

阶梯压电层合梁的波动动力学特性¹⁾

任建亭 姜节胜

(西北工业大学振动工程研究所, 西安 710072)

摘要 采用行波理论系统地研究了压电阶梯梁的自由振动分析以及强迫响应的分析方法. 基于分布参数理论研究了压电阶梯梁的波传播特性, 忽略柔性梁横向剪切和转动惯量的影响, 给出了梁的轴向和横向的简谐波解. 将压电阶梯梁离散化为单元, 考虑压电片的刚度和质量的影响, 建立了节点散射模型. 应用位移连续和力平衡条件, 推导了节点的波反射和波传递矩阵, 在此基础上, 引入波循环矩阵的概念, 给出波循环矩阵、波传递系数矩阵的确定方法. 应用波循环矩阵可以有效地计算结构的固有频率. 另外, 应用波传递系数研究了压电陶瓷作动器位置对其驱动能力的影响. 得出两个主要结论: 1) 作动器靠近悬臂梁固定端将有较强的驱动能力, 悬臂梁边界反射行波产生弯曲消失波有利于增大压电波的模态传递系数; 2) 模态传递系数与固有频率的灵敏度密切相关, 波传递系数越大, 对应该处固有频率变化灵敏度越大. 另外, 数值算例表明了行波方法比有限元方法具有更高的计算精度.

关键词 行波, 波循环, 波传递, 层合梁

引 言

近年来, 随着波动分析技术在梁、板以及弦等工程结构中的应用, 波动分析技术成为振动控制工程中研究热点^[1~8]. 其原因在于波动分析的简洁性和系统性, 可以推广到复杂的如多跨梁、桁架等周期和拟周期等弹性结构. 另一方面波动分析具有能直接给出结构的瞬态响应、以及有效地研究结构系统能量传递规律的优点, 又被认为是智能结构裂纹监测和振动控制的最有前景的方法之一^[8].

尽管基于驻波技术, 压电智能结构的振动分析与控制技术已十分广泛^[9]. 然而, 对智能结构采用波动分析还很少. 波动分析技术作为一种数值方法还有待于拓展和开发.

基于此, 本文采用行波法系统地研究了压电阶梯梁的自由振动分析以及强迫响应的分析方法, 并通过数值算例验证了行波方法的数值解的计算精度优于有限元方法. 同时, 以压电波传递系数作为指标, 研究了压电陶瓷位置对作动器作动能力的影响.

1 系统的运动方程

考虑一压电层合梁, 其上下表面各粘贴 N 对对称的压电陶瓷片, 如图 1. 该梁是一矩形截面梁, 其长

度、高度和宽度分别为 l, h, b ; 压电陶瓷片的长度、高度和宽度分别为 l_p, h_p, b ; 该梁和压电陶瓷片的材料特性参数分别为: 弹性模量为 E_b, E_p ; 质量密度为 ρ_b, ρ_p ; 截面面积和截面惯性矩分别为 A_b, A_p 和 I_b, I_p . 压电层合梁作用分布载荷 $f(x, t)$, 下标 b, p 分别表示基层梁和压电陶瓷片.

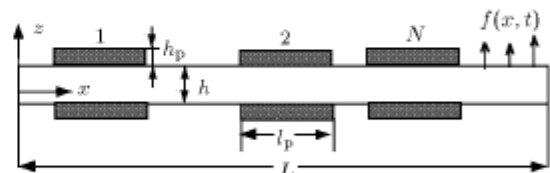


图 1 压电阶梯梁示意图

Fig.1 Geometry of multiple PZT patches bonded to a beam

假定压电陶瓷片与基梁理想粘贴, 即梁与压电陶瓷片的横向变形 w 和纵向变形 u 在粘贴处彼此相等. 压电陶瓷片和梁的剪切变形忽略不计, 采用 Bernoulli-Euler 梁模型, 将梁分为 $N+1$ 段, 第 k 段梁单元横向振动和纵向振动的动力学方程可表示为

$$\begin{aligned} \rho_b A_b w_{k,tt} + E_b I_b w_{k,xxxx} + \delta_k (2\rho_p A_p w_{k,tt} + \\ 2E_p I_p w_{k,xxxx} + m_{k,xx}) = f, \quad x \in (l_{k-1}, l_k) \quad (1a) \end{aligned}$$

2003-05-31 收到第 1 稿, 2004-06-03 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10202020).

$$\rho_b A_b u_{k,tt} + E_b A_b u_{k,xx} + 2\delta_k (\rho_p A_p w_{k,tt} + E_p A_p u_{k,xx}) = 0, \quad x \in (l_{k-1}, l_k) \quad (1b)$$

$$m_k = 2bE_p d_{31} \int_{d-h_p/2}^{d+h_p/2} z E_3(x, z) dz \quad (1c)$$

式中 w_k, u_k 分别为第 k 段的梁的横向和纵向振动位移; δ_k 为判断第 k 段梁是否有压电层的指标, 无压电层时, $\delta_k = 0$, 否则 $\delta_k = 1$. m_k 和 $m_{k,xx}$ 分别为第 k 段梁压电片在电场强度 $E_3(z$ 方向) 产生的纯弯矩及其 m_k 关于 x 的二阶导数. d_{31} 为压电常数; d 为压电层的中心面到基层梁的中心面距离, $d = (h_p + h)/2$.

