

弹性体的正则方程和加筋板的固有频率分析¹⁾

卿光辉 邱家俊 塔 娜

(天津大学机械工程学院力学系, 天津 300072)

摘要 应用弹性力学的 Hamilton 正则方程理论和其半解析法, 为整体加筋板的固有频率分析提出了一种新颖的数学模型. 采用同一种平面元素离散板和加强筋, 并分别建立板和加强筋的线性方程组. 考虑到板和加强筋连接界面上应力和位移的连续性, 联立板和加强筋的方程得到全结构的方程组和求解固有频率的特征方程. 主要优越性表现为: 结构的旋转惯性、剪切变形等都得到了考虑, 且不限制结构的板厚度和加强筋的高度. 多个数值实例的收敛分析和结果证明了方法是可靠的. 该方法很容易被修改用来分析加筋壳、加筋压电材料层合板或带有压电材料传感器和驱动器块的板壳问题.

关键词 固有频率, 整体加筋板, 开孔加筋板, Hamilton 正则方程, 半解析法

引 言

Hamilton 系统最早起源于几何光学, 后来在分析力学中得到广泛应用, 其基本思想是把方程正则化, 把欧氏空间问题转化到辛空间来处理. 这种方法以前在连续介质力学中应用很少. 文献 [1,2] 首先把它引入到弹性力学问题中. 文献 [2] 从关于二类变量的 Hellinger-Reissner (H-R) 变分原理推导了弹性力学的 Hamilton 正则方程, 并说明了直接从弹性力学的场方程导出的状态方程^[3,4]与 Hamilton 正则方程是一致的. 文献 [5] 证明了 Hamilton 正则方程在弹性力学里几乎无处不在.

一般来说, 经典动力学的 Hamilton 正则方程受到约束条件的限制, 控制系统的一阶微分方程组受到初始条件的限制, 连续介质力学的 Hamilton 正则方程要满足复杂的边界条件和几何形状是困难的^[6]. 文献 [6] 结合有限元法提出了 Hamiltonian 等参元, 首次为连续介质力学的 Hamilton 正则方程提出了一种半离散半解析的方法, 成功地克服了以上的困难, 文中由于在平面内引进了有限元方法, 该方法适于处理板壳复杂的侧面边界条件问题.

弹性力学中的 Hamilton 正则方程的特征是: 方程中包含二类变量, 即位移和应力. 它与现代控制论的方法是相似的, 偏微分方程被化为一阶的微分方程, 虽然未知量增多, 但这样处理有利于向量与矩阵的代数运算, 在理论与计算机处理上有很大优点. 另一方面, 它在厚板壳和复合材料层合板壳静

力学和动力学问题上的应用非常成功^[2,5~8]. 其优越性在于: 沿板或壳的厚度方向不需引入任何有关位移和应力的假设, 并能考虑到复合材料剪切效应的影响, 同时还保证了层间位移和应力的连续性. 从理论上讲, 传递矩阵方法的引入使得正则方程对板或壳的厚度没有限定, 也正是半解析法与传递矩阵法的结合大大减少了方程的未知量数目.

总之, Hamilton 正则方程有良好的结构对称性, 表达形式有许多优点, 它在连续介质力学中的应用值得探索和开拓^[6]. 唐立民等^[6]给出的半离散半解析的计算方法使得 Hamilton 正则方程有了较为广泛的应用领域. 但是, 就作者目前所知, 弹性力学的 Hamilton 正则方程的应用还局限于上下表面规则的薄壁板壳、厚板壳和复合材料层合板壳的静力学和动力学、裂纹、波的传播等问题.

由加强筋与板组合而成的结构广泛应用于船舶、海洋平台、飞机、土木建筑、水中闸门以及防护工程等结构. 加筋板结构和开孔加筋板结构之所以成为一种十分常见的结构形式, 是因为它们不仅大大提高了结构的承载能力, 而且减少了材料的消耗并减轻了结构的重量. 由于加筋板结构的复杂性, 通常的解析法很难适应分析这类结构的力学行为. 文献 [9,10] 针对前人有关一般的加筋板结构动力学问题的处理方法做了详细的综述. 根据加筋数目和分布位置的不同, 有两种处理方法: 一种是广为人知的“正交异性板壳理论”, 该方法没有突出加筋结

2004-01-09 收到第 1 稿, 2004-08-19 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10072038).

