

进动圆筒内液体流动不稳定的非线性特征¹⁾

李 磊²⁾ 任业军 蔡 斌 王照林

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 在建立进动充液圆筒内液体偏差流动方程的基础上, 结合液体惯性波和轴向二次流动线性解, 通过对定常二次流动的线性稳定性分析, 提出了函数空间表达的流动不稳定性非线性分岔分析方程. 对非惯性坐标系下液体流动的 Navier-Stokes 方程进行了数值求解, 并对惯性波发生破裂 (实验提供的 3 种主模态下得出的共振破裂现象) 时的压力时间序列进行分析, 得出了液体流动不稳定的基本非线性特征.

关键词 惯性波, 轴向二次流动, 对称破缺分岔, 进动共振失稳, 时间序列分析

中图分类号: O317 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2005)01-0064-09

引 言

研究自旋充液系统内部液体流动不稳定产生的非线性特征十分重要, 是航天自旋稳定式充液卫星飞行姿态控制设计中的重要课题.

自旋充液系统的物理模型可抽象为一个做规则进动的充有液体的容腔. 然后研究不同自旋速率 ω , 进动角速度 Ω , 章动角 δ , 容腔形状尺寸对不同黏度液体运动的影响. 本文选择圆柱型容腔的典型情况进行研究, 且进动轴与自转轴相交于圆筒的中心. 暂不考虑飞行起始段腔内液体的旋转加速期流动 (spin-up flow).

线性理论研究表明, 进动圆筒内液体流动主要有两种: 一个是由 Coriolis 力引起的惯性波振荡; 另一个是沿对称轴向的定常二次流动. 定义 Reynolds 数为 $Re = \rho \omega a^2 / \mu$ (ρ 为液体的密度, μ 为液体的黏度, a 为腔体的半径), 则线性理论就是分别从高 Reynolds 数和低 Reynolds 数起, 求解液体流动. Stewartson^[1] 最早的研究揭示了当腔内液体 (无黏) 惯性波 (inertial wave) 的本征频率与进动频率接近时, 将产生共振不稳定 (破坏了飞行器的陀螺稳定性). 沿着 Stewartson 的思路, 美国 Aberdeen 靶场的一批学者进行了一系列的研究^[2~4], 建立了低黏性 (Reynolds 数从大于 10^5 到 10^3 量级) 液体惯性波求解的线性理论方法以及液体反作用力矩的线性模型. Herbert 等人^[5,6] 则研究高黏性液体 (低 Reynolds 数) 在进动

圆筒内沿对称轴的定常二次流动 (也称偏离流动, deviated flow) 的求解, 包括数值解 (分别应用了有限差分、伪谱方法等) 和解析解, 用于解释转速衰减不稳定 (也导致飞行器丧失陀螺稳定性), 最终使线性理论方法可以适用于 Reynolds 数从 $20 \sim 10^4$ 的范围, 并求得了液体力矩^[7,8]. 这些研究成果经工程实践和充液陀螺实验验证表明, 线性理论可以适用于较大参数范围 (仅对 Reynolds 数而言) 的问题. 李磊、王照林等人应用与推广了线性理论的工作^[9~11].

决定进动圆筒内液体流动特征的参数主要是 Reynolds 数 (或者 Ekman 数)、转速比 (进动角速度与自旋速率之比)、章动角、圆筒的长细比. 对于小 Ekman 数 (定义为 $E = \mu / \rho \omega a^2$) 液体流动情况, Manasseh 通过流动显示实验研究了液体惯性波的内共振失稳问题, 发现当两种振动模态存在一定的组合关系时, 惯性波将出现破裂、间歇破裂和混沌式湍流现象^[12~14]. 而 Kobine 则应用激光 Doppler 测速 (LDV) 技术进行实验, 发现章动角增大到某一值后, 惯性波失稳而周向二次流动出现亚谐波振荡现象^[15,16]. 李磊和王照林等也是从 1990 年代起开始研究自旋充液系统动力学中的非线性问题, 主要应用分岔理论分析二次流动 (高 Reynolds 数) 失稳后的分岔问题^[17].

本文在进动充液圆筒内液体偏差流动方程的基础上, 通过对液体惯性波和轴向二次流动线性解分

2003-05-21 收到第 1 稿, 2004-08-02 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (19702022).

2) E-mail: rocksys@public3.bta.net.cn

析, 提出非线性分岔分析方程. 然后对非惯性坐标系下的液体流动方程进行数值求解, 并对惯性波发生破裂时的压力时间序列进行分析, 得出液体流动不稳定的基本非线性特征.

1 偏差流动的 Navier-Stokes 方程

假设: (1) 圆筒的自转速率和进动角速度不变; (2) 腔内全充满液体; (3) 忽略液体质量力; (4) 随系统飞行的惯性力为零. 从而可得进动坐标系内液体流动的 Navier-Stokes 方程为

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} \quad (1)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_1$ 为进动坐标系相对于惯性系的角速度, 其分量表达式为 $\boldsymbol{\omega}_1 = [\Omega \cos \delta, -\Omega \sin \delta, 0]$, $\mathbf{u}$ 为液体在进动坐标系内的相对速度.