由于第 $k-1$ 段和第 k 段梁在连接处满足位移连续、力平衡条件, 则在 $x = l_{k-1}$ 处, 弯曲位移、转角和轴向位移连续, 以及剪力、弯矩和轴向力平衡方程分别为

$$\left. \begin{aligned} w_{k-1} &= w_k, \quad w_{k-1,x} = w_{k,x}, \quad u_{k-1} = u_k \\ E_b I_b w_{k-1,xxx} &= (2E_p I_p + E_b I_b) w_{k,xxx} - m_{k,x} \\ E_b I_b w_{k-1,xx} &= (2E_p I_p + E_b I_b) w_{k,xx} - m_k \\ E_b A_b u_{k-1,x} &= (E_b A_b + 2E_p A_p) u_{k,x} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

同理, 在阶梯梁其它不连续界面处, 相邻各段梁位移和力满足如上相类似的方程.

在方程 (1a) 中, 压电层合梁的横向变形 w 和电场强度 E_3 是耦合的, 方程 (1a) 的精确解很难求解. 考虑到实际应用中, 压电陶瓷层施加的电压是一均匀电压, 故电场强度 E_3 与坐标 x, z 无关, 则由式 (1c) 有

$$m_k = 2bE_p d_{31} h_p d E_3, \quad m_{k,x} = m_{k,xx} = 0 \quad (3)$$

考虑自由振动问题. 假定谱次波在第 k 梁传播, 相应的弯曲波和轴向波的表达式分别为

$$w_k(x, t) = A_{k1} e^{-i\gamma_k x} e^{i\omega t} + A_{k2} e^{-\gamma_k x} e^{i\omega t} + A_{k3} e^{i\gamma_k x} e^{i\omega t} + A_{k4} e^{\gamma_k x} e^{i\omega t} \quad (4a)$$

$$u_k(x, t) = B_{k1} e^{-i\tilde{\gamma}_k x} e^{i\omega t} + B_{k2} e^{i\tilde{\gamma}_k x} e^{i\omega t} \quad (4b)$$

式中 $A_{k1}, A_{k2}, A_{k3}, A_{k4}$ 分别是第 k 梁弯曲位移波幅值系数; 式 (4a) 中, 第 1 和第 3 项为行波, 第 2 和第 4 项为消失波. B_{k1}, B_{k2} 分别是第 k 梁轴向位移波幅值系数. ω 为频率. $\gamma_k, \tilde{\gamma}_k$ 分别为弯曲波和轴

向波的波数, 它们的表达式分别为

$$\gamma_k = \sqrt[4]{\omega^2 / \alpha_k}, \quad \tilde{\gamma}_k = \omega / \sqrt{\beta_k} \quad (5a, b)$$

$$\alpha_k = (E_b I_b + 2\delta_k E_p I_p) / (\rho_b A_b + 2\delta_k \rho_p A_p) \quad (5c)$$

$$\beta_k = (E_b A_b + 2\delta_k E_p A_p) / (\rho_b A_b + 2\delta_k \rho_p A_p) \quad (5d)$$

引入状态变量, 令该梁截面位移向量 \mathbf{W}_k 、截面内力向量 \mathbf{F}_k 分别为

$$\mathbf{W}_k(x) = \{w_k \ w_{k,x} \ u_k\}^T \quad (6a)$$

$$\mathbf{F}_k(x) = \{q_k \ m_k \ f_k\}^T \quad (6b)$$

式中 $w_k, w_{k,x}$ 和 u_k 分别为第 k 段梁的弯曲位移、转角和轴向位移; q_k, m_k, f_k 分别为第 k 段梁的剪力、弯矩和轴向力.

并定义位移波沿正负方向传播的波模式为

$$\mathbf{a}_k^+ = \{A_{k1} e^{-i\gamma_k x} e^{i\omega t} \ A_{k2} e^{-\gamma_k x} e^{i\omega t} \ B_{k1} e^{-i\tilde{\gamma}_k x} e^{i\omega t}\}^T \quad (7a)$$

$$\mathbf{a}_k^- = \{A_{k3} e^{i\gamma_k x} e^{i\omega t} \ A_{k4} e^{\gamma_k x} e^{i\omega t} \ B_{k2} e^{i\tilde{\gamma}_k x} e^{i\omega t}\}^T \quad (7b)$$

式中 $\mathbf{a}_k^+, \mathbf{a}_k^-$ 分别为子梁内正方向和负方向波模式向量.

考虑到式 (4a), (4b), 子梁的截面上的任一点的位移和力均可以通过系统的传递波来表示. 第 k 梁的振动位移和力用波模式可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_k \\ \mathbf{F}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_k^+ & \psi_k^- \\ \lambda_k \varphi_k^+ & \lambda_k \varphi_k^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k^+ \\ \mathbf{a}_k^- \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中

$$\psi_k^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i\gamma_k & -\gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi_k^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i\gamma_k & \gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_k^+ = \begin{bmatrix} -i\gamma_k^3 & \gamma_k^3 & 0 \\ -\gamma_k^2 & \gamma_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & -i\tilde{\gamma}_k \end{bmatrix}$$

$$\phi_k^- = \begin{bmatrix} i\gamma_k^3 & -\gamma_k^3 & 0 \\ -\gamma_k^2 & \gamma_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & i\tilde{\gamma}_k \end{bmatrix}$$

$$\lambda_k = \text{diag}(E_b I_b + 2\delta_k E_p I_p, E_b I_b + 2\delta_k E_p I_p, E_b A_b + 2\delta_k E_p A_p)$$

式中 ψ_k^+, ψ_k^- 分别为在第 k 梁内正方向行波和负方向行波沿 x 方向的传播的位移矩阵; ϕ_k^+, ϕ_k^- 分别为第 k 梁内正方向行波和负方向行波沿 x 方向的传播的内力矩阵; λ_k 为第 k 个子梁的内力矩阵的量纲矩阵.