构自然的离散特性, 它将整个结构看作一个平衡系统, 而不去考察加强筋与板之间力的相互作用, 在过去的几十年里, 许多研究者用这种方法对加筋板动态力学行为进行了研究^[11~14]. 但这种方法处理诸如稀加筋、非等间距加筋、非均匀加筋等结构等问题有很大困难; 另一种是“离散模型”, 这种模型适用范围广. “离散模型”方法借助了数值计算, 能方便地处理各类形式的加筋板, 而不只限于均匀等跨加筋, 因此在近十多年里得到了广泛的发展^[15~18]. 总结前人在这方面的的工作, 还可得到另一个一般性的结论: 早期的方法通常忽略了结构的旋转惯性、剪切变形等因素^[19], 并且绝大部分的理论和方法仅适应薄壁加筋板结构^[9,10]. 关于开孔加筋板结构的力学行为的分析方法, 笔者至今还没有查阅到相关文献. 当然, 不论是一般加筋板结构还是开孔加筋板结构, 在现有的有限元方法中总能找到满足工程应用的方法.

本文采用了“离散模型”的思想(分离再合并), 为加筋板类结构提出了一种新的分析方法. 基本步骤是: 1) 先将整体加筋板的加强筋和板分离, 分别应用 Hamilton 正则方程的半解析法构建板和加强筋有关物理量的线性方程组; 2) 考虑到板和加强筋在连接界面上的应力和位移的连续性, 联立板和加强筋的方程; 3) 推导求解全结构固有频率的特征方程. 该方法的主要优越性是: 一方面, 结构的旋转惯性、剪切变形等都得到了考虑; 另一方面, 由于传递矩阵方法的引入, 最终的分析模型对板的厚度和加强筋的高度没有限制.

1 理论公式

有关笛卡尔坐标系下弹性力学 Hamilton 正则方程的推导方法和过程在许多文献^[1,2,5,6]中都有介绍, 所以本文这部分仅以向量和矩阵的形式结合要分析的问题给出主要的表达式.

图 1(a) 是无偏心整体加筋板的简图. 加筋板上

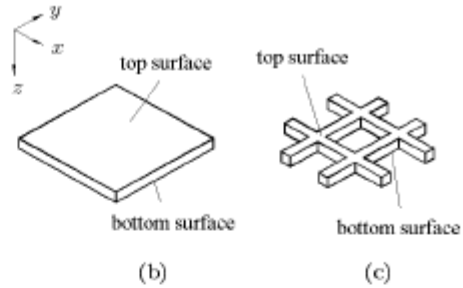
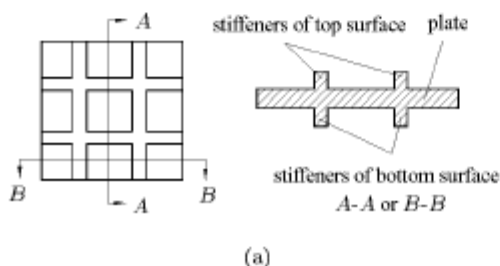


图 1 上下表面均有 4 根加强筋的无偏心整体加筋板

Fig.1 Concentrically stiffened plate with four stiffeners

下表面的加强筋与板分离后的情况如图 1(b) 和图 1(c).

假设板和加强筋材料的本构关系如下

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ (SYM) & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha u \\ \beta v \\ \gamma w \\ \gamma v + \beta w \\ \alpha w + \gamma u \\ \beta u + \alpha v \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中 C_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) 是材料的刚度系数; u , v 和 w 分别为笛卡尔坐标系中 x , y 和 z 方向的位移; 微分操作符 $\alpha = \partial/\partial x$, $\beta = \partial/\partial y$, $\gamma = \partial/\partial z$.

对式 (1) 进行行列变换有

$$\begin{Bmatrix} P \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^T & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

将上式中的 P_2 , D_1 看作未知量求出可得

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (2b)$$

式中

$$\begin{aligned} P &= [\sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_z]^T \\ P_2 &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^T \\ D_1 &= [\alpha w + \gamma u \quad \beta w + \gamma v \quad \gamma w]^T \\ D_2 &= [\alpha u \quad \beta v \quad \beta u + \alpha v]^T \end{aligned}$$

根据文献 [2,6], 如果把 z 坐标模拟成时间, 则可建立修正后的 H-R 变分原理

$$\Pi = \iiint_V (\mathbf{P}^T \dot{\mathbf{Q}} - H) dV - \iint_{s_\sigma} \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{Q} dS - \int_{S_u} \mathbf{T}^T (\mathbf{Q} - \bar{\mathbf{Q}}) dS \quad (3)$$

其中 $\mathbf{Q} = [u \ v \ w]^T$, $\dot{\mathbf{Q}} = \partial \mathbf{Q} / \partial z$, $\bar{\mathbf{T}} = [\bar{T}_x \ \bar{T}_y \ \bar{T}_z]^T$, $\bar{\mathbf{Q}} = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]^T$; H 是 Hamiltonian 函数.