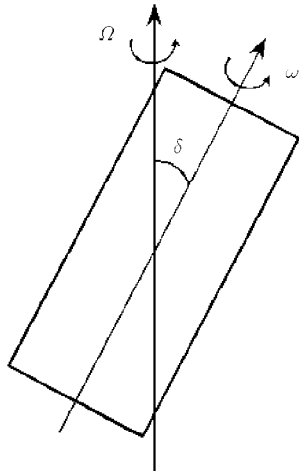


图 1 进动充液圆筒示意图

Fig.1 Sketch map of precessing cylinder filled with liquid

引入参数 $\varepsilon = \Omega \sin \delta / \omega$ 和 Reynolds 数, 并令 $p_n = p - \rho(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r})^2 / 2$, 代入方程 (1) 右端的压力梯度项内. 在柱坐标 $\mathbf{r} = (r, \varphi, x)$ 下表示的液体的刚性旋转流动解为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^r &= (u_r, u_\varphi, u_x) = (0, \omega r, 0) \\ p^r &= \rho[(\omega + \omega_x)^2 r^2 + (\omega_r^2 + \omega_\varphi^2) x^2 + \omega_\varphi^2 r^2 - 2\omega_r \omega_x r x] / 2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

而偏差流动定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^r + \mathbf{v}^d = (v_r, v_\varphi + \omega r, v_x) \\ p &= p^r + p^d \end{aligned}$$

差流为 $\mathbf{v}^d = (v_r, v_\varphi, v_x)$, p^d . 由式 (1) 得到偏差流动的无量纲 Navier-Stokes 方程^[5]

$$\begin{aligned} D'v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} - 2(1 + \tau_x)v_\varphi + 2\tau_\varphi v_x &= -\frac{\partial p^d}{\partial r} + \\ Re^{-1} \left(D''v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) & \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'v_\varphi + \frac{v_\varphi v_r}{r} + 2(1 + \tau_x)v_r - 2\tau_r v_x &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p^d}{\partial \varphi} + \\ Re^{-1} \left(D''v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) & \quad (4) \end{aligned}$$

$$D'v_x + 2\tau_r v_\varphi - 2\tau_\varphi v_r = \frac{\partial p^d}{\partial x} - 2r\tau_r + Re^{-1} D''v_x \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

其中

$$\tau_x = \omega_x / \omega, \quad \tau_r = \omega_r / \omega = -\varepsilon \cos \varphi$$

$$\tau_\varphi = \omega_\varphi / \omega = \varepsilon \sin \varphi$$

$$D' = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_x \frac{\partial}{\partial x}$$

$$D'' = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

其中腔体壁面上的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \text{圆柱侧面:} \quad & \text{法向为 } v_r = 0 \\ & \text{切向为 } v_\varphi = v_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{圆柱上下底面:} \quad & \text{法向为 } v_x = 0 \\ & \text{切向为 } v_r = v_\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7b)$$

方程组 (3)~(7) 还有如下特性:

(1) 当 $\varepsilon = 0$ 时, 方程只有平凡解 $\mathbf{v}^d = \mathbf{0}$, $p^d = 0$, 即没有差流流动, 只有刚性旋转流动.

(2) 方程满足如下对称性条件

$$\left. \begin{aligned} v_r(r, \varphi + \pi, -x) &= v_r(r, \varphi, x) \\ v_\varphi(r, \varphi + \pi, -x) &= v_\varphi(r, \varphi, x) \\ v_x(r, \varphi + \pi, -x) &= -v_x(r, \varphi, x) \\ p^d(r, \varphi + \pi, -x) &= p^d(r, \varphi, x) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(3) 当 $\varepsilon \ll 1$ 时, 方程化为线性化方程 (表达式见方程 (11)) 并具有另一种对称性条件

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}^d(r, \varphi + \pi, x) &= -\mathbf{v}^d(r, \varphi, x) \\ p^d(r, \varphi + \pi, x) &= -p^d(r, \varphi, x) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

与 (8) 比较表明, 方程 (3)~(5) 中的非线性破坏了线性方程的对称性.

2 分岔问题的表述

2.1 经典摄动分析及其两种基本流动的解析解

2.1.1 摄动方程

由液体流动实际情况, Re 的变化范围大, 而参数 $\varepsilon = \Omega \sin \delta / \omega \ll 1$, 是一小参数, 因此经典的摄动法即可按 ε 展开求解. 摄动解设为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}^d &= \sum_{n=1} \varepsilon^n [v_r^{(n)}(t, r, \varphi, x), \\ &\quad v_\varphi^{(n)}(t, r, \varphi, x), v_x^{(n)}(t, r, \varphi, x)] \\ p^d &= \sum_{n=1} \varepsilon^n p^{(n)}(t, r, \varphi, x) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

则代入原方程 (3)~(6), 可得按 ε 各次幂对等的各阶线性偏微分方程. 其中 ε 阶的方程即线性化方程写为

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{v}^{(1)} + \nabla p^{(1)} - \frac{1}{Re} \mathbf{L}_{Re} \mathbf{v}^{(1)} = 2r \cos \varphi \mathbf{e}_x \quad (11)$$

