

压电空心圆柱中波的传播¹⁾

魏建萍 苏先槩

(北京大学力学与科学工程系, 北京 100871)

摘要 应用三维压电弹性体轴对称模型对压电空心圆柱中波的传播进行了研究. 发现在圆柱中是否具有压电性质会对波的传播带来显著的差异. 当波长趋向于零时, 在压电圆柱中拟 P 波的波速渐进趋向于横观各向同性弹性体的准 P 波波速, 而非压电圆柱中拟 P 波的波速渐进趋向于一维杆模型中的 P 波波速; 在压电圆柱中拟 SV 波存在驻波现象. 圆柱中的 SH 波同电场无关, 所以在压电圆柱和非压电圆柱中 SH 波具有相同的频散曲线. 应用积分变换方法将圆柱的控制方程同其侧边界条件相结合, 得到了一组动力学方程. 针对具体的侧边界条件, 得到相对应的波导条件和频散方程. 在此基础上通过数值计算模拟了圆柱受到端部应力脉冲激励后的瞬态响应. 同时讨论了空心圆柱的半径比对轴向波传播的影响.

关键词 压电空心圆柱, 波导条件, 频散关系

引 言

压电材料具有优越的机电双向性能. 这种材料被广泛应用于科学技术领域和工程实践中. 目前压电材料主要被制作成为传感器和激励器等智能器件中的敏感元件, 以薄层、薄膜、涂层等方式附着在基体上形成机构, 这样使得我们只需考虑这种材料同外围环境之间的机电关系. 然而随着生产技术的进步和应用领域需求的增加, 压电材料已经不再被仅仅局限于制作敏感元件等附属器件, 而是在被考虑制作成为独立的结构单元. 此时需要这个结构单元既能实现同外围环境之间的信息转换, 又能承担与结构相适应的荷载. 因此在压电材料作为整体结构应用时, 需要知道这种材料的整体力学行为.

对于应用压电材料制作敏感元件等附属器件方面的力学行为的研究相当丰富, 文献 [1~7] 中详细地讨论了在以薄层形式的压电材料或者在薄层压电材料与其基体上施加 SH 波、Lamb 波、Love 波以及 Rayleigh 波后, 压电材料与其基体之间的机电关系. 对于压电材料整体力学行为的研究尚处在初期阶段, Wang 等 [8] 用微分算子方法得到了压电材料三维问题的静力学通解. Ding 等 [9] 讨论了在电场径向极化模型中, 压电圆柱在轴对称平面应变条件下波的径向传播. Ding 等 [10] 讨论了在压电圆柱壳体中充满可压缩液体后的自由振动问题. 由于压电

材料的机电结构相当复杂, 为了比较容易说明问题的实质, 通常用横观各向同性压电弹性体力学系统模型来刻画, 从而初步解释压电弹性体整体力学行为的基本性能.

本文应用三维压电弹性体轴对称模型对压电空心圆柱中波的传播进行了研究. 发现在圆柱中是否具有压电性质会对波的传播带来显著的差异. 当波长趋向于零时, 在压电圆柱中拟 P 波的波速渐进趋向于横观各向同性弹性体的准 P 波波速, 而非压电圆柱中拟 P 波的波速渐进趋向于一维杆模型中的 P 波波速; 在压电圆柱中拟 SV 波存在驻波现象. 因为采用电场轴向极化模型, 圆柱中的 SH 波同电场无关, 所以在压电圆柱和非压电圆柱中 SH 波具有相同的频散曲线. 文中应用积分变换方法将圆柱的控制方程同其侧边界条件相结合, 得到了一组动力学方程. 针对具体的侧边界条件, 得到同这个侧边界条件相对应的波导条件和频散方程. 在此基础上通过数值计算模拟了圆柱受到端部应力脉冲激励后的瞬态响应. 最后文中还讨论了空心圆柱的半径比对轴向波传播的影响.

1 基本方程

在柱坐标系 (r, θ, z) 中考虑压电空心圆柱问题, 基本方程如下

2003-12-03 收到第 1 稿, 2004-06-21 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10172004, 10232040).

$$\text{运动方程 } \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\text{电场的库伦定律 } D_{i,i} = q \quad (2)$$

材料的本构关系 (文中采用电场轴向极化模型)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} s_{kl} - e_{kij} E_k \quad (3)$$

$$D_i = e_{ikt} s_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k \quad (4)$$

$$\text{应变与位移的关系 } s_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5)$$

电场强度同电势函数间的关系

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (6)$$

其中, $\sigma, s, D, E, u, \rho, f, q, \phi$ 分别为应力张量、应变张量、电位移矢量、电场强度矢量、位移矢量、体密度、体分布力矢量、体自由电荷密度和电势函数. $C_{ijkl}, e_{kij}, \varepsilon_{ik}$ 分别为弹性常数、压电系数和介电常数.