$$H = -\mathbf{P}^T (\mathbf{D}_1 + \Phi_{21}^T \mathbf{D}_2) - \frac{1}{2} \mathbf{D}_2^T \Phi_{22} \mathbf{D}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \Phi_{11} \mathbf{P} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \Omega \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (4)$$

$$\text{其中 } \Omega = \begin{bmatrix} \rho\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\omega^2 \end{bmatrix}.$$

将应变-位移关系写成向量形式, 则有

$$\mathbf{D}_1 = \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}_1 \mathbf{Q}, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{G}_2 \mathbf{Q} \quad (5)$$

$$\text{其中 } \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

将式 (5) 代入式 (4) 有

$$H = -\mathbf{P}^T (\mathbf{G}_1 + \Phi_{21}^T \mathbf{G}_2) \mathbf{Q} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T (\mathbf{G}_2^T \Phi_{22} \mathbf{G}_2 - \Omega) \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{F} + \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \Phi_{11} \mathbf{P}$$

将上式代入式 (3), 以 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 为相互独立的变量, 对式 (3) 进行变分并分部积分可得

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{Q} = [u \ v \ w]^T$, $\mathbf{P} = [\sigma_{xz} \ \sigma_{yz} \ \sigma_z]^T$.

为了述说方便, 这里仅仅讨论板问题. 对应于板上下表面的位移和应力边界条件分别为

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]^T, \quad \mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} = [n_z \sigma_{xz} \ n_z \sigma_{yz} \ n_z \sigma_z]^T$$

对应于板侧面的应力和位移边界条件分别为

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} n_x (C_2 \alpha u + C_3 \beta v - C_1 \sigma_z) + \\ n_y C_6 (\beta u + \alpha v) + n_z \sigma_{xz} \\ n_x C_6 (\beta u + \alpha v) + n_y (C_3 \alpha u + \\ C_4 \beta v - C_5 \sigma_z) + n_z \sigma_{yz} \\ n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]^T$$

显然, 式 (6) 是典型的正则方程 [2,6], 其矩阵形式为

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{G} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}_1 + \Phi_{21}^T \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\beta \\ C_1 \alpha & C_5 \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^T = \Phi_{11} = \begin{bmatrix} C_7 & 0 & 0 \\ 0 & C_8 & 0 \\ 0 & 0 & C_9 \end{bmatrix}$$

$$a = -C_2 \alpha^2 - C_6 \beta^2 - \rho\omega^2, \quad b = -C_4 \beta^2 - C_6 \alpha^2 - \rho\omega^2$$

$$c = -C_3 \alpha \beta - C_6 \beta \alpha$$

$$C_1 = -C_{13}/C_{33}, \quad C_2 = C_{11} - C_{13}^2/C_{33}$$

$$C_3 = C_{12} - C_{13}C_{23}/C_{33}, \quad C_4 = C_{22} - C_{23}^2/C_{33}$$

$$C_5 = -C_{23}/C_{33}, \quad C_6 = C_{66}$$

$$C_7 = 1/C_{33}, \quad C_8 = 1/C_{55}, \quad C_9 = 1/C_{44}$$

不失一般性, 视板为厚板 (图 1(b)), 从分析精度要求出发, 将厚板划分为 n 层 [3,4,6], 并对任意层用 Hamiltonian 等参元 [6] 离散 x - y 平面 (图 2(a)), 场函数和形函数分别为

$$\left. \begin{aligned} u &= [\mathbf{N}(x, y)] \{u(z)\}, & v &= [\mathbf{N}(x, y)] \{v(z)\} \\ w &= [\mathbf{N}(x, y)] \{w(z)\}, & \sigma_{xz} &= [\mathbf{N}(x, y)] \{\sigma_{xz}(z)\} \\ \sigma_{yz} &= [\mathbf{N}(x, y)] \{\sigma_{yz}(z)\}, & \sigma_z &= [\mathbf{N}(x, y)] \{\sigma_z(z)\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\mathbf{N}_i(\xi, \eta) = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)/4 \quad (i = 1, 2, \dots, 4) \quad (9)$$