在柱坐标下 $\mathbf{e}_x = (0, 0, 1)$ 为 x 方向的单位向量

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} & -2 & 0 \\ 2 & \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{L}_{Re} = \begin{bmatrix} D'' - \frac{1}{r^2} & -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} & D'' - \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & D'' \end{bmatrix} \quad (13)$$

ε^2 阶的方程为

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(2)}}{\partial t} + \mathbf{L} \mathbf{v}^{(2)} + \nabla p^{(2)} - \frac{1}{Re} \mathbf{L}_{Re} \mathbf{v}^{(2)} = -\mathbf{L}_\varphi \mathbf{v}^{(1)} - (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(1)} \quad (14)$$

$$\mathbf{L}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -\tan^{-1} \delta & 2 \sin \varphi \\ \tan^{-1} \delta & 0 & 2 \cos \varphi \\ -2 \sin \varphi & -2 \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

当然还有 ε^n ($n > 2$) 阶的方程 …….

2.1.2 惯性波解

对于随时间变化解, 取如下模态

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= e^{st+im\varphi} [u(r, x), v(r, x), w(r, x)] \\ p^{(1)} &= e^{st+im\varphi} p(r, x) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

当 $Re \rightarrow \infty$ 时, 可得如下解析解 (即惯性波解)

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[(s+im) \frac{\partial p}{\partial r} + 2im \frac{p}{r} \right] / [4 + (s+im)^2] \\ v &= \left[2 \frac{\partial p}{\partial r} - im(s+im) \frac{p}{r} \right] / [4 + (s+im)^2] \\ w &= -\frac{1}{s+im} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2r \cos \varphi}{s+im} e^{-(st+im\varphi)} \\ p &= \sum_k X_k(x) R_k(r) + 2rx \cos \varphi e^{-(st+im\varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

k 为奇数

$$\left. \begin{aligned} X_k(x) &= \sin \lambda_k x, \quad R_k(r) = J_m(\sigma \lambda_k r) \\ \sigma &= -[4 + (s+im)^2] / (s+im)^2 \\ \lambda_k &= \pi k / 2\eta_A \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中 J_m 为 m 阶 Bessel 函数, $\eta_A = c/a$ 为圆筒的长细比. 以此解为基础, 分别去求 ε^2 阶 $\cdots \varepsilon^n$ 阶的随时间变化解. 一般而言, 此类线性偏微分方程只能应用计算机求得数值解.

2.1.3 定常二次流动解

对于定常解, 可修正式 (10) 为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}^d &= \sum_{n=1} \varepsilon^n [v_r^{(n)}(r, \varphi), v_\varphi^{(n)}(r, \varphi), v_x^{(n)}(r, \varphi)] \\ p^d &= \sum_k \varepsilon^n p^{(n)}(r, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

进一步由对称性条件可知

$$\mathbf{v}^{(n)} = (v_r^{(n)}, v_\varphi^{(n)}, v_x^{(n)}) = \begin{cases} [0, 0, v_x^{(n)}] & n \text{ odd} \\ [v_r^{(n)}, v_\varphi^{(n)}, 0] & n \text{ even} \end{cases}$$

其中各分量的形式为

$$\left. \begin{aligned} v_r^{(n)} &= \sum_{m=1}^{n/2} (u_{nm} e^{i2m\varphi} + \tilde{u}_{nm} e^{-i2m\varphi}) \\ v_\varphi^{(n)} &= v_{n0} + \sum_{m=1}^{n/2} (v_{nm} e^{i2m\varphi} + \tilde{v}_{nm} e^{-i2m\varphi}) \\ v_x^{(n)} &= \sum_{m=1}^{(n+1)/2} (w_{nm} e^{i(2m-1)\varphi} + \tilde{w}_{nm} e^{-i(2m-1)\varphi}) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这里 $(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的共轭.

具体对 ε 阶有边值问题

$$\left. \begin{aligned} r^2 \ddot{w}_{11} + r \dot{w}_{11} - (1 + iRe r^2) w_{11} &= -Re r^3 \\ r = 1, w_{11}(1) = 0; r = 0, w_{11}(0) &\text{有界} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

有解

$$w_{11} = i \left[\frac{I_1(qr)}{I_1(q)} - r \right], \text{ 当 } Re \rightarrow \infty, w_{11} = -ir \quad (22)$$

其中 $q = (1+i)\sqrt{Re/2}$, I_1 为一阶修正 Bessel 函数.

其共轭解为

$$\tilde{w}_{11} = -i \left[\frac{I_1(\tilde{q}r)}{I_1(\tilde{q})} - r \right], \text{ 当 } Re \rightarrow \infty, \tilde{w}_{11} = ir \quad (23)$$

进一步对 ε^2 阶的解, 有结果

$$v_{20} = -2\text{Im}(w_{11}) \quad (24)$$

$\text{Im}(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的虚部. 而 u_{2m}, v_{2m} 需通过求解一变系数非齐次方程得到, 但不易找出解析解, 一般应由数值计算方法来求解.