2 方程的求解

假设压电空心圆柱的内外半径分别为 a 和 b , 半径比为 $d = a/b$. 对材料参数和方程变量进行如下形式的无量纲化.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{b}, \quad \bar{z} = \frac{z}{b}, \quad \bar{t} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \frac{t}{b}, \quad u = \frac{u_r}{b}, \quad v = \frac{u_\theta}{b} \\ w &= \frac{u_z}{b}, \quad \varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_{33}}{C_{33}}} \frac{\phi}{b}, \quad c_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad c_2 = \frac{C_{12}}{C_{33}} \\ c_3 &= \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad c_4 = \frac{C_{55}}{C_{33}}, \quad c_5 = \frac{C_{66}}{C_{33}} \\ e_1 &= \frac{e_{15}}{\sqrt{C_{33}\varepsilon_{33}}}, \quad e_2 = \frac{e_{31}}{\sqrt{C_{33}\varepsilon_{33}}}, \quad e_3 = \frac{e_{33}}{\sqrt{C_{33}\varepsilon_{33}}} \\ \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_r}{C_{33}}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_\theta}{C_{33}} \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_z}{C_{33}}, \quad \sigma_4 = \frac{\tau_{\theta z}}{C_{33}}, \quad \sigma_5 = \frac{\tau_{zr}}{C_{33}}, \quad \sigma_6 = \frac{\tau_{r\theta}}{C_{33}} \\ D_1 &= \frac{D_r}{\sqrt{C_{33}\varepsilon_{33}}}, \quad D_2 = \frac{D_\theta}{\sqrt{C_{33}\varepsilon_{33}}}, \quad D_3 = \frac{D_z}{\sqrt{C_{33}\varepsilon_{33}}} \end{aligned}$$

然后将式 (3)~(6) 代入式 (1) 和式 (2), 在圆柱坐标系中考虑到轴对称情况, 并且在不计体分布力和

体自由电荷密度的情况下, 得到下面由位移和电势函数组成的方程组, 为了书写方便将方程中的符号 $\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}$ 仍旧用 r, z, t 表示

$$c_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u \right) + c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + c_4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (e_1 + e_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$c_5 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v \right) + c_4 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$c_3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + c_4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + e_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + e_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9)$$

$$e_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + e_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + e_3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (10)$$

从方程 (7)~(10) 中可以看到, 在电场轴向极化模型中, 径向位移 u , 轴向位移 w 和电势函数 φ 三者之间相互耦合; 而环向位移 v 同 u, w, φ 是分离的. 由于我们将要考虑无限长压电圆柱中的频散关系, 所以只需要关注圆柱的侧边界条件; 应用有限 Hankel 积分变换^[11] 将圆柱的控制方程同圆柱的侧边界条件相结合. 有限 Hankel 积分变换的形式如下

$$f^{H_\nu}(\mu) = \int_d^1 f(r) H_\nu(\mu r) r dr, \quad \nu = 0, 1 \quad (11)$$

其中 $H_\nu(\mu r) = J_\nu(\mu r) + i Y_\nu(\mu r)$, $J_\nu(\mu r)$ 和 $Y_\nu(\mu r)$ 分别是第一类和第二类 Bessel 函数, 取 $\nu = 0, 1$ 分别是零阶和一阶 Hankel 函数, $i = \sqrt{-1}$. 积分下限 d 是空心圆柱的半径比. 当 $d = 0$ 时, 即对实心圆柱作 Bessel 积分变换, 只需将 Hankel 函数取为 $H_\nu(\mu r) = J_\nu(\mu r)$. 对式 (7) 和式 (8) 作一阶有限 Hankel 积分变换, 对式 (9) 和式 (10) 作零阶有限 Hankel 积分变换, 并且写成微分算子矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} c_1 \mu^2 - c_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} & (c_3 + c_4) \mu \frac{\partial}{\partial z} & (e_1 + e_2) \mu \frac{\partial}{\partial z} \\ (c_3 + c_4) \mu \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} - c_4 \mu^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} & -e_1 \mu^2 + e_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ (e_1 + e_2) \mu \frac{\partial}{\partial z} & -e_1 \mu^2 + e_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \varepsilon_1 \mu^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{H_1} \\ w^{H_0} \\ \varphi^{H_0} \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{l} c_1 H_1(\mu r) u + c_1 H_1(\mu r) r \frac{\partial u}{\partial r} - c_1 \mu r H_0(\mu r) u + (c_3 + c_4) H_1(\mu r) r \frac{\partial w}{\partial z} + (e_1 + e_2) H_1(\mu r) r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ -(c_3 + c_4) r H_0(\mu r) \frac{\partial u}{\partial z} - c_4 H_0(\mu r) r \frac{\partial w}{\partial r} - c_4 \mu r H_1(\mu r) w - e_1 H_0(\mu r) r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - e_1 \mu r H_1(\mu r) \varphi \\ -e_1 H_0(\mu r) r \frac{\partial w}{\partial r} - e_1 \mu r H_1(\mu r) w - (e_1 + e_2) r H_0(\mu r) \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_1 r H_0(\mu r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \varepsilon_1 \mu r H_1(\mu r) \varphi \end{array} \right]_{r=1,d} \quad (12a)$$

