

平面弹性介质多孔多裂纹问题的一种数值方法¹⁾

闫相桥

(哈尔滨工业大学复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

摘要 提出了平面弹性介质中多孔洞多裂纹相互作用问题的一种数值计算方法, 通过把适于单一裂纹的 Bueckner 原理扩充到含有多孔洞多裂纹的一般体系, 将原问题分解为承受远处载荷不含裂纹不含孔洞的均匀问题, 和在远处不承受载荷但在裂纹面上和孔洞表面上承受面力的多孔洞多裂纹问题. 于是, 以应力强度因子作为参量的问题可以通过考虑后者(多孔洞多裂纹问题)来解决, 而利用提出的杂交位移不连续法, 这种多孔洞多裂纹问题是容易数值求解的. 算例说明该数值方法对分析平面弹性介质中多孔洞多裂纹相互作用的问题既简单又有效.

关键词 裂纹, 孔洞, 边界元, 应力强度因子, 位移不连续

引 言

许多脆性材料(如岩石、陶瓷和金属间化合物)通常先前存在孔洞、裂纹类缺陷. 这类材料断裂相应的准确预报需要准确考虑孔洞和裂纹的扩展及其相互作用.

近年来, 多孔洞多裂纹相互作用问题是破坏力学中一个重要的研究领域^[1~17]. 不少研究者利用叠加原理和虚拟面力的概念来研究多裂纹相互作用问题^[4~9], Horii 和 Nemat-Nasser^[7]也利用虚拟面力的概念研究多孔洞相互作用问题. Hu 等^[16]利用虚拟面力和位错密度函数的概念研究多孔洞多裂纹相互作用问题.

本文提出了平面弹性介质中多孔洞多裂纹相互作用问题的一种数值计算方法. 通过把适于单一裂纹的 Bueckner 原理^[18]扩充到含有多孔洞多裂纹的一般体系, 将原问题分解为承受远处载荷不含裂纹不含孔洞的均匀问题, 和在远处不承受载荷但在裂纹面上和孔洞表面上承受面力的多孔洞多裂纹问题. 于是, 以应力强度因子作为参量的问题可以通过考虑后者(多孔洞多裂纹问题)来解决, 而利用笔者提出的杂交位移不连续法^[19], 这种多孔洞多裂纹问题是容易数值求解的. 算例说明本数值方法对分析平面弹性介质中多孔洞多裂纹相互作用问题既简单又有效.

1 多孔洞多裂纹相互作用问题的一种数值计算方法

1.1 问题描述

考虑承受远场均匀应力 $\sigma_{yy}^\infty, \sigma_{xx}^\infty, \sigma_{xy}^\infty$, 含有 M 个任意方位裂纹和 N 个椭圆型孔洞的平面弹性体, 如图 1 所示, 其中 (x, y) 为整体直角坐标, $a^{(i)}$ 和 $\phi^{(i)}$ 分别为第 i 个裂纹的半裂纹长度和相对于 x 轴的方位角, $(x_c^{(i)}, y_c^{(i)})$ 为第 i 个裂纹的中心坐标, $(s^{(i)}, t^{(i)})$ 为第 i 个裂纹的局部坐标; $R_x^{(j)}$ 和 $R_y^{(j)}$ 分别是第 j 个椭圆型孔洞的横半轴和纵半轴半径, $(x_v^{(j)}, y_v^{(j)})$ 是第 j 个椭圆型孔洞的中心坐标, 用 $(r^{(j)}, \theta^{(j)})$ 表示第 j 个椭圆型孔洞的局部极坐标. 对于裂纹和孔洞的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ss}^{(i)} = 0, \quad \sigma_{ts}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \\ \sigma_{rr}^{(j)} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

在这里, 称上述问题为原问题.