2.2 偏差流动稳定性分析与分岔问题的表述

由摄动分析得出上述基本流动解之后, 可以对其进行稳定性分析. 设 $\mathbf{V}, P$ 满足 (3)~(6) 偏差流动扰动后的流动, 且

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}^d + \mathbf{v}, \text{ 扰动量 } \mathbf{v} = (u, v, w)$$

$$P = p^d + p, \text{ 扰动量为 } p$$

则由式 (3)~(6) $\mathbf{v}, p$ 满足的微分方程是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\mathbf{L}\mathbf{v} + Re^{-1} \mathbf{L}_{Re} \mathbf{v} - \varepsilon \mathbf{L}_\varepsilon \mathbf{v} - \nabla p - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \text{在腔壁上 } \mathbf{v} &= 0, \text{ 在圆筒中心 } \mathbf{v} \text{ 有界} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中 $\mathbf{L}_\varepsilon = \mathbf{L}_\varphi + \mathbf{L}_{v^d}$

$$\mathbf{L}_{v^d} = \varepsilon^{-1}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_r}{\partial r} + (\mathbf{v}^d \cdot \nabla) & \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{2v_\varphi}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial x} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + (\mathbf{v}^d \cdot \nabla) & \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} & \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\mathbf{v}^d \cdot \nabla) \end{array} \right] \quad (26)$$

该方程包含了扰流的惯性振动、黏性耗散、基本流动与扰流的相互作用、进动角速度与扰流的相互作用、以及扰流的非线性对流作用.

流动稳定性分析通过求解 (25) 的线性谱问题, 并由谱问题的特征值分布来判别线性方程零解的稳定性. 因此可设

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= e^{st+i(m\varphi+\lambda x)} [U(t, r), V(t, r), W(t, r)] \\ p &= e^{st+i(m\varphi+\lambda x)} P(t, r) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

代入式 (25), 线性化后得到相应的线性边值问题.

这里 s 即为特征值, m 为 φ 方向的波数, λ 为 x 方向的波数. 对此问题求解, 可得特征值关系

$$s = F(m, \lambda, Re, \varepsilon) \quad (28)$$

即 s 与波数 m, λ 和参数 Re, ε 的依赖关系, 需要通过数值计算求解. 当其主特征值 s_1 (具有最大实部的特征值) 等于零时, 参数 Re, ε 的值称为临界参数, 记为 Re_L, ε_L . 显然当参数 Re, ε 跨越该临界值时, 特征值 s 实部的符号改变.

对于定常流动式 (22), (23) 可以得到线性稳定性分析的一些结果. 当 $Re^{-1} = 0, \varepsilon = 0$ 时, 得到所有特征值 s 的实部为零, 此时可说定常流动为中心稳定; 当 $Re^{-1} \neq 0, \varepsilon = 0$ 时, 主特征值 s_1 的实部不为零, 且所有 s 的实部均小于零, 表明由于液体黏性的耗散作用, 惯性模态迅速衰减, 定常流动就是渐近稳定的. 当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 主特征值 s_1 的实部大于零, 表明此时有可能致使惯性模态之间产生主共振, 即定常流动出现了依赖于参数变化的不稳定性.

以临界值 (Re_L, ε_L) 为基准, 可引入分岔参数 $\mu_1 = (Re - Re_L)/ReRe_L, \mu_2 = \varepsilon - \varepsilon_L$ 将方程 (25) 变为分岔分析的发展方程. 其中临界值 (Re_L, ε_L) 通过中心稳定的液体流动特征值对应的谱问题求得.

定义物理空间

$$\Omega = \{(r, \varphi, x) |$$

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\eta_A \leq x \leq \eta_A\}$$

并选择空间

$$H = [L^2(\Omega)]^3 = \{(u_1, u_2, u_3) | u_i \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\}$$

其中可定义内积

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\Omega \quad (29)$$

($\cdot$) 表示 ($\cdot$) 的共轭. 这样我们可以在空间 H 内写出分岔方程

$$\frac{dv}{dt} = f_v(Re_L, \varepsilon_L)v - \nabla p + f_v(\mu_1, \mu_2)v + N(v, v) \quad (30)$$

式中 $f_v(Re_L, \varepsilon_L) = -L + Re_L^{-1}L_{Re} - \varepsilon_L L_\varepsilon$ 为线性算子, $f_v(\mu_1, \mu_2) = -\mu_1 L_{Re} - \mu_2 L_\varepsilon$ 为随参数变化的线性算子, $N(v, v) = -(v \cdot \nabla)v$ 是非线性项, 对 v 来说, 它们都定义在 H 的子空间上. v 还要满足不可压缩和边界条件

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot v &= 0, \quad v \in H \\ \text{在腔壁上 } v &= 0, \text{ 在圆筒中心 } v \text{ 有界} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

分岔问题的线性谱问题可表述为:

当 v^d 为定常流动, 有 $v = e^{st}\zeta(r, \varphi, x)$, $p = e^{st}p(r, \varphi, x)$ 及其相应的边值问题.

当 v^d 为以时间周期 T 的流动, 则有 Floquet 表示

$$\begin{bmatrix} v(t, r, \varphi, x) \\ p(t, r, \varphi, x) \end{bmatrix} = e^{st} \begin{bmatrix} \zeta(t, r, \varphi, x) \\ p(t, r, \varphi, x) \end{bmatrix} = e^{st} \begin{bmatrix} v(t+T, r, \varphi, x) \\ p(t+T, r, \varphi, x) \end{bmatrix} \quad (32)$$

及其边值问题, 此处, s 又称为 Floquet 指数.