$$c_5 \mu^2 v^{H_1} - c_4 \frac{\partial^2 v^{H_1}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v^{H_1}}{\partial t^2} = \left[c_5 H_1(\mu r) v + c_5 H_1(\mu r) r \frac{\partial v}{\partial r} - c_5 \mu r H_0(\mu r) v \right]_{r=1,d} \quad (12b)$$

其中 $[F(r)]_{r=1,d} = F(1) - F(d)$. 这时式 (12a), (12b) 式

即为压电空心圆柱的控制方程结合侧边界条件后在 $(\mu: z, t)$ 域中的动力学方程. 其中式 (12b) 仅是环向位移 v 的方程.

假设沿轴向传播的波表示为

$$u(r, z, t) = f_1(r) e^{i(kz - \omega t)} \quad (13)$$

$$w(r, z, t) = f_2(r) e^{i(kz - \omega t)} \quad (14)$$

$$\phi(r, z, t) = f_3(r) e^{i(kz - \omega t)} \quad (15)$$

$$v(r, z, t) = f_4(r) e^{i(kz - \omega t)} \quad (16)$$

$$u^{H_1} = A_1(\mu) e^{i(kz - \omega t)} \quad (17)$$

$$w^{H_0} = A_2(\mu) e^{i(kz - \omega t)} \quad (18)$$

$$\varphi^{H_0} = A_3(\mu) e^{i(kz - \omega t)} \quad (19)$$

$$v^{H_1} = A_4(\mu) e^{i(kz - \omega t)} \quad (20)$$

其中, $A_j(\mu) = \int_d^1 f_j(r) H_\nu(\mu r) r dr, j = 1, 2, 3, 4$, 当 $j = 1, 4$ 时, $\nu = 1$; 当 $j = 2, 3$ 时, $\nu = 0$.

其中, $f_j(r) (j = 1, 2, 3, 4)$ 是波幅系数, k 是波数, ω 是圆频率. 那么 $u^{H_1}, v^{H_1}, w^{H_0}, \varphi^{H_0}$ 具有如下的形

将式 (17)~(20) 代入方程 (12a), (12b) 的左端, 简化后有下列形式

$$\left[\begin{array}{ccc} c_1 \mu^2 + c_4 k^2 - \omega^2 & i(c_3 + c_4) \mu k & i(e_1 + e_2) \mu k \\ i(c_3 + c_4) \mu k & -k^2 - c_4 \mu^2 + \omega^2 & -e_1 \mu^2 - e_3 k^2 \\ i(e_1 + e_2) \mu k & -e_1 \mu^2 - e_3 k^2 & \varepsilon_1 \mu^2 + k^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} A_1(\mu) e^{i(kz - \omega t)} \\ A_2(\mu) e^{i(kz - \omega t)} \\ A_3(\mu) e^{i(kz - \omega t)} \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{l} c_1 H_1(\mu r) u + c_1 H_1(\mu r) r \frac{\partial u}{\partial r} - c_1 \mu r H_0(\mu r) u + (c_3 + c_4) H_1(\mu r) r \frac{\partial w}{\partial z} + (e_1 + e_2) H_1(\mu r) r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ -(c_3 + c_4) r H_0(\mu r) \frac{\partial u}{\partial z} - c_4 H_0(\mu r) r \frac{\partial w}{\partial r} - c_4 \mu r H_1(\mu r) w - e_1 H_0(\mu r) r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - e_1 \mu r H_1(\mu r) \varphi \\ -e_1 H_0(\mu r) r \frac{\partial w}{\partial r} - e_1 \mu r H_1(\mu r) w - (e_1 + e_2) r H_0(\mu r) \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_1 r H_0(\mu r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \varepsilon_1 \mu r H_1(\mu r) \varphi \end{array} \right]_{r=1,d} \quad (21a)$$