1.2 简化模型——Bueckner 原理的普遍化

Bueckner^[18]利用叠加原理得到一种重要结果, 称为 Bueckner 原理, 如图 2 所示: 由外部载荷引起的裂纹的应力强度因子, 可以通过考虑无外部载荷作用但裂纹面上承受面力的裂纹问题来确定, 该面力与无裂纹几何体在外部载荷作用下在裂纹所在位置处产生的应力大小相等方向相反.

2004-02-22 收到第 1 稿, 2004-07-13 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10272037).

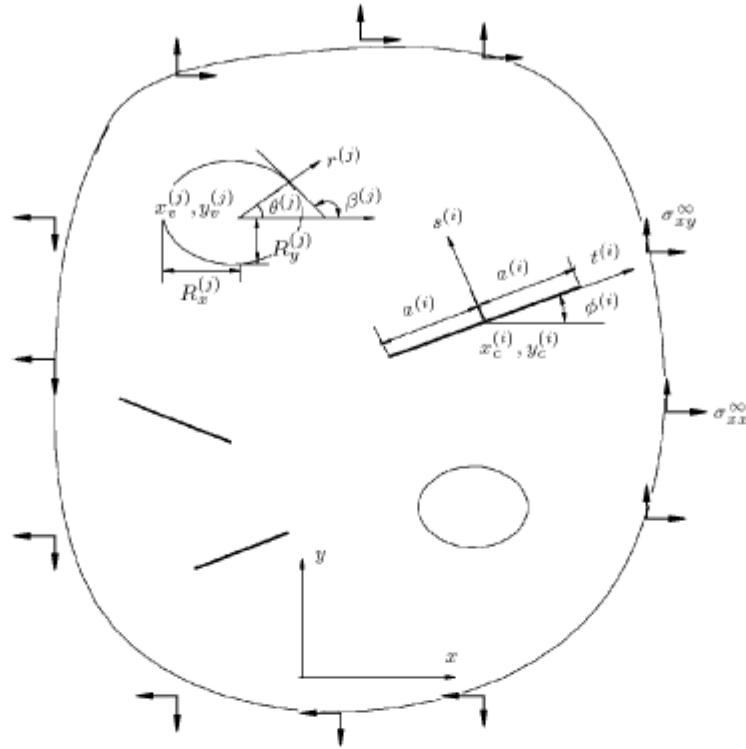


图 1 承受远场均匀应力，含有 M 个任意方位裂纹和 N 个椭圆型孔洞的平面弹性体

Fig.1 An infinite elastic plate containing M arbitrarily oriented cracks and N elliptical voids under remote uniform stresses

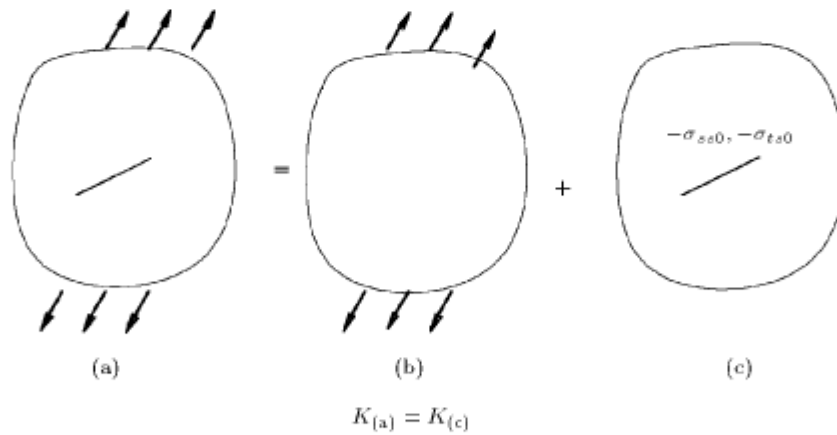


图 2 Bueckner 原理示意图

Fig.2 Schematic of Bueckner's principle

在这里，作者尝试将适于单一裂纹的 Bueckner 原理扩充到含有多孔洞多裂纹的体系。为此，将上述的原问题分解为承受远处载荷不含裂纹不含孔洞的均匀问题，和在远处不承受载荷但在裂纹面上和孔洞表面上承受面力的多孔洞多裂纹问题，如图 3 所示。在第 i 个裂纹面上承受的面力与无裂纹几何体在外部载荷作用下在第 i 个裂纹所在位置处产生的