假设应力边界条件和位移边界条件满足 $\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}$, $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}}$, 将式 (8) 和式 (9) 代入式 (3) 并对其变分, 有单元控制微分方程

$$\mathbf{C}^e \frac{\partial \mathbf{H}^e(z)}{\partial z} = \mathbf{K}^e \mathbf{H}^e(z) \quad (10)$$

interfaces between of plate and stiffeners

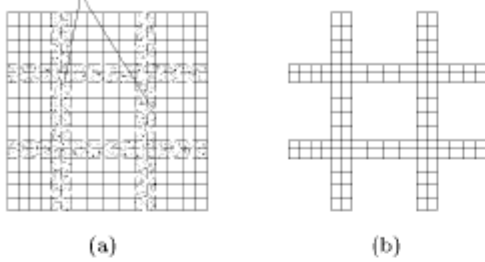


图 2 板和加强筋的单元划分

Fig.2 Element mesh of plate and stiffeners

把一层的全部单元按一般有限元方法组装, 可得到板总的控制微分方程

$$\frac{\partial H_m(z)}{\partial z} = K_m H_m(z) \quad (11)$$

式中下标“ m ”表示第 m 层. 上式的精确解为

$$H_m(z) = T_m(z) H_m(0) \quad (12)$$

一般来说, 方程 (12) 中的 $T_m(z)$ 可表达成 $e^{K_m z}$, 计算 $e^{K_m z}$ 的方法很多 [20]. 实际上, 文献 [20] 所提到多种方法都有其适用范围. 为确保结果的可靠和精确度, 本文采用文献 [5] 附录 A 中提出的两点边值问题的精细积分方法计算 $T_m(z)$.

根据层间的连续关系有

$$H_j(z_j) = H_{j+1}(z_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (13)$$

所以厚板的方程可表达成

$$H_n(z_n) = \left(\prod_{j=1}^n T_j \right) H_1(0) \quad (14)$$

式 (14) 是有关厚板上下表面节点物理量的线性方程组, 矩阵形式如下

$$\begin{Bmatrix} P_n(z_n^p) \\ Q_n(z_n^p) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^p & T_{12}^p \\ T_{21}^p & T_{22}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(0^p) \\ Q_1(0^p) \end{Bmatrix} \quad (15a)$$

式中, 上标“ p ”标识式 (15a) 为加筋板板的方程.

将加强筋 (图 1(c)) 视为板, 并将其划分为 l 层, 加强筋的单元划分 (图 2(b)) 与图 2(a) 中虚线部分完全一致, 节点一一对应, 并保持节点的编号也一致. 假设加强筋端部与板边缘相应部分的边界条件相同 (自由、简支或固支等), 所以加强筋端部与板边缘相应部分的应力边界和位移边界的方法相同. 加强筋的侧面一般是自由边界, 属于已知的应力边界条件. 文献 [21] 中具体地讨论了各种常见边

界条件的处理方法. 就加强筋上下表面的应力和位移边界条件而言, 上部加强筋下表面节点的应力和位移也是板上表面对应节点的应力和位移; 下部加强筋上表面节点的应力和位移也是板下表面对应节点的应力和位移.

对加强筋实施与板相似的过程, 则有

$$\begin{Bmatrix} P_l(z_l^{ts}) \\ Q_l(z_l^{ts}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^{ts} & T_{12}^{ts} \\ T_{21}^{ts} & T_{22}^{ts} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(0^{ts}) \\ Q_1(0^{ts}) \end{Bmatrix} \quad (15b)$$

上标“ ts ”标识方程 (15b) 是上部加强筋的方程, 其下表面节点 i ($i \in k$, k 为节点总数) 的应力和位移与板上表面对应节点的应力和位移的关系为

$$\hat{P}(z^{ts}) = \hat{P}(0^p), \quad \hat{Q}(z^{ts}) = \hat{Q}(0^p)$$

其中 $\hat{P} = [\sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_z]^T$, $\hat{Q} = [u \quad v \quad w]^T$.

$$\begin{Bmatrix} P_l(z_l^{bs}) \\ Q_l(z_l^{bs}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^{bs} & T_{12}^{bs} \\ T_{21}^{bs} & T_{22}^{bs} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(0^{bs}) \\ Q_1(0^{bs}) \end{Bmatrix} \quad (15c)$$

上标“ bs ”标识式 (15c) 是下部加强筋的方程, 其上表面节点 i 的应力和位移与板下表面对应节点的应力和位移的关系为

$$\hat{P}(0^{bs}) = \hat{P}(z^p), \quad \hat{Q}(0^{bs}) = \hat{Q}(z^p)$$

考虑到板和加强筋连接界面上的应力和位移的连续, 联立板和加强筋的线性方程组, 消去连接界面上所有节点共有的应力和位移变量, 有

$$\begin{Bmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

因为这里仅讨论结构的固有频率, 所以结构上下表面的应力列向量 $P(z) = P(0) = 0$.