$$(c_5 \mu^2 + c_4 k^2 - \omega^2) A_4(\mu) e^{i(kz - \omega t)} = \left[c_5 H_1(\mu r) v + c_5 H_1(\mu r) r \frac{\partial v}{\partial r} - c_5 \mu r H_0(\mu r) v \right]_{r=1,d} \quad (21b)$$

这时方程 (21a), (21b) 是关于参数 (μ, k, ω) 的方程组. 在选定侧边界条件后, 通过计算确定相应的 μ 值, 即确定了在这种侧边界条件下的波导条件, 从而得到在这种侧边界条件下关于 (k, ω) 的频散方程.

在圆柱中, 我们选取如下的两组侧边界条件
弹性简支 bi

$$\left. \begin{array}{l} w = 0, r\sigma_1 + 2c_5 u = 0, \\ r\sigma_6 + 2c_5 v = 0 \text{ (应力、位移条件)} \\ \varphi = 0 \text{ (电场条件)} \end{array} \right\} \quad (22)$$

刚性滑支 bii

$$\left. \begin{array}{l} u = 0, v = 0, \sigma_5 = 0 \text{ (应力、位移条件)} \\ D_1 = 0 \text{ (电场条件)} \end{array} \right\} \quad (23)$$

用式 (22) 和式 (23) 两组侧边界条件可以构成 4 组压电空心圆柱的内外侧边界条件, 即 (bi-bi, bii-bii, bi-bii, bii-bi). 分别将这 4 组侧边界条件代入方程 (21a), (21b) 的右端, 可以得到方程 (21a), (21b) 的右端为零. 此时方程 (21a), (21b) 可简化为如下的形式

$$\begin{bmatrix} c_1\mu^2 + c_4k^2 - \omega^2 & i(c_3 + c_4)\mu k & i(e_1 + e_2)\mu k \\ i(c_3 + c_4)\mu k & -k^2 - c_4\mu^2 + \omega^2 & -e_1\mu^2 - e_3k^2 \\ i(e_1 + e_2)\mu k & -e_1\mu^2 - e_3k^2 & \varepsilon_1\mu^2 + k^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1(\mu) \\ A_2(\mu) \\ A_3(\mu) \end{bmatrix} = 0 \quad (24a)$$

$$(c_5\mu^2 + c_4k^2 - \omega^2)A_4(\mu) = 0 \quad (24b)$$

其中, 波导条件 μ , 分别由下列方程确定

$$J_0(\mu)Y_0(\mu d) - Y_0(\mu)J_0(\mu d) = 0 \quad (25)$$

$$J_1(\mu)Y_1(\mu d) - Y_1(\mu)J_1(\mu d) = 0 \quad (26)$$

$$J_1(\mu)Y_0(\mu d) - Y_1(\mu)J_0(\mu d) = 0 \quad (27)$$

$$J_0(\mu)Y_1(\mu d) - Y_0(\mu)J_1(\mu d) = 0 \quad (28)$$

由于波在传播时, 波幅系数不全为零, 所以要求方程 (24a), (24b) 的系数行列式等于零

$$\det \begin{pmatrix} c_1\mu^2 + c_4k^2 - \omega^2 & i(c_3 + c_4)\mu k & i(e_1 + e_2)\mu k \\ i(c_3 + c_4)\mu k & -k^2 - c_4\mu^2 + \omega^2 & -e_1\mu^2 - e_3k^2 \\ i(e_1 + e_2)\mu k & -e_1\mu^2 - e_3k^2 & \varepsilon_1\mu^2 + k^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (29a)$$

$$\det(c_5\mu^2 + c_4k^2 - \omega^2) = 0 \quad (29b)$$

那么式 (29a), (29b), 即为在 (bi-bi, bii-bii, bi-bii, bii-bi) 4 组侧边界下的压电空心圆柱的频散方程。其中等式 (29a) 是关于径向位移 u , 轴向位移 w 和电势函数 φ 的频散曲线 (拟 P 波和拟 SV 波); 式 (29b) 是关于环向位移 v 的频散曲线 (SH 波)。