应力大小相等方向相反，即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ss0}^{(i)} &= \sigma_{xx}^\infty \sin \phi^{(i)} \sin \phi^{(i)} - \\ &2\sigma_{xy}^\infty \sin \phi^{(i)} \cos \phi^{(i)} + \\ &\sigma_{yy}^\infty \cos \phi^{(i)} \cos \phi^{(i)} \\ \sigma_{ts0}^{(i)} &= (\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty) \sin \phi^{(i)} \cos \phi^{(i)} + \\ &\sigma_{xy}^\infty (\cos \phi^{(i)} \cos \phi^{(i)} - \sin \phi^{(i)} \sin \phi^{(i)}) \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

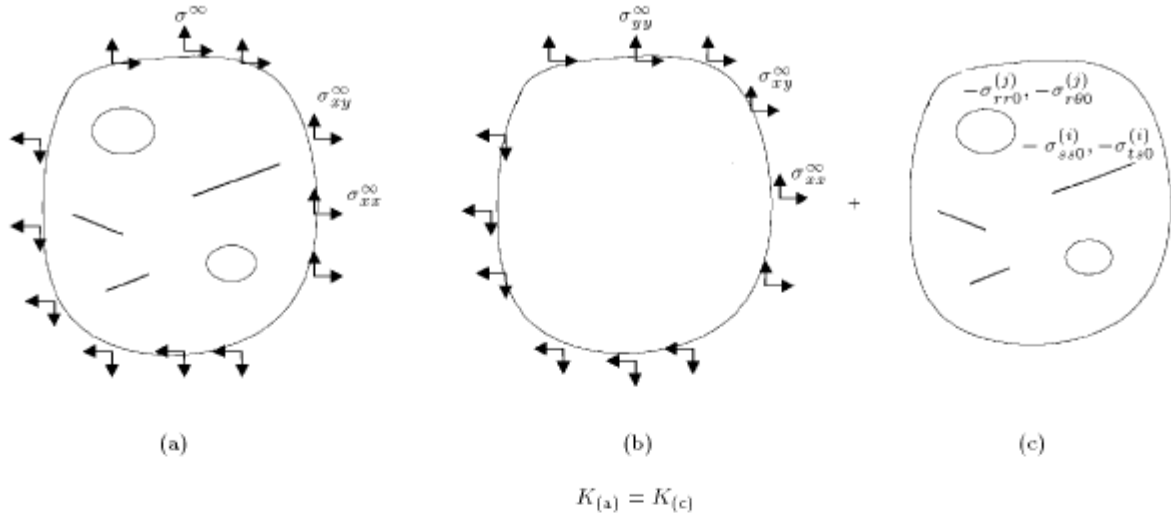


图 3 Bueckner 原理的普遍化

Fig.3 A generalization of Bueckner's principle

称为初应力. 用 $\beta^{(j)}$ 表示第 j 个椭圆型孔洞表面在任意点 $(r^{(j)}, \theta^{(j)})$ 处的切线相对于 x 轴的方位角, 则在该点处的初应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr0}^{(j)} &= \sigma_{xx}^{\infty} \sin \beta^{(j)} \sin \beta^{(j)} - \\ &2\sigma_{xy}^{\infty} \sin \beta^{(j)} \cos \beta^{(j)} + \\ &\sigma_{yy}^{\infty} \cos \beta^{(j)} \cos \beta^{(j)} \\ \sigma_{r\theta 0}^{(j)} &= (\sigma_{yy}^{\infty} - \sigma_{xx}^{\infty}) \sin \beta^{(j)} \cos \beta^{(j)} + \\ &\sigma_{xy}^{\infty} (\cos \beta^{(j)} \cos \beta^{(j)} - \sin \beta^{(j)} \sin \beta^{(j)}) \end{aligned} \right\} (2b)$$