从方程 (16) 可导出

$$T_{12} Q(0) = 0 \quad (17)$$

要得到方程 (17) 的非零解, 只有令

$$|T_{12}| = 0 \quad (18)$$

通过二分法可求取结构的低阶固有频率. 应该说明的是: 为了提高分析精确度, 分析程序中应引入 $u, v, w, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z$ 的无量纲量.

2 实例分析和讨论

本文采用 Maple[®] 和 Matlab[®] 软件的程序语言和它们优秀的矩阵运算函数实现了上面的数学过程.

实例 1: 该例取自文献 [12] (图 3, 假设周边固支). 材料参数: $E = 68.9 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$, $\rho = 2670 \text{ kg/m}^3$.

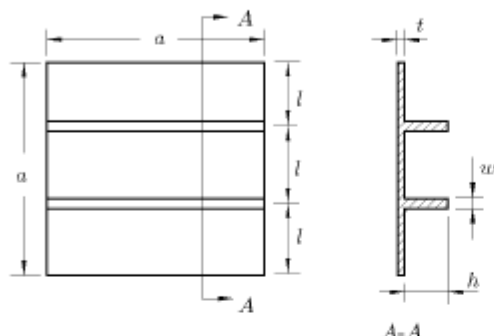


图 3 两根加强筋的偏心加筋板

Fig.3 Eccentrically stiffened plate with double stiffeners

几何参数: $a = 0.2032 \text{ m}$, $l = 0.06773 \text{ m}$, $t = 0.00127 \text{ m}$, $w = 0.02286$, $h = 0.01778 \text{ m}$. 从表 1 中的数值结果可以看出, 随着单元网格密度的增加, 结构前四阶固有频率呈下降趋势. 比较单元密度 $42 \times 42, 1$ 和 $51 \times 51, 1$ 的结果, 两者的误差不到 1%, 所以单元密度 $51 \times 51, 1$ 的结果是可接受的.

表 1 偏心加筋板前四阶固有频率 (Hz) 的收敛情况
Table 1 Convergence of natural frequencies (Hz) for eccentrically stiffened plate with double stiffeners

Element $k \times m$, layer n		Mode sequences			
Plate	Stiffener	1	2	3	4
11×11,1	1×11,8	1020.4	1360.2	1482.8	1679.9
22×22,1	2×22,8	941.5	1234.3	1359.2	1430.1
33×33,1	2×33,8	932.7	1223.1	1334.7	1422.8
42×42,1	2×42,8	931.6	1221.4	1332.6	1410.1
51×51,1	2×51,8	931.5	1220.9	1331.8	1403.3
experimental ^[12]		909	1204	1319	1506
FEM ^[12]		965.3	1272.3	1364.3	1418.1

比较本文单元密度 $51 \times 51, 1$ 的结果和文献 [12] 的结果, 不难发现, 本文的结果介于文献 [12] 中实验结果和有限元法结果之间. 文献 [12] 中实验结果前三阶固有频率低于有限元结果是合理的, 主要原因有二: 不论实验方法多么科学合理, 可以肯定: 实验件周边的固支模拟不可能完全全逼近理论公式 $\bar{Q} = [\bar{u} \ \bar{v} \ \bar{w}]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$; 另一方面, 文献 [12] 中

的有限元方法首先假设板是薄板, 其次它忽略了结构的剪切变形和旋转惯性等因素, 这样势必导致计算结果高于真解. 而本文的方法在板厚度方向上没有任何假设, 计入了壁厚; 同时包含了剪切变形和板及加强筋的旋转惯性等因素, 所以分析结果比文献 [12] 中的有限元结果低. 本文的解介于文献 [12] 中实验结果与有限元法结果之间正反映了它的可靠性.

实例 2: 如图 4 所示, 一中央开有方孔的无偏心的周边固支的加筋板, 假设周边固支. 材料参数: $E = 68.9 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$, $\rho = 2670 \text{ kg/m}^3$. 几何参数: $a = 1.8 \text{ m}$, $b = 0.6 \text{ m}$, $c = 0.2 \text{ m}$, $d = 0.6 \text{ m}$, $f = 0.6 \text{ m}$, $e = 0.2 \text{ m}$, $g = 0.2 \text{ m}$, $t = 0.02 \text{ m}$, $t_1 = 0.02 \text{ m}$.