2 波的传播和反射

压电阶梯梁可处理为不同物理特性的均质梁通

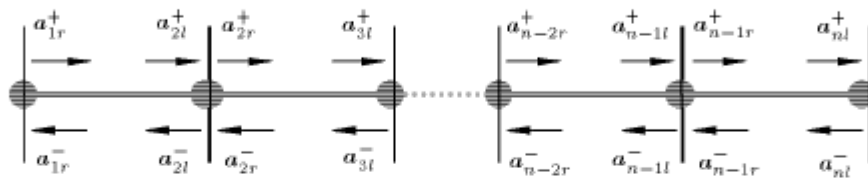


图 2 阶梯梁波传播示意图

Fig.2 Wave propagation of stepped beam

2.1 外节点入射波和反射波

尽管阶梯梁的边界类型一般有固支、简支等多种类型, 但一般在该节点上仅有一组入射波和反射波. 在该节点可以得到如下的平衡方程

$$CW + DF = Q \tag{9}$$

式中 Q 为弹簧、质量等提供的外力矩阵; C, D 分别为系数矩阵. 当节点为自由端时, C 为零矩阵, D 为单位矩阵. 当节点为固定端时, C 为单位矩阵, D 为零矩阵.

假定压电阶梯梁在节点 1 为固定端, 应用式 (8) 和式 (9), 可确定该节点入射波 a_{1r}^- 和反射波 a_{1r}^+ 的关系为

$$\left. \begin{aligned} a_{1r}^+ &= R_{1r} a_{1r}^- \\ R_{1r} &= -(\psi_1^+)^{-1} \psi_1^- \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

式中 R_{1r} 为反射系数矩阵.

当节点 n 为自由端, 有作用力 Q_n , 可以得到入射波 a_{nl}^+ 和反射波 a_{nl}^- 的关系

$$\left. \begin{aligned} a_{nl}^- &= R_{nl} a_{nl}^+ + e_n \\ R_{nl} &= -(\lambda_n \phi_n^-)^{-1} (\lambda_n \phi_n^+) \\ e_n &= (\lambda_n \phi_n^-)^{-1} Q_n \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

式中 R_{nl} 为反射系数矩阵; e_n 为外力产生的入射波列阵.

过节点连接而成的. 假定各子梁单元内阻抗连续, 即振动波在单元内传播时应无反射, 因此振动波的变化和外力均发生在连接界面节点上, 因而可以通过研究界面的动力学特性而获得整体系统动态特性.

将子梁相互连接的界面处理为节点, 这样对于阶梯梁的节点有两种类型: 与两个或多个单元相连的节点称内节点, 否则, 为外节点. 在一个子梁内, 当行波传播的方向朝向节点时称之为入射波; 反之, 当行波传播的方向背离节点时称之为反射波. 内节点有两组入射波和反射波, 外节点仅有一组反射波.

图 2 为振动波在整个梁传播的示意图.

2.2 内节点入射波和反射波

对于 n 段阶梯梁一般有 $n - 1$ 内节点. 在每个节点上有两组入射波和反射波. 定义节点 j 入射波 a_j^+ 和反射波 a_j^- 分别为

$$\left. \begin{aligned} a_j^+ &= \{a_{jl}^+ \ a_{jr}^+\}^T \\ a_j^- &= \{a_{jl}^- \ a_{jr}^-\}^T \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

由该节点的位移和力平衡方程 (3) 和 (8), 可建立节点 j 波散方程为

$$a_j^- = S_j a_j^+ + e_j, \quad j = 2, \dots, n - 1 \tag{13}$$

式中

$$S_j = \begin{bmatrix} r_{jl} & t_{jr} \\ t_{jl} & r_{jr} \end{bmatrix} = U_j \begin{bmatrix} -\psi_j^+ & \psi_{j+1}^- \\ -\lambda_j \phi_j^+ & \lambda_{j+1} \phi_{j+1}^- \end{bmatrix}$$

$$U_j = \begin{bmatrix} \psi_j^- & -\psi_{j+1}^+ \\ \lambda_j \phi_j^- & -\lambda_{j+1} \phi_{j+1}^+ \end{bmatrix}^{-1}$$

$$e_j = U_j Q_j, \quad Q_j = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -m_j \ 0\}^T$$

式中 S_j 为节点色散矩阵; r, t 分别为矩阵 S_j 的分块矩阵, 物理意义表示入射波反射和传递矩阵. 其

中 r_{jl} 的意义为节点 j 左端入射波反射在 j 梁内的反射波系数矩阵; t_{jl} 的表示节点 j 左端入射波通过节点 j 传递到 $j+1$ 梁内的波传递矩阵. 脚标 r, l 分别表示节点 j 的左端和右端. 图 3 为相邻两梁在节点 j 振动波传播关系示意图.