显然, 由式 (2b) 定义的初应力是随着第 j 个椭圆型孔洞表面不同点 $(r^{(j)}, \theta^{(j)})$ 变化的. 于是, 以应力强度因子作为参量的问题可以通过考虑后者 (多孔洞多裂纹问题) 来解决, 而利用笔者提出的杂交位移不连续法^[19], 这种多裂纹问题是容易数值求解的. 所以本数值方法可以称为杂交位移不连续初应力法.

1.3 杂交位移不连续法

本节将扼要描述平面弹性裂纹分析的杂交位移不连续边界元法^[19], 该边界元方法由 Crouch 与 Starfield^[20] 的常位移不连续单元和笔者提出的裂尖位移不连续单元^[21] 构成.

1.3.1 常位移不连续边界元法之理论基础

无限大平面体中在位置 $|x| < a, y = 0$ 处具有常位移不连续量 $D_i = (D_x, D_y)$ 的定义为

$$\left. \begin{aligned} D_x &= u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+), \\ D_y &= u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+), \end{aligned} \right\} |x| < a, y = 0 \quad (3)$$

由于位移 u_x 和 u_y 沿坐标 x 和 y 方向为正, 故位移不连续量 D_x 和 D_y 沿图 4 所示方向为正.

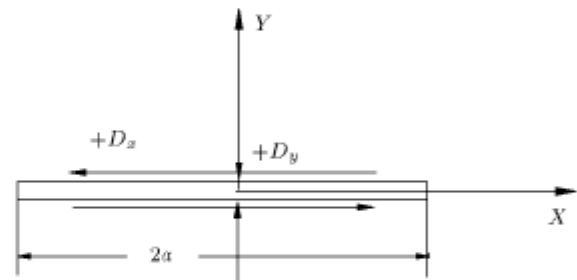


图 4 常位移不连续量 D_x, D_y 的示意图

Fig.4 Schematic of constant displacement discontinuity components D_x and D_y

此问题的解答是由 Crouch 与 Starfield^[20] 获得的, 位移场和应力场为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= D_x [2(1 - \nu)F_3(x, y, a) - yF_5(x, y, a)] + \\ &D_y [- (1 - 2\nu)F_2(x, y, a) - yF_4(x, y, a)] \\ u_y &= D_x [(1 - 2\nu)F_2(x, y, a) - yF_4(x, y, a)] + \\ &D_y [2(1 - \nu)F_3(x, y, a) - yF_5(x, y, a)] \end{aligned} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2GD_x [2F_4(x, y, a) + yF_6(x, y, a)] + \\ &2GD_y [-F_5(x, y, a) + yF_7(x, y, a)] \\ \sigma_{yy} &= 2GD_x [-yF_6(x, y, a)] + \\ &2GD_y [-F_5(x, y, a) - yF_7(x, y, a)] \\ \sigma_{xy} &= 2GD_x [-F_5(x, y, a) + yF_7(x, y, a)] + \\ &2GD_y [-yF_6(x, y, a)] \end{aligned} \right\} (5)$$

其中 G 和 ν 为材料剪切模量和泊松比, 函数 $F_2 \sim F_7$ 见文献 [20].

Crouch 与 Starfield^[20] 已利用方程 (4) 和 (5) 建立了常位移不连续边界元法.

1.3.2 裂尖位移不连续单元

基于无限大平面体中常位移不连续的分析解^[20], 笔者提出了裂尖位移不连续单元^[21](可分为左、右裂尖位移不连续单元)以模拟裂尖附近的应力奇异场. 下面给出左裂尖位移不连续单元的基本公式.