具体对一阶定常流动 (22) 和 (23) 当 $Re \rightarrow \infty$ 时的解, 即 $w_{11} = -ir$, $\tilde{w}_{11} = ir$, 应用分岔理论中的投影方法 (或称为振幅展开法) 进行了解析分析, 确定了其中心稳定临界点, 并通过分岔分析求出分岔解的解析结果. 其中固定 Reynolds 数, 选择的分岔参数为 $\mu = \mu_2$.

实际上由于解析求解的烦琐和困难, 只得到了 $o(E^2)$ 阶 (振幅的一阶) 解析解, 以及定常流动严格丧失稳定性或分岔点处主特征值实部随分岔参数的变化不为零的条件, 表示为

$$\text{Real} \left\{ \frac{2 \tan^{-1} \delta \sin(\lambda - \tilde{\lambda}^*) \eta_A}{\lambda - \tilde{\lambda}^*}, \int_0^1 [v(r) \tilde{u}^*(r) - u(r) \tilde{v}^*(r)] dr \right\} > 0 \quad (33)$$

其中, $\tilde{u}^*(r)$, $\tilde{v}^*(r)$ 和 $\tilde{\lambda}^*$ 为伴随边值问题的解和波数.

3 液体流动的数值求解

通过摄动法求得的圆筒内液体流动仅仅是两种基本的流动, 所适应的条件是 $\varepsilon \ll 1$, 为一小参数情况, 而且两种解也分别适应与 Re 数很低或很高两种极端情况. 而对于其它更大参数范围时的液体复杂流动, 只能应用数值方法求解.

液体流动的数值求解, 可以根据方程 (1) 在边界条件 (7) 下直接进行求解, 也可以根据方程 (3)~(6) 在边界条件 (7) 下求解偏差流动. 数值实验中需要注意:

(1) 首先给定一个进动角速度和章动角, 置圆筒处于进动坐标系中, 即圆筒内液体已经在做进动运动.

(2) 然后再将圆筒以一定的自转速率进行自转, 即使圆筒内液体在进动坐标系围绕自转轴旋转. 这时圆筒内的液体流动首先进行一种非定常的 spin-up 流动, 经过 spin-up 期后, 液体流动才能达到刚性旋转并伴有相应的偏差流动.

(3) 在进行网格划分时, 应注意圆筒侧壁面和上下底壁面边界层的影响. 边界层的厚度参照线性边界层理论的结果来估计, 即公式 [2]

$$\delta_a = (Re)^{-\frac{1}{2}}(1+i)/\sqrt{2(1-\tau)} \quad (34)$$

$$\delta_c = \frac{-\delta_a}{2\sqrt{1-\tau}} \left[\frac{1+\tau}{\sqrt{3-\tau}} + i \frac{3-\tau}{\sqrt{1+\tau}} \right] \quad (35)$$

式中 δ_a , δ_c 分别代表相对于侧壁和底壁边界层厚度, $i^2 = -1$, $\tau = \Omega/\omega$.

(4) 具体的网格划分采用了非结构化网格技术, 而对于不可压缩流体流动的求解, 采用了 PISO 算法, 当 Re 数很高 (> 1000) 时, 采用标准 $k-\varepsilon$ 湍流模型进行求解.

对于液体流动的扭曲特征, 可以给出 Herbert 算例和流动显示中相同条件下的结果. 图 2 是轴向截面压力分布特征计算结果与 Herbert 的计算和流动显示实验结果进行比较的情况, 算例参数圆筒细长比为 4.368, 自转速率为 3000rpm/min, 进动速度为 500rpm/min, 章动角为 20° , 所充液体的比重为 1000 kg/m^3 , Reynolds 数为 300.

对不同液体黏度、章动角、进动角速度和长细比的液体流动进行数值模拟, 得到的结果是:

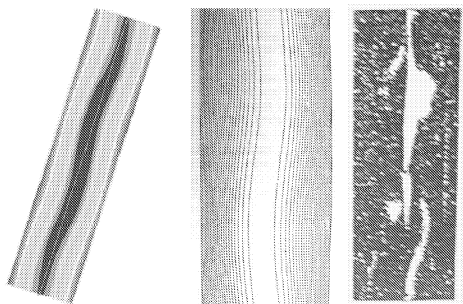


图 2 轴向截面压力分布数值计算结果与 Herbert 计算结果 (半高圆筒) 及其流动显示试验结果的比较

Fig.2 Comparison of simulation result of pressure distribution along axis cross section to the results by Herbert with numerical and flow visualization experiments

(1) 给定转速比和章动角, 随着 Reynolds 数的增大, 液体的扭曲越来越明显, 即随着黏性的降低对称性逐渐改变. 给定转速比和液体黏度, 流动扭曲又随章动角的增大而增强. 这些结果与 Miller 和 Herbert 的试验一致^[18,19].