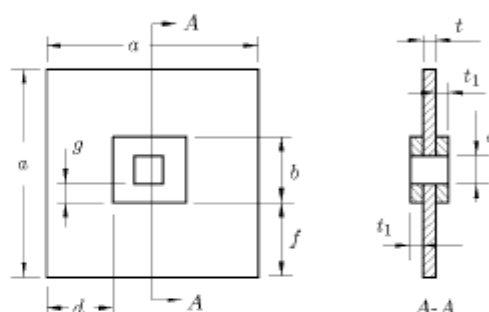


图 4 无偏心开有方孔的加筋板

Fig.4 Concentrically stiffened plate with a square hole

表 2 无偏心开孔整体加筋板前四阶固有频率 (Hz)
Table 2 Convergence of natural frequencies (Hz) for concentrically stiffened plate with a square hole stiffeners

Element $k \times m$, layer n		Mode sequences			
Plate	Stiffener	1	2	3	4
18×18,2	2×6, 2	55.8	112.8	229.5	283.4
36×36,2	4×12, 2	54.4	109.3	217.2	265.1
54×54,2	6×18,2	54.3	108.8	215.2	262.3
72×72,2	8×24,2	54.3	108.6	214.4	261.5

为了划分单元方便, 这里选择方孔作为例子. 实质上, 也可是圆的、椭圆的或其它不规则的孔.

下面分析一个更加复杂的例子.

实例 3: 带有 4 根 T 型加强筋的复合材料三层板 (图 5, 周边固支). 几何参数: $a = 1.2 \text{ m}$; $l = 0.4 \text{ m}$; $t = 0.01 \text{ m}$; $t_1 = 0.02 \text{ m}$; $w = 0.04 \text{ m}$; $t_f = 0.02 \text{ m}$; $b_f = 0.08 \text{ m}$; $h = 0.08 \text{ m}, 0.12 \text{ m}, 0.16 \text{ m}$.

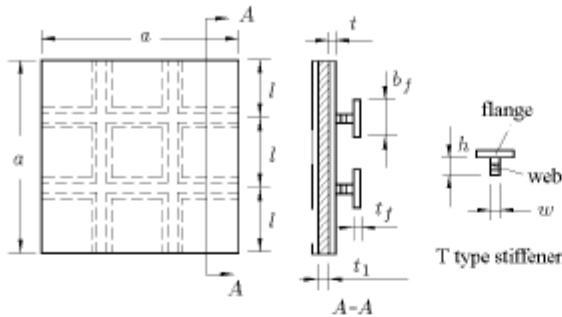


图 5 带有 4 根 T 型加强筋的复合材料层合板
Fig.5 Eccentrically stiffened laminated plate with
four T type stiffeners

材料参数说明：每层均是正交异性的，坐标轴沿主方向，刚度系数比如下^[4]

$C_{22}/C_{11} = 0.543\ 103, \quad C_{12}/C_{11} = 0.233\ 19$

$C_{23}/C_{11} = 0.098\ 276, \quad C_{13}/C_{11} = 0.010\ 776$

$C_{33}/C_{11} = 0.530\ 172, \quad C_{44}/C_{11} = 0.266\ 81$

$C_{55}/C_{11} = 0.159\ 914, \quad C_{66}/C_{11} = 0.262\ 931$

假设复合材料层合板表层的 $C_{11}^1 = 150\text{ GPa}$, $\rho^1 = 1600\text{ kg/m}^3$; C_{11}^2 和 ρ^2 为内层材料的参数. $C_{11}^1/C_{11}^2 = 2, \rho^1/\rho^2 = 2$; T 型加强筋的材料与层合板表层相同. 由于这里是 T 型加强筋, 所以还应把 T 型加强筋作为加筋板子结构来处理, 这是本例变得复杂的原因.

数值结果列于表 3, 结构前三阶固有频率随着加强筋复板的高度增加而增加.

必须指出: 如果加强筋的横截面为矩形, 未知量由板一层的节点数决定. 即通常情况下, 未知量与板的厚度以及矩形加强筋的多少和高度无关, 如例 1 和例 2. 但是, 若加强筋的横截面为 T 型或 Γ 型等情况, 则翼缘侧向伸出部分上的节点将增加分析模型的未知量, 如实例 3.

表 3 带有 4 根 T 型加强筋的复合材料层合板前四阶固有频率 (Hz) 的收敛情况
Table 3 Convergence of natural frequencies (Hz) for eccentrically stiffened laminated plate
with four T type stiffeners