图 5 给出的是左裂尖位移不连续单元的示意图, 其位移不连续函数可取为

$$\left. \begin{aligned} D_x &= H_s \left(\frac{a+\xi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \\ D_y &= H_n \left(\frac{a+\xi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 H_s 和 H_n 分别为裂尖单元中点处的切相和法向位移不连续量. 在这里注意到裂尖位移不连续单元与常位移不连续单元具有相同的未知量, 即两个, 但由式 (6) 定义的位移不连续函数可以模拟裂尖附近的位移场, 从而可以模拟裂尖附近的应力奇异性.

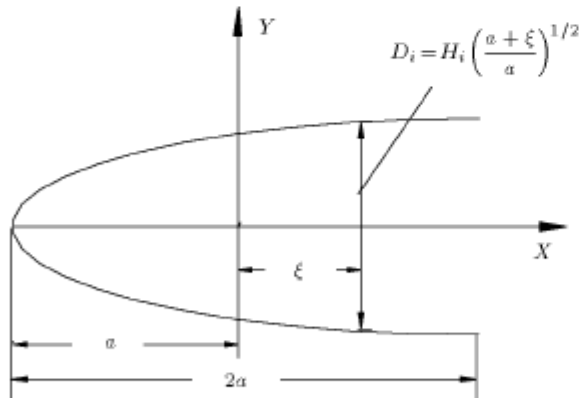


图 5 左裂尖位移不连续单元的示意图

Fig.5 Schematic of the left crack tip displacement discontinuity element

基于无限大平面体中常位移不连续的分析解^[20], 根据微积分学的理论易于求得由式 (6) 定义的裂尖位移不连续函数引起的在点 (x, y) 处的位移场和应力场^[21]

$$\left. \begin{aligned} u_x &= H_s[2(1-\nu)B_3(x, y, a) - yB_5(x, y, a)] + \\ &H_n[-(1-2\nu)B_2(x, y, a) - yB_4(x, y, a)] \\ u_y &= H_s[(1-2\nu)B_2(x, y, a) - yB_4(x, y, a)] + \\ &H_n[2(1-\nu)B_3(x, y, a) - yB_5(x, y, a)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2GH_s[2B_4(x, y, a) + yB_6(x, y, a)] + \\ &2GH_n[-B_5(x, y, a) + yB_7(x, y, a)] \\ \sigma_{yy} &= 2GH_s[-yB_6(x, y, a)] + \\ &2GH_n[-B_5(x, y, a) - yB_7(x, y, a)] \\ \sigma_{xy} &= 2GH_s[-B_5(x, y, a) + yB_7(x, y, a)] + \\ &2GH_n[-yB_6(x, y, a)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中函数 $B_2(x, y, a) \sim B_7(x, y, a)$. 可见文献 [21].

把方程 (7) 和 (8) 与方程 (4) 和 (5) 比较可以看出, 由裂尖位移不连续单元引起的位移场和应力场与由常位移不连续单元引起的位移场和应力场具有相同的形式, 只要将方程 (4) 和 (5) 中的 $F_i(x, y, a)$ ($i = 2, 3, \dots, 7$) 替代为 $B_i(x, y, a)$ ($i = 2, 3, \dots, 7$), 将 D_x 和 D_y 分别替代为 H_s 和 H_n 即可. 这使得该边界元法容易实施.

对右裂纹尖端有与方程 (6)~(8) 类似的方程, 这里不再列出.