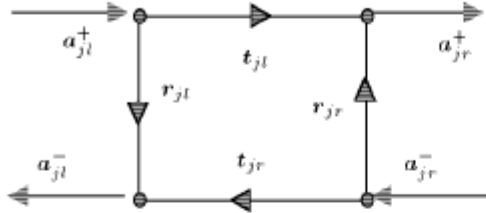


图 3 节点 j 振动波反射与传递关系示意图

Fig.3 Waves reflection and transmission at junction j

2.3 节点波循环矩阵

如果考虑某相邻的单元节点 j 作用一组入射波 a_{jl}^+ , 振动波从节点 j 沿正 x 方向单向传播到达梁整体右边界, 通过反射沿 x 负方向单向传播到达梁的左边界, 经边界反射到达初始点, 称之为形成一个波动循环.

节点 j 左端入射波 a_{jl}^+ 沿正 x 方向单向传播到达梁整体右边界, 通过反射沿 x 负方向传播到 a_{jl}^- ; a_{jl}^- 沿 x 负方向传播到达梁整体左边界, 通过反射沿 x 正方向传播到节点 j , 入射波 a_{jl}^+ 满足如下的关系

$$\left. \begin{aligned} a_{jl}^- &= R_{jl} a_{jl}^+ \\ a_{jl}^+ &= G_{jl} a_{jl}^- \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

同理, 节点 j 右端入射波 a_{jr}^- 和反射波 a_{jr}^+ 满足如下关系

$$\left. \begin{aligned} a_{jr}^+ &= R_{jr} a_{jr}^- \\ a_{jr}^- &= G_{jr} a_{jr}^+ \end{aligned} \right\} \quad (14b)$$

式中 R_{jl}, G_{jl} 分别为节点 j 左端入射波和反射波的关系矩阵; R_{jr}, G_{jr} 分别为节点 j 右端入射波和反射波的关系矩阵.

应用式 (10) 和式 (11) 以及波传播矩阵 (13), 可以确定式 (14) 中 R_{jl}, G_{jl} 和 R_{jr}, G_{jr}

$$\left. \begin{aligned} R_{jl} &= r_{jl} + t_{jr}(G_{jr}^{-1} - r_{jr})^{-1}t_{jl} \\ R_{jr} &= r_{jr} + t_{jl}(G_{jl}^{-1} - r_{jl})^{-1}t_{jr} \\ R_{1r} &= r_{1r}, \quad R_{nl} = r_{nl} \\ G_{jl} &= H_{j-1}R_{j-1r}H_{j-1} \\ G_{jr} &= H_jR_{j+1l}H_j \\ j &= 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

式中 H_j 为第 j 个子梁的传递矩阵.

$$H_j = \text{diag}(\exp(-i\gamma_j l_j), \exp(-\gamma_j l_j), \exp(-i\tilde{\gamma}_j l_j)) \quad (15b)$$

其中相邻单元在节点 j 左端入射波 a_{jl}^+ 和右端反射波 a_{jr}^+ 、右端入射波 a_{jr}^- 和左端反射波 a_{jl}^- 传递矩阵还满足如下关系

$$\left. \begin{aligned} a_{jr}^+ &= \tilde{T}_{jl} a_{jl}^+, \quad \tilde{T}_{jl} = (1 - r_{jr} G_{jr})^{-1} t_{jl} \\ a_{jl}^- &= \tilde{T}_{jr} a_{jr}^-, \quad \tilde{T}_{jr} = (1 - r_{jl} G_{jl})^{-1} t_{jr} \\ j &= 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中 $\tilde{T}_{jl}, \tilde{T}_{jr}$ 分别为节点 j 左端和右端入射波和反射波的系统传递系数矩阵.

综合式 (14) 和式 (16) 可以得到节点 j 左端入射波 a_{jl}^+ 沿整体结构经历一个波动循环的波传播路径为

$$\begin{aligned} a_{jl}^+ &\xrightarrow{\tilde{T}_{jl}} a_{jr}^+ \xrightarrow{H_j} a_{j+1l}^+ \xrightarrow{\tilde{T}_{j+1l}} \dots a_{nl}^+ \xrightarrow{R_{nl}} a_{nl}^- \\ &\xrightarrow{H_{n-1}^{-1}} a_{n-1r}^- \xrightarrow{\tilde{T}_{n-1r}} a_{n-1l}^- \dots \xrightarrow{H_1} a_{1r}^- \xrightarrow{R_{1r}} a_{1r}^+ \\ &\xrightarrow{H_1} a_{2l}^+ \dots \xrightarrow{\tilde{T}_{j-1}} a_{j-1r}^+ \xrightarrow{H_{j-1}^{-1}} a_{jl}^+ \end{aligned}$$

观察式 (16) 可以得出结论, 压电作动器对整体结构的驱动能力决定于各子梁的传递矩阵 H 和传递系数 \tilde{T}_{jl} , 当传递系数 \tilde{T}_{jl} 幅值越大, 压电驱动能力越强.

进一步, 可得到节点 j 左端的入射波 a_{jl}^+ (或右端入射波的 a_{jr}^-) 经历一个波动循环满足如下关系

$$\left. \begin{aligned} a_{jl}^+ &= \Gamma_{jl} a_{jl}^+, \quad \Gamma_{jl} = G_{jl} R_{jl} \\ a_{jr}^- &= \Gamma_{jr} a_{jr}^-, \quad \Gamma_{jr} = G_{jr} R_{jr} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中 Γ_{jl}, Γ_{jr} 分别为左右端入射波的波循环矩阵.

节点 j 左右入射波和反射波系数完成一个波动循环具有如图 4 所示的关系.