(2) 这种从对称定常流动演变到对称破缺扭曲流动基本属于定常流动, 其平均速度场和压力场的时间序列基本没有随时间变化的脉动, 流场依赖于 Re , ε 和形状尺寸而变化. 它反映了二次流动与其它波动流动的对称破缺替换现象, 但其分岔点需进一步研究确定.

Manasseh 实验所测得的惯性波破裂, 是一种进动条件圆筒内液体流动的内共振失稳现象. 实验中主要是针对 3 个波数 (1,1,1), (3,1,1) 和 (5,2,1) 下的破裂现象进行观测, 根据强激励 (大章动角)、弱激励 (小章动角) 和长时间间歇变化特征一共分为 7 类. 其中主模态 (1,1,1) 下的 A,B,C 型 3 种破裂现象比较典型. 本文对它们进行了数值模拟. 具体参数为: 圆筒的直径为 90 mm, 高度 120 mm. 液体的 Ekman 数为 $E = 10^{-5}$. 对于 A 型共振破裂, 章动角 $\delta = 3^\circ$, 共振频率 $\tau = 2.72$; 对于 B 型共振破裂, 章动角 $\delta = 0.4^\circ$, 共振频率 $\tau = 2.635$; 对 C 型共振破裂, 章动角 $\delta = 1^\circ$, 共振频率 $\tau = 2.6$. 其中 $\tau = 2(1 + \Omega/\omega)$. 图 3 是 A 型破裂的瞬态三维等涡面 (涡度 = 120, $t = 4.998s \gg \text{spin-up 时间}$) 上的速度矢量场.

图 4 是 A 型、B 型和 C 型其轴向截面平均压力的时间序列 (已经去掉 spin-up 期的记录).

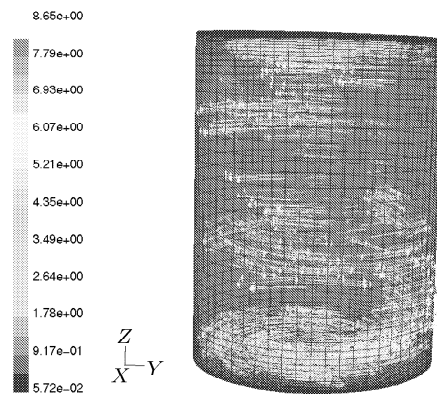
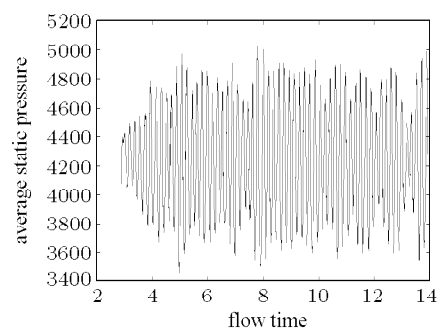
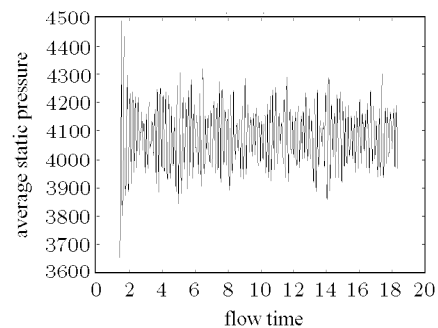


图 3 三维等涡面 (涡度 = 120) 与等涡面上的速度场

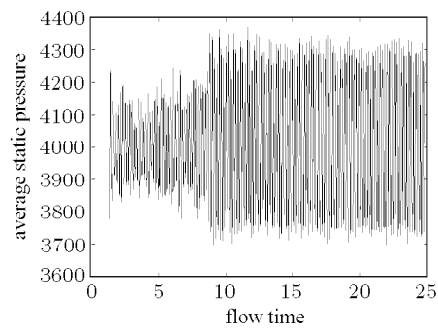
Fig.3 Isosurfaces of vorticity (=120) and velocity fields on them



(a)



(b)



(c)

图 4 A 型, B 型和 C 型惯性波破裂轴向截面平均压力的时间序列

Fig.4 The time series of average pressure along axis cross-section to A,B and C type inertial wave breakdown

由此可知当惯性波破裂时,液体流动是典型的非定常流动,其流动图形极不规则.可以推断在 Miller 的试验^[18]中,对转速比变化出现的不规则流动扭曲,可能就是惯性波共振失稳现象.

4 惯性波破裂主模态的非线性时间序列分析

我们针对上述 A, B, C, 3 种惯性波破裂现象的时间序列进行分析. 分析内容有:

(1) 功率谱分析, 得出惯性波共振破裂现象的定性特征. 图 5 是相应于 3 种时间序列的功率谱图. 图中表明 A 型破裂有谐波和调制频率存在, 也有其它杂波的干扰使整个功率谱拉宽. B 型破裂同样有谐波和调制频率共同存在, 但谱线仅有略微的拉宽特征. C 型破裂有明显的谐波, 但整个谱线均被杂波拉宽.