1.3.3 本数值方法的实施

Crouch 与 Starfield^[20] 利用方程 (4),(5) 建立了常位移不连续边界元法. 本文可以类似地利用方程 (7),(8) 针对裂尖单元建立边界元方程, 进而在把 Crouch 与 Starfield 建立的常位移不连续单元与笔者提出的裂尖位移不连续单元有机地结合在一起以建立一种不仅对无限大体中平面裂纹问题而且对有限体中平面裂纹问题均适用的边界元法. 在该边界元方法的实施过程中, 左、右裂尖位移不连续单元分别置于裂纹的左、右裂尖处, 而常位移不连续单元则分布于除了裂尖位移不连续单元占据的位置之外的整个裂纹面及其它边界. 称这种方法为杂交位移不连续法^[19].

2 应力强度因子的计算公式

线弹性裂纹分析的主要目标是确定裂纹尖端的应力强度因子 K_I 和 K_{II} . 基于裂尖附近的位移场,

有下列公式

$$\left. \begin{aligned} K_I &= -\frac{G\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} \{D_y(r)/r^{0.5}\} \\ K_{II} &= -\frac{G\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} \{D_x(r)/r^{0.5}\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 $D_y(r)$ 和 $D_x(r)$ 分别为离裂尖距离为 r 处的法向和切向位移不连续量. 从实用出发, 式 (9) 中的极限可以代之以与裂纹尺寸相比很小的固定尺寸 r . 基于由式 (6) 定义的裂尖单元位移不连续函数, 在式 (9) 中取 r 为裂尖单元的半长度 a , 可得应力强度因子 K_I 和 K_{II} 计算公式

$$\left. \begin{aligned} K_I &= -\frac{\sqrt{2\pi}GH_n}{4(1-\nu)\sqrt{a}} \\ K_{II} &= -\frac{\sqrt{2\pi}GH_s}{4(1-\nu)\sqrt{a}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

3 多孔洞多裂纹问题

为了证明本文建立的数值方法对分析多孔洞多裂纹问题的有效性和准确性, 下面列举两个典型算例.

3.1 一个圆孔与一个裂纹

图 6 给出的是受单轴载荷作用的一个圆孔与一个裂纹的示意图. 在本分析中, 考虑下列情况

$$R/a = 2, \quad b/a = 3.2, 3.5, 4, 5, 8$$

表 1 对受单轴载荷作用的一个圆孔与一个裂纹, 归一化应力强度因子

Table 1 SIFs normalized by $\sigma\sqrt{\pi a}$ for one circular hole and one crack subjected to remote tension

b/a	3.2		3.5		4		5		8	
	F_A	F_B	F_A	F_B	F_A	F_B	F_A	F_B	F_A	F_B
present	2.2650	1.4149	1.7173	1.2887	1.3918	1.1871	1.1732	1.1007	1.0438	1.0326
Ref.[22]	2.274	1.417	1.722	1.290	1.394	1.188	1.174	1.102	1.045	1.033
relative error (%)	0.4	0.1	0.3	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0

表 2 对受单轴载荷作用的一个圆孔与一个裂纹, 归一化应力强度因子随单元划分数目的变化

Table 2 Variation of SIFs normalized by $\sigma\sqrt{\pi a}$ or one circular hole and one crack subjected to remote tension

n_{crack}	25	50	75	150
$n_{circular}$	100	200	300	600
F_A	1.6954	1.7082	1.7111	1.7181
relative error (%)	1.5	0.8	0.6	0.2
F_B	1.2826	1.2862	1.2864	1.2890
relative error (%)	0.6	0.3	0.3	0.1

