \frac{1}{2} \Delta t \right) + \Delta t a(t) \quad (16)$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t u_w \left(t + \frac{1}{2} \Delta t \right) \quad (17)$$

其中, 加速度 a 可由式 (14) 求得. t 时刻, 膜的速度为

$$u_w(t) = \frac{1}{2} \left[u_w \left(t + \frac{1}{2} \Delta t \right) + u_w \left(t - \frac{1}{2} \Delta t \right) \right] \quad (18)$$

进而, 可以得到 $t + \Delta t$ 时刻膜的速度 $u_w(t + \Delta t)$.

2) 重新计算每个格子点的状态, 即判断是否有格子点由膜的一侧转变到膜的另一侧, 如果有, 那么要重新计算这些格子点的分布函数. 在这里可以用二阶插值近似地得到这些格子点的分布函数.

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = 3f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_n \delta_t) - 3f_\alpha(\mathbf{x} + 2\mathbf{e}_n \delta_t) + f_\alpha(\mathbf{x} + 3\mathbf{e}_n \delta_t) \quad (19)$$

其中, $\mathbf{e}_n$ 为与边界的外法向夹角最小的 $\mathbf{e}_\alpha$ 的值. 这里所说的外法向是指向此格子点一侧的边界法方向.

3) 返回到第 1) 步. 循环 100 次, 即一个格子时间步, 最终求得 $y(t + \delta_t)$ 和 $u_w(t + \delta_t)$.

(3) 求得的 $y(t + \delta_t)$, 只是可变形膜上的一系列离散点的值. 为了求解边界曲线, 可对边界进行三次分段样条函数插值, 得到边界曲线.

(4) 用第 (3) 步求得的边界曲线和 $u_w(t + \delta_t)$ 重新计算流场和流体对边界的应力. 完成后返回到第 (2) 步.

5 算 例

初始时刻, 一条两端固定, 长度 $L = 156\delta_x$, 形状为一直线的膜被水平的放在一个排布 256×256 个节点的流场的中心. 膜的初速度分布由下式给出

$$\frac{dy}{dt} = -0.02 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (20)$$

其中, x 的坐标原点设在膜的左端点. 给定每一段膜的无量纲质量 m 为 137, 流体的密度为 2.7, 黏性系数为 0.008. 流场入口处速度为给定值, 在膜的上下两个边界使用无滑移边界条件. 初始的速度分布使膜离开平衡位置开始振动. 流场在入口处的速度 U 和膜两端的拉力 T 分别取如下数值: (1) $U = 0.1, T = 0.9$; (2) $U = 0.05, T = 0.18$; (3) $U = 0.05, T = 0.18$. 图 5 给出 (1) 情况下, 膜在 4000, 8000, 12000, 16000, 20000 时间步长时的形状. 图 6 为流场的流线图. 图 7(a) 给出 (2) 情况下, 膜在 4000, 12000, 16000, 64000 时间步长时的形状. 图 7(b) 给出 (3) 情况下, 膜在 4000, 8000, 32000, 64000 格子时间步长时的形状. 模拟过程是二阶精度的. 当拉力 T 过小或者过大, 经过足够长的时间后, 膜的形状会接近一条直线. 这个结论可以从图 7 的两个计算结果中显示出来.

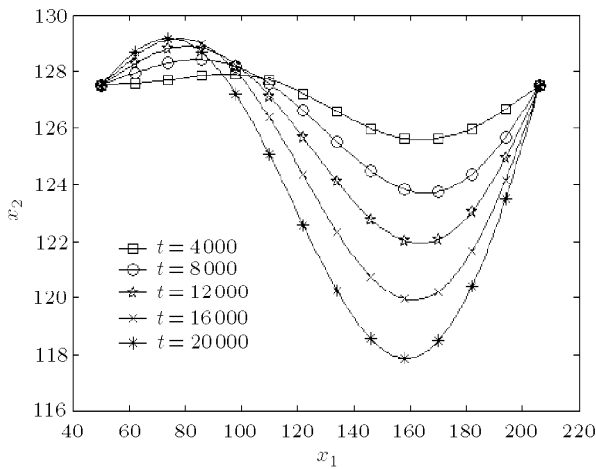


图 5 可变形膜在不同时刻的形状, $U = 0.1, T = 0.9$

Fig.5 The configurations of deformable membrane at different lattice time step, $U = 0.1, T = 0.9$