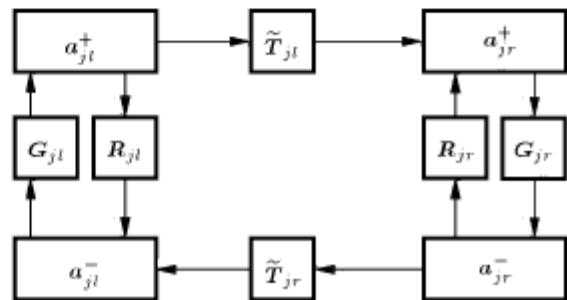


图 4 波循环后节点 j 振动波反射与传递关系示意图

Fig.4 Waves reflection and transmission in wave loop at junction j

3 系统自由和强迫响应分析

3.1 自由响应分析

实际结构振动是一个振动波无限重复传播循环过程. 结构固有振动的模态 (驻波) 是由波幅相等且传播反相的行波叠加, 而当采用行波的方法分析系统的固有模态时, 由相位原理知, 入射波沿整体结构传播, 经历一个波动循环, 入射波之间的相位差相差 2π 的整数倍, 则系统发生共振.

故当波循环矩阵 Γ_{jl} 的特征值 ρ_l 的模或其相位角 θ

$$\|\rho_l\| \geq 1 \text{ 或 } \theta = 2k\pi \quad (18)$$

对应的圆频率为系统的共振频率. 由于各节点波循环矩阵反映了振动波沿整体结构的传递和反射特性, 因此, 选用任意节点波循环矩阵计算结构固有频率, 则有相同的数值解. 采用波循环矩阵计算系统的固有频率的优点, 是仅需对一个维数较低的矩阵计算, 大大提高了计算效率.

3.2 强迫响应分析

如果系统共有 n 个节点, 可以通过组集各节点的入射波、反射波以及外力矩阵来获得系统的方程. 定义系统在各节点的入射波 Z_i 和反射波 Z_o 分别为

$$\left. \begin{aligned} Z_o &= [a_{1r}^+ \ a_{2l}^- \ a_{2r}^+ \ \cdots \ a_{n-1r}^- \ a_{n-1r}^+ \ a_{nl}^-]^T \\ Z_i &= [a_{1r}^- \ a_{2l}^+ \ a_{2r}^- \ \cdots \ a_{n-1r}^+ \ a_{n-1r}^- \ a_{nl}^+]^T \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

按节点叠加将得到系统的行波方程

$$Z_o = SZ_i + e \quad (20)$$

式中 S 为系统的色散矩阵, e 为系统外力矩阵引起的入射波矩阵.

由于各节点入射波、反射波为未知, 故必须寻求一组关系才能求解. 引入一组中间变量, 定义各节点右端入射波和出射波分别为

$$Z_r = [a_{1r}^+ \ a_{1r}^- \ a_{2r}^+ \ \cdots \ a_{n-2r}^- \ a_{n-1r}^+ \ a_{n-1r}^-]^T \quad (21)$$

则应用子梁波传递矩阵式 (15b), 有

$$\left. \begin{aligned} Z_r &= \widetilde{H}Z_o \\ Z_i &= \widetilde{H}Z_r \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中 \widetilde{H} , \widetilde{H} 为波的转换矩阵.

$$\widetilde{H} = \text{diag} \left(\left[\begin{array}{cc} I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & H_1 \end{array} \right], \cdots, \left[\begin{array}{cc} I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & H_{n-1} \end{array} \right] \right)$$

$$\widetilde{H} = \text{diag} \left(\left[\begin{array}{cc} 0 & I_{3 \times 3} \\ H_1 & 0 \end{array} \right], \cdots, \left[\begin{array}{cc} 0 & I_{3 \times 3} \\ H_{n-1} & 0 \end{array} \right] \right)$$

将式 (22) 代入式 (20) 并整理可确定节点右端入射波和出射波为

$$Z_r = (I - \widetilde{H}S\widetilde{H})^{-1}\widetilde{H}e \quad (23)$$

将式 (23) 代入 (22) 后, 确定各节点的入射波 Z_i 和反射波 Z_o . 应用式 (8), 则可求出阶梯梁中任一点处的位移. 在第 j 子梁内的 ζ 处节点位移频响函数为

$$W_j(\zeta, \omega) = \psi_j^+(H(\zeta) + H(l - \zeta)R_{jl}H(l - \zeta))a_{jr}^+ \quad (24)$$

4 结果与讨论

4.1 阶梯梁固有频率和频响函数

为了验证行波方法动力学分析的有效性, 考虑一未粘贴压电陶瓷单位长度的悬臂梁, 分别用解析法、行波方法以及有限元方法计算该梁的固有频率.

为了讨论问题的方便, 定义 $\alpha_0 = E_b I_b / \rho_b A_b$, $\beta_0 = (l^2 / \alpha_0)(E_b / \rho_b)$, 则梁的无量纲固有频率为 $\omega = \Omega l^2 / \sqrt{\alpha_0}$, Ω 为系统的有量纲固有频率.

应用行波方法和有限元方法计算梁的前 30 阶固有频率与解析解比值比较结果见图 5.