关于边界单元的划分, 在裂纹和圆孔上划分的单元数目分别为 200 和 800. 在裂纹尖端 A 和 B 处的应力强度因子 K_{IA} 和 K_{IB} 归一化

$$F_A = K_{IA}/(\sigma\sqrt{\pi a}), \quad F_B = K_{IB}/(\sigma\sqrt{\pi a})$$

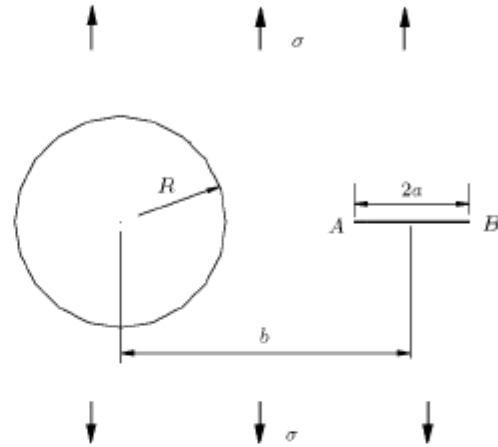


图 6 单轴载荷作用下无限大板中一个圆孔洞和一个裂纹
Fig.6 One circular hole and one crack in an infinite plate under tension

其数值结果列于表 1 中. 为了比较起见, 表 1 也给出了 Erdogan 等 [22] 利用奇异积分方程法得到的数值解.

对 $b/a = 3.5, R/a = 2$ 情况, 进而研究了单元划分对数值结果的影响. 把在裂纹和圆孔上划分的单元数目分别用 n_{crack} 和 $n_{circular}$ 来表示, 表 2 给出了归一化应力强度因子随单元划分数目的变化.

从表 1 和表 2 可见, 本数值方法对分析此类圆孔与裂纹的作用问题是非常有效的.

3.2 两个裂纹之间一个圆孔

图 7 给出的是受单轴载荷作用的两个裂纹之间一个圆孔的示意图. 对此裂纹问题, 关于 x 轴和 y 轴的对称性条件是可以利用的. 现考虑下列情况

$$R/a = 2.0$$

$$t/a = 0.25, 1.5, 4.0, 9.0$$

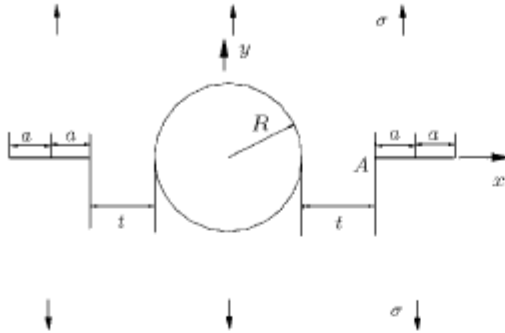


图 7 受单轴载荷作用的两个裂纹之间一个圆孔的示意图
Fig.7 A circular hole between two cracks under uniform tension

关于边界单元的划分, 在一个裂纹上和 $1/4$ 圆孔上划分的单元数目都是 50. 在裂纹尖端 A 处的归一化应力强度因子 (归一化因子为 $\sigma\sqrt{\pi a}$) 的本数值结果列于表 3 中. 为了比较起见, 表 3 也列出了文献 [23] 报道的结果. 从表 3 可见, 本数值方法对分析此类圆孔与裂纹的作用问题也是非常有效的.

表 3 图 7 所示裂纹的归一化应力强度因子

Table 3 Normalized SIFs for a crack shown in Fig.7

t/a	0.25	1.5	4.0	9.0
present	2.2191	1.2619	1.0623	1.0127
Ref.[23]	2.256	1.269	1.068	1.018
relative error (%)	1.6	-0.6	-0.5	-0.5

4 结 论

本文提出了平面弹性介质中多孔洞多裂纹相互作用问题的一种数值计算方法. 算例说明本数值方法对分析平面弹性介质中多孔洞多裂纹相互作用问题既简单又非常有效.