(2) 选择嵌入维数, 计算最大 Liapunov 指数及其随嵌入维数的变化趋势, 确定嵌入维数. 计算结

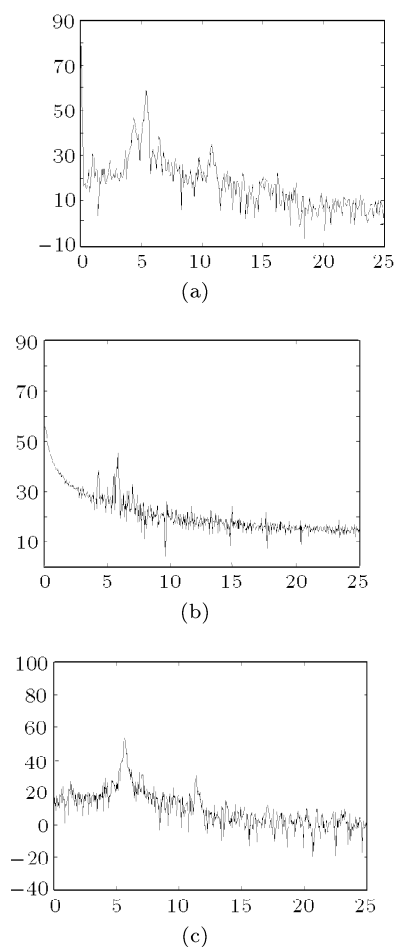


图 5 3 种惯性波共振破裂情况压力时间序列的功率谱图

Fig.5 The power spectral to three types inertial wave breakdown from pressure time series

果表明, 3 种情况都存在正的 Liapunov 指数, C 型破裂为最高. 且在嵌入维数大于一定值时, 基本不再变化. 如 A 型破裂为四维, B 型破裂为七维, C 型破裂为八维.

(3) 重构相空间, 并计算其 Liapunov 指数谱和分数维. 其中结合互信息函数的计算结果, 可以确定最佳的时间滞后量为 12(数据量均大于 5120). 图 6 是三维相空间重构结果. 从它们的相空间轨迹看, 3 种情况都存在周期闭轨, 并围绕闭轨来回振荡. 特别是 C 型破裂明显是两条闭轨. 它们的分数维分别等于 1.39, 1.53 和 1.83, 其 Liapunov 指数谱分别是:

A 型破裂: $(8.836\ 534\ 8\text{E}-05, -7.882\ 793\ 4\text{E}-04, -3.113\ 797\ 9\text{E}-04)$, 属于 $(+, -, -)$ 型;

B 型破裂: $(1.735\ 113\ 0\text{E}-06, 1.789\ 358\ 2\text{E}-04, -1.216\ 430\ 0\text{E}-04)$, 属于 $(+, +, -)$ 型;

C 型破裂: $(3.305\ 091\ 5\text{E}-04, -3.143\ 422\ 9\text{E}-05, -2.388\ 642\ 2\text{E}-04)$, 属于 $(+, -, -)$ 型.

说明 3 种情况都存在依赖于时间变化的奇怪吸引子.

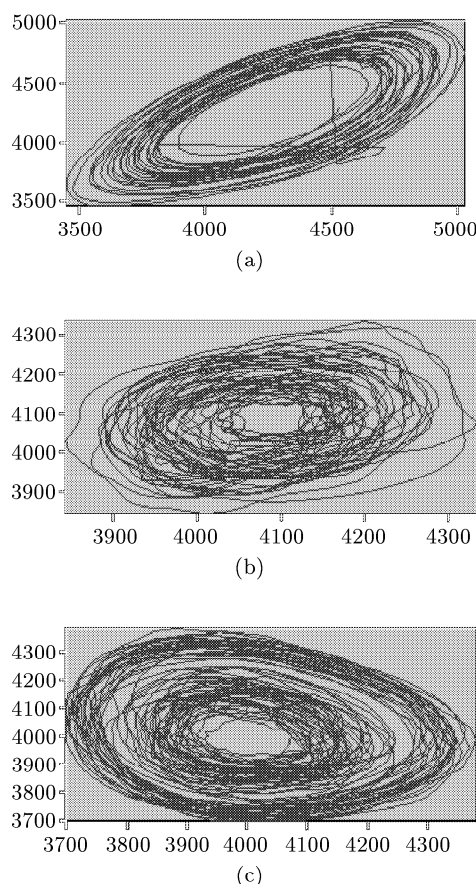


图 6 3 种情况下的三维重构相空间图

Fig.6 The reconstructive phase space maps of three situations

5 结 论

通过本文的研究, 可得如下结论:

(1) 当 Reynolds 数由低向高变化以及 ε 由小到大变化时, 存在一种对称破缺分岔, 即从定常二次流向其它波动流动转变的分岔现象. 但是尚缺少深入的分岔分析.

(2) 对于一定的转速比, 液体的惯性波流动存在一种内共振失稳现象, 即惯性波破裂. 此时液体流动失稳后成为非定常流动, 产生强烈的随时间变化的非线性振荡, 包括亚谐波、概周期解以及混沌式振荡, 有奇怪吸引子存在.

此种惯性波的共振失稳现象, 又称进动共振不稳定, 还需要进行大量的理论与实验相结合的深入研究. 这无论对流动不稳定理论还是在充液飞行器的工程应用上都具有重要意义.