h/m	Element $k \times m$, Layer n			Mode sequences			
	Plate	Web	Flange	1	2	3	4
0.08	32×32, 3	2×32, 8	4×32, 2	810.7	1319.3	1490	1998.4
	44×44, 3	2×44, 8	4×44, 2	809.6	1314.6	1484.4	1988.1
	53×53, 3	2×53, 8	4×53, 2	809.4	1313.9	1481.9	1986.6
	62×62, 3	2×62, 8	4×62, 2	809.3	1313.6	1481.7	1986.2
0.12	32×32, 3	2×32, 12	4×32, 2	956.1	1501.1	1674.5	2207.1
	44×44, 3	2×44, 12	4×44, 2	955.4	1496.6	1669.0	2196.8
	53×53, 3	2×53, 12	4×53, 2	955.6	1495.8	1666.8	2195.9
	62×62, 3	2×62, 12	4×62, 2	955.5	1495.4	1666.3	2195.2
0.16	32×32, 3	2×32, 16	4×32, 2	1073.7	1637.5	1813.3	2141.7
	44×44, 3	2×44, 16	4×44, 2	1072.2	1634.3	1810.4	2135.7
	53×53, 3	2×53, 16	4×53, 2	1072.1	1634.0	1808.2	2131.5
	62×62, 3	2×62, 16	4×62, 2	1072.0	1633.9	1807.9	2131.3

3 结 论

本文根据弹性力学的 Hamilton 正则方程理论提出了一种新的分析整体加筋板固有频率的方法, 拓展了弹性力学正则方程的应用领域. 其优越性是: 1) 一般的有限元方法通常要用到两种元素 (平面元或壳元和梁元) 来处理加筋板问题, 但本文仅用了同一种平面元 (Hamiltonian 等参元) 离散板和加强筋, 简化了处理过程和分析程序的编写. 2) 有限元法中的线性平面元或壳元局限于薄壁板壳或中厚板壳的假设, 本文所用到的 Hamiltonian 等参元无假设限定. 3) 用本文方法分析层合板时, 层数的增加不

会使方程未知量增加. 4) 与过去的一般有限元方法^[19]相比, 本文考虑了结构的旋转惯性、剪切变形等因素.

文献 [8] 在任意曲线坐标系下建立了曲六面体区域的正则方程理论, 很大程度上扩大了连续介质力学中正则方程的适用范围. 但是本文并没有涉及或应用较为复杂的曲六面体区域的正则方程理论, 相反的是在通常的笛卡尔坐标系下, 简单地将正则方程的半解析法与“离散模型”思想结合在一起. 这种简单的方法很有意义和应用价值, 并不缺乏启发性. 以下是作者的一些展望和猜想: 1) 可以肯定, 本文的方法可直接移植到圆柱坐标系或球坐标系中,

为一般的或复合材料加筋圆柱壳或加筋球壳等问题提出相应的分析方法。2) 本文的方法是否为加筋板壳裂纹问题的分析方法的发展带来了一些启示? 3) 文献 [22] 成功地建立了压电材料修正后的 H-R 变分原理, 并证明了相应的正则方程的精确解法是可行的。若压电材料或其它智能材料所对应的正则方程的半解析法得以实现, 则本文的方法是很有意义的。有兴趣的读者可参考文献 [22~24]。