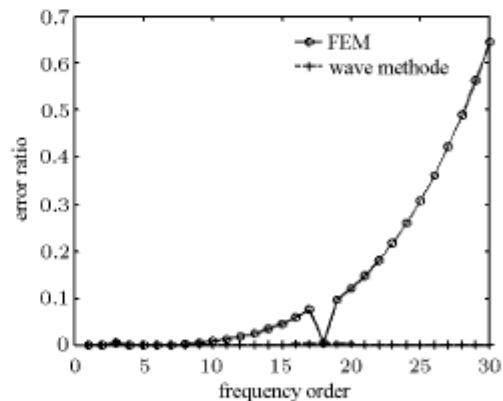


图 5 无量纲固有频率的误差比
Fig.5 Nature frequencies error ratio

前 30 阶固有频率的计算两者相对误差不超过 1%; 随着固有频率阶次的增高, 有限元方法误差逐渐增大, 其中第 17 阶固有频率误差较小, 其原因为该阶固有频率为梁纵向振动第一阶固有频率, 由于

有限元的纵向振动和横向振动的单元型函数不同、且无关，故横向振动单元型函数误差积累不影响纵向振动频率的计算精度。而行波法计算精度不随着固有频率阶次的增高而下降。因此上行波方法的计算结果同于梁固有频率的解析解。

在距离梁固定端 $x = 0.1$ 处上下粘贴一对长度为 $l_p = 0.1$ 的压电片，粘贴压电片段梁的无量纲参数 $\alpha = 1.92\alpha_0$, $\beta = 101\beta_0$ 。采用行波方法和有限元方法计算阶梯梁前五阶固有频率的计算结果如表 1。与无压电梁比较，粘贴压电片后，梁的第一阶固有频率明显增大，第二到第五阶固有频率下降，究其原因，粘贴压电片后阶梯梁刚度和质量均增加，刚度增加导致固有频率增大；而质量增加导致固有频率下降。第二到第五阶模态质量增加比值大于模态刚度增加比值，系统固有频率下降。另一方面，比较有限元和行波方法计算结果，两者的计算低频的固有频率值基本一致。而行波方法具有编程简单、计算精度高的优点。

表 1 阶梯梁前五阶固有频率

Table 1 The first-fifth nature frequency of the stepped beam

Order	Wave method	FEM	Analytic results without PZT patch
1	4.045	4.045	3.5156
2	21.345	21.345	22.034
3	52.753	52.753	61.701
4	108.011	107.941	120.903
5	192.252	192.078	199.859

考虑压电陶瓷施加单位弯矩作用下，激振频率范围为 $1 \sim 200$ ，采用行波方法和有限元方法计算阶梯梁的 $x = 0.75$ 处横向位移和转角位移的频响函数如图 6 和图 7 所示。由图 6、图 7 可观察知，对于

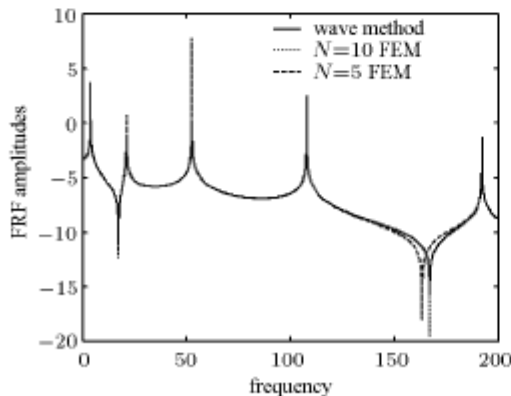


图 6 $x = 0.75$ 处横向位移频响函数

Fig.6 The transverse displacement FRF at $x = 0.75$

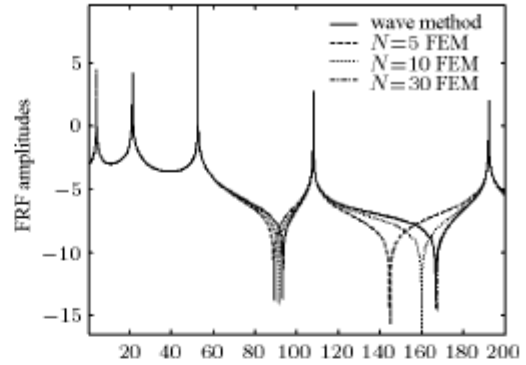


图 7 $x = 0.75$ 处转角位移频响函数

Fig.7 The slope displacement FRF at $x = 0.75$

横向位移的频响曲线，有限元方法需要 10 阶模态才能逼近行波方法的计算结果；而对转角位移，有限元方法需要 30 阶模态才能逼近行波方法的计算结果。有限元方法横向位移精度较高、转角位移精度较低，其原因是转角函数的插值函数比横向位移低一阶造成的。

4.2 压电波传播

在振动主动控制研究中，压电作动器的位置优化一直是研究热点。这里通过研究压电入射波传递特性研究压电作动器的驱动能力。压电波在不连续界面传递系数幅值的大小决定了压电作动器对整体系统的驱动能力。传递系数幅值与作动器在阶梯梁的位置密切相关。

在压电阶梯梁上，对称的压电片在基梁上产生一弯矩，基梁上产生一组弯曲的行波和消失波。由于振动波传播是通过行波载能，因而这里选用粘贴压电层梁内弯曲行波与基梁内弯曲行波的幅值比值作为指标，研究压电陶瓷在不同位置时作动器作动能力。

图 8 给出了压电陶瓷粘贴在离梁固定端距离分别为 $x = 0.1, 0.5, 0.8$ 时，压电波传递到基梁的弯曲行波传递系数随频率变化示意图。

由图观察可知，在 3 种不同的位置，压电波的传递系数的范围为 $1.9 \sim 2.9$ ，表明了压电波传递到基梁后行波幅值增大，其原因在于压电梁和基梁连接界面不连续、阻抗不匹配，压电入射的消失波色散为行波，增大了基梁内行波幅值。