因此, 当惯性波产生内共振失稳时, 需要建立能够反映此种非线性特征的液体力矩模型.

参 考 文 献

- 1 Stewartson K. On the stability of a spinning top containing liquid. *J Fluid Mech*, 1959, 5(4): 577~592
- 2 Karpov BG, Wedemeyer HIE. Engineering Design Handbook, Liquid-Filled Projectile Design. AMC Pamphlet No.706-165. 1969, AD853719
- 3 Murphy CH. Angular motion of a spinning projectile with a viscous liquid payload. *J Guidance and Control*, 1983, 6(4): 280~286
- 4 Hall P, Sedney R, Gerber N. High Reynolds number flows in rotating and nutating cylinder: spatial eigenvalue approach. *AIAA Journal*, 1992, 30(9): 423~430
- 5 Herbert Th, Li RH. Computational study of the flow in a spinning and nutating cylinder. *AIAA Journal*, 1990, 28(9): 1596~1604
- 6 Vaughn HR, Oberkampf WL, Wolfe WP. Fluid motion inside a spinning, nutating, fluid-filled cylinder. *J Fluid Mech*, 1985, 150: 121~138
- 7 Selmi M, Li R, Herbert Th. Eigenfunction expansion of the flow in a spinning and nutating cylinder. *Phys Fluids A*, 1992, 4(9): 1998~2007
- 8 Selmi M, Herbert T. Resonance phenomena in viscous fluids inside partially filled spinning and nutating cylinders. *Phys Fluids A*, 1995, 7(1): 108~120
- 9 王照林, 李磊. 自由液面晃动对旋转充液腔体运动稳定性的影响. 应用力学学报, 1993, 10(3): 9~18 (Wang Zhaolin, Li Lei. Effect of sloshing on free surface to stability of rotating liquid-filled body. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1993, 10(3): 9~18 (in Chinese))
- 10 王照林, 李磊. 章动角对旋转章动充液腔体运动稳定性的影响. 应用力学学报, 1993, 10(4): 1~7 (Wang Zhaolin, Li Lei. Effect of nutation angle on stability of a spinning and nutating cylinder filled with liquid. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1993, 10(4): 1~7 (in Chinese))
- 11 李磊, 王照林. 旋转充液系统中的液体复杂流动研究及其应用. 见: 庄逢甘主编. 现代力学与科技进步. 北京: 清华大学出版社, 1997. 1507~1510 (Li Lei, Wang Zhaolin. Studies and applications of liquid complicated flow in rotating liquid-filled system. In: Zhuang Fenggan ed. *Modern Mechanics and Advances in Science and Technology*. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. 1507~1510 (in Chinese))
- 12 Manasseh R. Breakdown regimes of inertial waves in a precessing cylinder. *J Fluid Mech*, 1992, 243: 261~296
- 13 Manasseh R. Distortions of inertia waves in a rotating fluid cylinder forced near its fundamental mode resonance. *J Fluid Mech*, 1994, 265: 345~370
- 14 Manasseh R. Nonlinear behaviour of contained inertia waves. *J Fluid Mech*, 1996, 315: 151~173
- 15 Kobine JJ. Inertial wave dynamics in a rotating and precessing cylinder. *J Fluid Mech*, 1995, 303: 233~252
- 16 Kobine JJ. Azimuthal flow associated with inertial wave resonance in a precessing cylinder. *J Fluid Mech*, 1996, 319: 387~406
- 17 李磊. 旋转充液复杂系统动力学与稳定性的研究. [博士论文]. 北京: 清华大学工程力学系, 1993 (Li Lei. 'The study on dynamics and stability of rotating liquid-filled complex system. [Ph D Thesis]. Beijing: Tsinghua University, 1993 (in Chinese))
- 18 Miller MC. Void characteristics of liquid filled cylinder undergoing spinning and coning motion. *J Spacecraft and Rockets*, 1981, 18(3): 286~288
- 19 Herbert Th, Pierpond D. Visualization of the flow in a spinning and nutating cylinder. CRDC-SP-86007, 1986

NONLINEAR CHARACTERISTICS OF HYDRODYNAMIC INSTABILITY IN A PRECESSING CYLINDER¹⁾

Li Lei²⁾ Ren Yejun Cai Bin Wang Zhaolin

(*Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

Abstract Based on governing equations of liquid deviated flow in a precessing liquid-filled cylinder, the bifurcation equation in functional space is derived by the linear solutions of liquid inertial wave and axial secondary flow and linear stability analysis of steady secondary flow. Then, the Navier-Stokes equations of liquid flow under non-inertial coordinates are directly solved by numerical methods. When inertial wave breaks down, numerical solutions can also be obtained to reproduce three types resonant breakdown phenomena at primary mode observed in experiments. The nonlinear time series of average pressure by numerical solutions of inertial wave's breakdown are analyzed. Some nonlinear characteristics of hydrodynamic instability can be derived by foregoing analysis.

Key words inertial wave, axial secondary flow, symmetry-breaking bifurcation, precessing resonant instability, analysis of time series

Received 21 May 2003, revised 2 August 2004.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19702022).

2) E-mail: rocksys@public3.bta.net.cn