参 考 文 献

- 1 钟万勰. 条形域平面弹性问题和哈密顿体系. 大连理工大学学报, 1991, 31(4): 373~384 (Zhong Wanxie. Plane elasticity problem in strip domain and Hamilton system. *Journal of Dalian University of Technology*, 1991, 31(4): 373~384 (in Chinese))
- 2 唐立民. 弹性力学的混合方程和 Hamilton 正则方程. 计算结构力学及其应用, 1991, 8(4): 343~349 (Tang Limin. Mixed formulation and Hamilton canonical equations of theory of elasticity. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1991, 8(4): 343~349 (in Chinese))
- 3 Fan JR, Ye JQ. A series solution of the exact equation for thick orthotropic plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1990, 26(7): 773~778
- 4 范家让. 强厚叠层板壳的精确理论. 北京: 科学出版社, 1996 (Fan Jiarang. Exact Theory of Laminated Thick Plates and Shells. Beijing: Science Press, 1996 (in Chinese))
- 5 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连: 大连理工大学出版社, 1995 (Zhong Wanxie. A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995 (in Chinese))
- 6 唐立民等. 混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和叠层板的计算. 计算结构力学及其应用, 1992, 9(4): 347~360 (Tang Limin, et al. The semi-analytical solutions of mixed state Hamiltonian element and the computation laminated plates. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1992, 9(4): 347~360 (in Chinese))
- 7 欧阳华江, 钟万勰等. 一类基于 Hamilton 体系的半解析法. 计算结构力学及其应用, 1993, 10(2): 129~136 (Ouyang Huajiang, Zhong Wanxie, et al. A group of Hamiltonian-system-based on semi-analytic methods. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1993, 10(2): 129~136 (in Chinese))
- 8 齐朝晖, 唐立民. 曲线坐标系下哈密顿体系的建立. 大连理工大学学报, 1997, 37(4): 376~380 (Qi Zhaozhui, Tang Limin. Study of Hamilton system in curvilinear coordinates. *Journal of Dalian University of Technology*, 1997, 37(4): 376~380 (in Chinese))
- 9 Mukherjee A, Mukhopadhyay M. A review of dynamic behavior of stiffened plates. *The Shock and Vibration Digest*, 1986, 18(1): 3~8
- 10 Mukhopadhyay M, Mukherjee A. Recent advance on the dynamic behavior of stiffened plates. *The Shock and Vibration Digest*, 1989, 21(1): 6~9
- 11 Troitsky MS. Stiffened Plates Bending, Stability and Vibrations. New York: Elsevier scientific, 1976
- 12 Olson MD, Hazell CR. Vibration studies on some integral rib-stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, 50(1): 43~61
- 13 Aksu G. Free vibration analysis of stiffened plates using finite difference method. *Journal Sound and Vibration*, 1976, 44(1): 147~158
- 14 Mukherjee A, Mukhopadhyay M. Finite element free vibration of eccentrically stiffened plates. *Computers & Structures*, 1988, 30(6): 1303~1317
- 15 Bedair OK. Analysis of stiffened plates under lateral loading using sequential quadratic programming (SQP). *Computers & Structures*, 1997, 62(1): 63~80
- 16 Bedair OK. Stability, Free vibration and bending behavior of multi-stiffened plates. *Journal Eng Mech*, 1997, 123 (4): 41~337
- 17 Zeng H, Bert CW. A differential quadrature analysis of vibration for rectangular stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 241(2): 247~252
- 18 张涛, 刘士光等. 加筋板弹性大挠度的冲击响应分析. 爆炸与冲击, 2002, 22(4): 301~307 (Zhang Tao, Liu Tuguang, et al. Large deflection dynamic response of stiffened plates under lateral impact loading. *Explosion and Shock Waves*, 2002, 22(4): 301~307 (in Chinese))
- 19 Liew KM, et al. Formulation of Mindlin-Engesser model for stiffened plate vibration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, 120: 339~353
- 20 Moler C, Van LC. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM Review (Society for Industrial and Applied Mathematics)*, 1978, 20(4): 801~836
- 21 邹贵平. 复合材料层合板壳的混合状态方程. Hamilton 正则方程及其半解析法: [博士论文]. 大连: 大连理工大学, 1994 (Zou Guiping. The mixed state equation, Hamilton canonical equation and a semi-analytical solution for the analysis of laminated composite plate and shells. [Ph D Thesis]. Dalian: Dalian University of Technology, 1994 (in Chinese))
- 22 卿光辉, 邱家俊, 塔娜. 压电体的混合变分原理及其混合叠层板的自由振动分析. 振动工程学报, 2004, 17(3): 285~290 (Qing Guanghui, Qiu Jiajun, Ta Na. Modified H-R mixed variational principle for piezoelectric material and free vibration analysis of composite laminates with piezoelectric layers. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(3): 285~290 (in Chinese))
- 23 Lee HJ, Saravanan DA. Generalized finite element formulation for smart multilayered thermal piezoelectric composite plates. *International Journal Solids and Structures*, 1997, 34(26): 3355~3371
- 24 Wang XM, Ehlers C, Neitzel M. An analytical investigation of static model of piezoelectric patches attached to beams and plates. *Smart Material Structures*, 1997, 6(2): 204~213

HAMILTON CANONICAL EQUATION FOR ELASTIC BODIES AND NATURAL FREQUENCIES ANALYSIS OF INTEGRAL STIFFENED PLATES¹⁾

Qing Guanghui Qiu Jiajun Ta Na

(*Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

Abstract Based on Hamilton canonical equation theory and its semi-analytical solution for elastic bodies, a novel mathematical model for the natural frequencies analysis of integral stiffened plates is presented. The same plane element is used to discretize the plate and stiffeners, the linear equation sets of plate and stiffeners are established separately. The compatibility of displacements and stresses on the interface between the plate and the stiffeners is employed to derive the integral equation of structure, and the characteristic equation on natural frequencies. The main advantages are the transverse shear deformation and rotary inertia are considered naturally, and there is no restriction on the thickness of plate and height of stiffener. The convergence tests of several numerical examples and results show that present method is reliable. The method can be easily modified to analyze the problems of stiffened shells, stiffened piezolaminated plates, and plates or shells with piezoelectric sensor and actuator patches.

Key words natural frequency, integral stiffened plate, stiffened plate with holes, Hamilton canonical equation, semi-analytical solution

Received 9 January 2004, revised 19 August 2004.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10072038).