另一方面，压电陶瓷粘贴在 $x = 0.1$ 处时，频率在 $0 \sim 60$ 范围内，行波传递系数有一“下陷区”。而在其余频率区域行波传递系数近似为一常量；压电陶瓷粘贴在 $x = 0.5$ 和 $x = 0.8$ 处时，行波传递系数

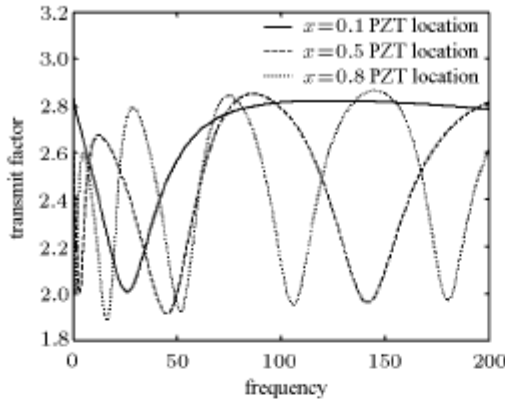


图 8 频率对阶梯梁波传递系数的影响

Fig.8 The transmission coefficients varies with the frequency

“下陷区”频段增多，整体驱动能力下降。行波传递系数“下陷区”表明了压电陶瓷作动器在各频段的驱动能力有所不同，究其原因在于压电陶瓷作动器在不同的位置、对行波能量的反射和传递限制能力不同。

为了研究作动器位置对压电作动器驱动能力的影响，引入模态波传递系数，即各阶共振频率时的行波传递系数。压电作动器在悬臂梁不同位置时前三阶固有频率的变化见图 9。图 9 给出压电阶梯梁的固有频率和无压电片梁的固有频率比值。随着压电作动器位置离固定端距离越远，阶梯梁一阶固有频率呈直线下降趋势；二阶固有频率先下降再上升再下降，有一个拐点 ($x = 0.42$)；三阶固有频率变化更为复杂，有两个拐点 ($x = 0.19$ 和 $x = 0.64$)。

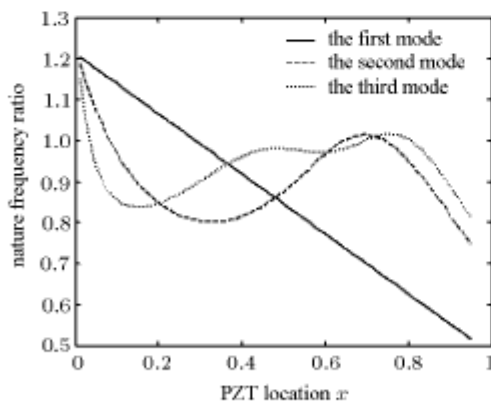


图 9 压电片位置对阶梯梁前三阶固有频率的影响

Fig.9 The nature frequencies varies with the PZT position

图 10 给出了压电作动器在悬臂梁不同位置时前三阶模态的波传递系数图。由图可观察知，第一阶模态波传递系数随着离固定端的距离增加呈下降趋

势，当 $x = 0.5$ 波传递系数达到极小值，随着离自由端距离越近，波传递系数略有增加。究其原因，压电作动器靠近悬臂梁边界时，压电入射的弯曲行波通过基梁传播到达梁的边界（无论是自由端还是固定端），经边界反射产生一组反射的行波和消失波，反射的消失波又入射压电作动器与基梁的界面，又经反射、色散后增大了基梁行波的幅值，进而增大了模态的波传递系数。当作动器离边界距离越短，反射的消失波起的作用越大。而另一方面，由于固定端和自由端对振动波反射的特性不同，导致了在固定端附近波传递系数大，表明作动器在固定端的驱动效果优于自由端。

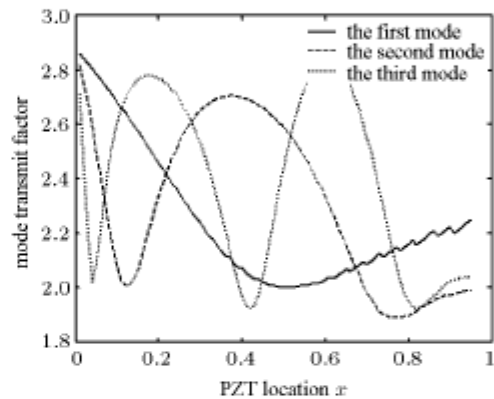


图 10 压电片的位置对各阶模态幅值传递系数的影响

Fig.10 The modal transmission coefficients varies with the PZT position

第二阶和第三阶模态的波传递系数的变化呈波状。作动器离梁的边界（自由端或固定端）越近，波的传递系数越大；同时，频率越高模态波传递系数的局部极小值越靠近边界。另外，第二阶和第三阶波传递系数是局部极大值时，该处对应该阶固有频率变化的拐点，即“曲率转向”。各阶固有频率变化的拐点，对应着该阶固有频率的灵敏度极值点。这表明了压电作动器最优位置应为结构固有频率灵敏度最大的点。