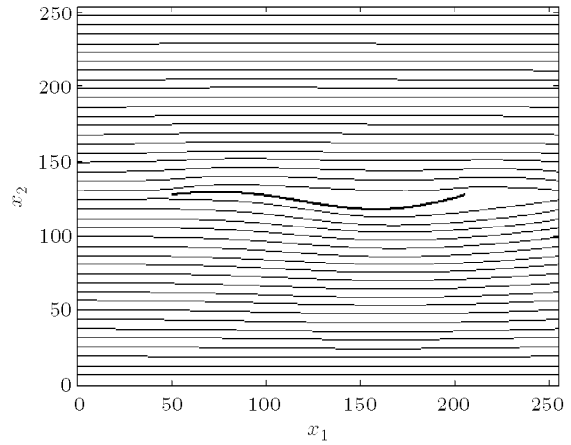
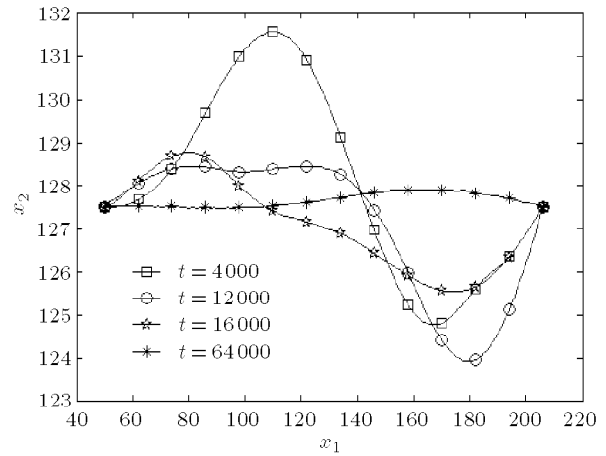
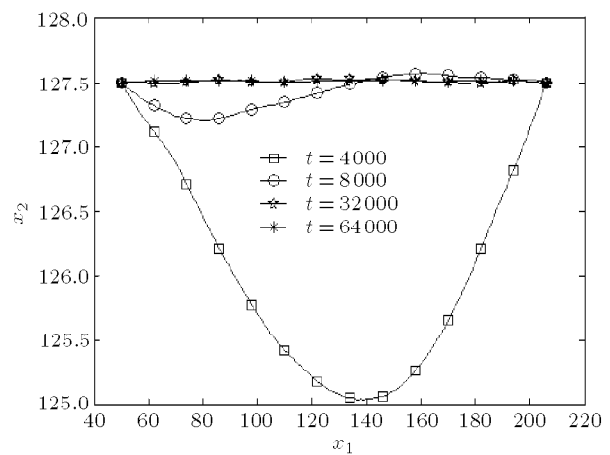


图 6 流线图, $U = 0.1, T = 0.9, t = 20000$

Fig.6 Streamlines, $U = 0.1, T = 0.9, t = 20000$



(a) $U = 0.05, T = 0.18$



(b) $U = 0.05, T = 0.18$

图 7 可变形膜在不同时刻的形状

Fig.7 The configurations of deformable membrane at different lattice time step

6 结 论

采用 LBM 方法计算了流体与可变形膜的相互作用. 两端固定的膜作为流体的一个边界, 它的形状是变化的. 流体与膜的运动相互耦合. 流体的运动用 LBM 方法模拟, 膜的运动用牛顿第二定律的方程来计算. 采用的边界处理方法具有二阶精度. 应用 LBM 方法, 从微观粒子碰撞的观点出发, 计算膜受到的作用力. 这种算法简单、方便. 计算结果与已有结果基本一致. 作者还发现, 如果可变形膜过软或者过硬, 经过足够长的时间后, 膜的形状将会接近一条直线, 即回到初始状态.

参 考 文 献

1 Cyrus KA, Dewei WQ. A new method for analysis of the

fluid interaction with a deformable membrane. *Journal of Statistical Physics*, 1998, 90(1/2): 145~158

2 Li Huabing, Fang Haiping, Lin Zhifang. Lattice Boltzmann simulation of deformable membrane in fluid. *International Journal of Modern Physics B*, 2003, 17(1/2): 149~152

3 He X, Luo LS. A priori derivation of the lattice Boltzmann equation. *Phys Rev E*, 1997, 55: R6333~R6336

4 He X, Luo LS. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Phys Rev E*, 1997, 56: R6811~R6817

5 Mei R, Yu D, Shyy W, et al. Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry. *Phys Rev E*, 2002, 65: 041203~14

6 Verlet L. Computer "experiments" on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules. *Phys Rev*, 1967, 159: 98~103

7 Verlet L. Computer "experiments" on classical fluids. II. Equilibrium correlation functions. *Phys Rev*, 1968, 165: 201~214

LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR SIMULATING THE DISPLACEMENT OF DEFORMABLE MEMBRANE IN FLUID¹⁾

Zu Yingqing Shi Weiping²⁾

(Department of Mechanics and Engineering Science, College of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China)

Abstract A lattice Boltzmann method is employed to simulate the interaction between the deformable membrane and surrounding fluids. The boundary condition and the force exerting on the membrane are handled based on the lattice Boltzmann method. Interaction between the membrane and surrounding fluids may cause the membrane to vibrate. The membrane is discretized into segments. Each segment is simplified to a mass particle and connected to its neighbors. The Newtonian dynamic simulation is applied to each segment. The dynamic equation of the deformable membrane can be simulated according to the force acting on it. The hydrodynamic forces acting on the membrane are obtained by the computation of fluid flow stress at the moving boundary using the lattice Boltzmann momentum-exchange method. It can simulate the curved shape with second-order accuracy. The fluid flow and membrane deformable equations are coupled. The membrane as a moving boundary affects the fluid flow, and the deformation of the membrane is the result of the hydrodynamic force acting on it. In this paper, the configurations of membranes at corresponding time under different conditions are computed. In the numerical test, both ends of the membrane are fixed and its initial shape is set to be a straight line, its initial vibrant velocity normal to the membrane surface is given to be varied at different position. The flow is simulated by the lattice Boltzmann method with second-order accuracy, and the deformation of the membrane is computed using the Newtonian dynamic equation. The results show that the configuration of the membrane is closed to its initial straight line in a sufficient long time if the membrane is relatively soft or stiff, and the results agree well with the other published results.

Key words lattice Boltzmann method, the momentum-exchange method, deformable membrane, spline function interpolation, leap-frog scheme

Received 21 May 2004, revised 18 January 2005.

1) The project supported by the National Key Grant Program of Basic (2002CCA01200), the National Science Foundation of Jilin Province (20040703-1) and the National Natural Science Foundation of China (10471054).

2) E-mail: shiwp@public.cc.jl.cn