参 考 文 献

- Evans AG, Faber KT. Toughening of ceramics by circumferential microcracking. *J Amer Ceram Soc*, 1981, 64(7): 394~398
- Hutchinson JW. Crack tip shielding by micro-cracking in brittle solids. *Acta Metall*, 1987, 35: 1605~1619
- Charalambides P, McMeeking RM. Finite element method simulation of crack propagation in a brittle microcracking solids. *Mech Mater*, 1987, 6: 71~87
- Chudnovsky A, Kachanov M. Interaction of a crack with a field of microcracks. *Int J Eng Sci*, 1983, 21: 1009~1018
- Chudnovsky A, Dolgopolsky A, Kachanov M. Elastic interaction of a crack with a microcrack array. *Int J Solids Structures*, 1987, 23: 1~21
- Kachanov M, Montagut E. Interaction of a crack certain microcrack array. *Eng Fract Mech*, 1986, 25: 625~636
- Horii H, Nemat-Nasser S. Elastic fields of interacting inhomogeneities. *Int J Solids Structures*, 1985, 21: 731~745
- Hori M, Nemat-Nasser S. Interacting microcracks near the tip in the process zone of a macrocrack. *J Mech Phys Solids*, 1987, 35(5): 601~629
- Gong SX, Horii H. General solution to the problem of microcracks near the tip of a main crack. *J Mech Phys Solids*, 1989, 37: 27~46
- Rose LRF. Microcrack interaction with a main crack. *Int J Fracture*, 1986, 31: 233~242
- Rubinstein A. Macrocrack interaction with semi-infinite microcrack array. *Int J Fract*, 1985, 27: 113~119
- Rubinstein A. Macrocrack-microdefect interaction. *ASME J Appl Mech*, 1986, 53: 503~510
- Shum DKM, Hutchinson JW. On toughening by microcracks. *Mech Mater*, 1990, 9: 83~91
- Kachanov M. In: Hutchinson JW, Wu T eds. *Advances in Applied Mechanics*. 1993, 30: 259~445
- Wang XM, Gao S, Chen YH. Further investigation for the macro-microcrack interaction I—In the infinite isotropic body. *Int J Solids Structures*, 1996, 33(27): 4051~4063
- Hu KX, Chandra A, Huang Y. Multiple void-crack interaction. *Int J Solids Structures*, 1993, 30(11): 1473~1489
- Ducourthial E, Bouchaud E, Chaboche JL. Influence of microcracks on a propagation of macrocracks. *Computation Materials Science*, 2000, 19: 229~234
- Buckner HF. The Propagation of cracks and the energy of elastic deformation. *Trans ASME*, 1958, 80E: 1225~1230
- Yan X. A numerical analysis of cracks emanating from a square hole in a rectangular plate under biaxial loads. *Eng Fract Mech*, 2004, 71(11): 1615~1623
- Crouch SL, Starfield AM. *Boundary element method in solid mechanics*, with application in rock mechanics and geological mechanics, London, Geore Allon & Unwin, Bonton, Sydney, 1983
- Yan X. A crack tip displacement discontinuity element, *Mechanics Research Communications*, in press
- Erdogan. Gupta FGD, Ratwani M. Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack. *ASME J Appl Mech*, 1974, 31: 1007~1013
- Murakami Y. *Stress Intensity Factors Handbook*. New York: Pergamon Press, 1987

A NUMERICAL METHOD FOR ANALYZING MULTIPLE VOID-CRACK INTERACTION IN A PLANE ELASTIC MEDIA ¹⁾

Yan Xiangjiao

(Research Laboratory on Composite Materials, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract This paper presents an approach to modeling a general system containing multiple interacting cracks and voids in a plane elastic media. By extending Bueckner's principle suited for a crack to a general system containing multiple interacting cracks and voids, the original problem is divided into a homogeneous problem (the one without cracks and voids) subjected to remote loads and a multiple void-crack problem in an unloaded body with applied tractions on the surfaces of cracks and voids. Thus, the results in terms of stress intensity factors (SIFs) can be obtained by considering the latter problem, which is analyzed easily by means of the Hybrid Displacement Discontinuity Method (HDDM) proposed recently by the author. Many test examples are included to illustrate that the method is very simple and effective for analyzing arbitrary multiple cracks and voids in a plane elastic media.

Key words crack, void, stress intensity factor, displacement discontinuity method

Received 22 February 2004, revised 13 July 2004.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10272037).