作动器的位置应选各阶模态波传递系数为大值才为合理。

5 结 论

本文提供了采用行波的方法对压电阶梯梁的自由振动和强迫响应的分析方法。研究了作动器的位置对其驱动能力的影响，通过数值仿真得出以下几点结论：

- (1) 通过对阶梯梁的固有频率仿真计算，有限元

方法和行波方法在低阶模态计算方面具有一致计算精度, 随着模态阶次的提高有限元的精度有所下降, 而行波方法关于模态的计算精度不随固有频率阶次的增高而计算精度下降。

(2) 通过对阶梯梁的频响函数仿真计算, 对于阶梯梁的横向位移频响函数有限元方法需要较少模态 ($N = 10$) 就能逼近行波方法的计算结果; 而对于转角位移的频响函数逼近行波方法的计算结果需要更多的模态 ($N = 30$), 原因为转角位移的插值函数是横向位移的插值函数的导数, 其单元的插值函数的阶次比横向位移插值函数的阶次低。

(3) 通过研究波传递矩阵的系数, 可以发现压电陶瓷的位置对波传播能力有很大的影响。靠近悬臂梁固定端, 压电驱动波的传递系数在整个频带内传递能力最强, 离固定端距离增加, 传递系数“下陷”区域增多。

(4) 通过研究模态行波幅值的传递系数, 可以发现当作动器靠近梁边界时, 悬臂梁边界反射行波产生弯曲消失波有利于增大压电波的模态传递系数; 同时模态传递系数与固有频率的变化密切相关, 即波传递系数局部极大对应该处固有频率灵敏度最大, 固有频率的曲率转向决定了模态传递系数的变化。

总之, 进一步开展压电阶梯梁的参数优化设计、研究阶梯梁的主动控制方法和策略, 通过实验验证波动控制对波传播特性的影响, 在航空航天工程等应用方面有着十分重要的意义。

参 考 文 献

- 1 Mei C, Mace B, Jonns R. Hybrid wave-mode active vibration control. *J Sound & Vib*, 2001, 247(5): 765~784
- 2 Kessissoglou N. An analytical and experimental investigation on active control of the flexural wave transmission in a simply supported ribbed plate. *J Sound & Vib*, 2001, 240(1): 73~85
- 3 Lee SY, Mote CD. Wave characteristics and vibration control of translating beams by optimal boundary damping. *ASME J Vib & Acou*, 1999, 121(1): 18~27
- 4 Von Flotow A. Travelling wave control for large spacecraft structures. *J Guidance, Control and Dyns*, 1986, 9(4): 462~468
- 5 Miller DW, von Flotow A. A travelling wave approach to power flow in structural networks. *J Sound & Vib*, 1989, 128(1): 145~162
- 6 程伟, 诸德超, 王大钧. 梁波传播的固有特性. *力学学报*, 1997, 18(2): 175~181(Cheng Wei, Zhu Dechao, Wang Dajun. Natural characteristics of wave propagation in beam. *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 18(2): 175~181(in Chinese))
- 7 朱桂东, 郑钢铁, 邵成勋. 带梁式附件航天器姿态动力学的行波模型. *宇航学报*, 1998, 19(4): 37~44(Zhu Guidong, Zheng Gangtie, Shao Chengxun. Travelling wave model for spacecraft with beam-like appendages. *J Astronautics*, 1998, 19(4): 37~44(in Chinese))
- 8 Ishak SI, Liu GR, Lim SP. Characterization of delamination in beams using flexural wave scattering analysis. *ASME J Vib & Acou*, 2001, 123(4): 421~427
- 9 Baz A. Boundary control of beams using active constrained layer damping. *ASME J Vib & Acou*, 1997, 119(2): 166~172

WAVE MODE CHARACTERISTICS ON PIEZO-ELECTRIC STEPPED BEAM¹⁾

Ren Jianting Jiang Jiasheng

(*Institute of Vibration Engineering, Northwest Polytechnic University, Xi'an 710072, China*)

Abstract In this paper, a systematic approach for the free vibration analysis and forced-response of the beam bonded with PZT patches is presented employing the travelling wave method.

The wave propagation characteristic of the stepped beam bonded with PZT patches is studied based on distributed parameters theories. Neglecting the effect of transverse shear and rotary inertia, harmonic wave solutions are found for both flexible and axial vibration of beam models. Then, the system is simplified into a node model considering multiple point discontinuities due to attached masses, and actuated moment of PZT patches. And wave scattering matrices including wave reflection and transmission matrices in nodes are formulated by applying the compatibility of displacements and equilibrium of forces at the junctions. Based on the above work, the concept of the wave loop, which is the process when the vibration wave comes through a periods along the wave propagation paths, is introduced, and wave loops and transmission matrices are derived accounting for general boundary conditions. Therefore, the wave loops matrices combined with the aid of field transfer matrices provides a concise and efficient method to solve the free vibration problem of beam bonded with PZT patches. The frequencies and response solutions are exact since the effects of attenuating wave components are included in the formulation. Furthermore, the general relations between the flexural wave transmission factor and the position of the PZT actuator in structures is discussed too. The numerical results give two major conclusions: 1) the PZT patch bonded position near by the fixed-end in beam has the powerful actuated capability, because the attenuating wave components created by the active wave incident upon the discontinuities boundary enhance the transmission effectiveness of the active traveling wave propagation; 2) the modulus of the mode transmission factor has a close relation with the sensitivity of the nature frequencies. The bigger modulus of the mode transmission factor, the bigger sensitivities factor of the nature frequencies is.

In addition, a comparison of eigenvalues and frequency response function obtained by finite element method (FEM) and the wave method respectively is also presented. It is indicated that the result by the wave method is more exact than one by FEM.

Key words wave propagation, wave reflection and transmission, wave loops, stepped beam

Received 31 May 2003, revised 3 June 2004.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10202020).