计算出的波导条件 μ 值是一个序列, 记为 $\mu_n, n = 1, 2, 3, \dots$ 并且同半径比 d 相关。在计算波导条件 μ_n 序列时采用下列参数 $c_1 = 121/117, c_2 = 53/78, c_3 = 841/1170, c_4 = 23/117, c_5 = 83/468, e_1 = 17/39, e_2 = -1/6, e_3 = 233/390, \varepsilon_1 = 15/13$ 。为了方便比较压电圆柱同非压电圆柱间的区别, 在计算非压电空心圆柱的频散曲线时采用压电空心圆柱的力学参数。

3 频散曲线和动态响应

在这一小节中, 将分别计算侧边界条件为刚性滑支 - 刚性滑支 (bii-bii) 和弹性简支 - 刚性滑支 (bi-bii) 的波导条件, 并且数值模拟圆柱受到端部激励下

的瞬态响应。由方程 (26) 和 (27), 分别计算出半径比 $d = 0.1$ 和 $d = 0.5$ 时的波导条件 μ_n 序列。

图 1 是在 (bii-bii) 侧边界条件下半径比 $d = 0.1$ 的空心圆柱的频散曲线。图例中标号 pie-elec 和 non-pie-elec 分别表示压电空心圆柱和非压电空心圆柱。图中标号 1, 2 的曲线组分别是波导条件 μ_n 序列中 $n = 1, 2$ 的频散曲线组。图例中的标号 P, SV 和 SH 分别表示拟 P 波, 拟 SV 和 SH 波。因为采用轴向极化模型, 所以沿空心圆柱轴向传播的扭转波与电场的变化无关, 因而在采用相同的力学参数下, 压电和非压电空心圆柱中 SH 波具有相同的频散曲线。

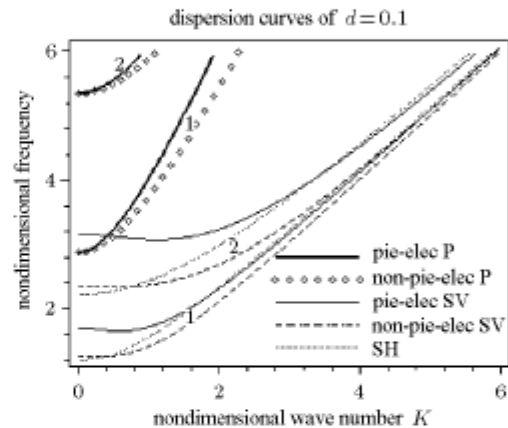


图 1 频散曲线 (bii-bii, $d = 0.1, n = 1, 2$)

Fig.1 Frequency dispersion curves (bii-bii, $d = 0.1, n = 1, 2$)

图 2 是在 (bii-bii) 侧边界条件下半径比 $d = 0.1$ 的空心圆柱的相速度曲线, 图中标号 1, 2 的曲线组分别是波导条件 μ_n 中 $n = 1, 2$ 的相速度曲线组。图中标号 p 的直线是轴向传播的横观各向同性弹性体

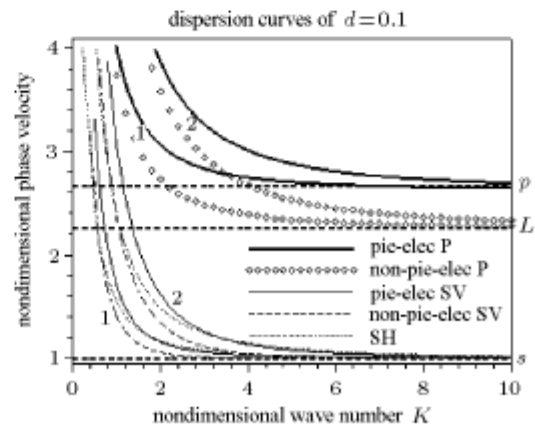


图 2 相速度曲线 (bii-bii, $d = 0.1, n = 1, 2$)

Fig.2 Phase velocity dispersion curves

(bii-bii, $d = 0.1, n = 1, 2$)

的准 P 波波速 ($c_p = \sqrt{(c_{33} + 2c_{44})/\rho}$), 标号的直线 L 是一维杆模型中的 P 波波速 ($c_L = \sqrt{c_{33}/\rho}$), 标号 s 的直线是轴向传播的剪切波波速 ($c_s = \sqrt{c_{44}/\rho}$).

图 3 是在 (bii-bii) 侧边界条件下半径比为 $d = 0.1$ 的空心圆柱的群速度图.

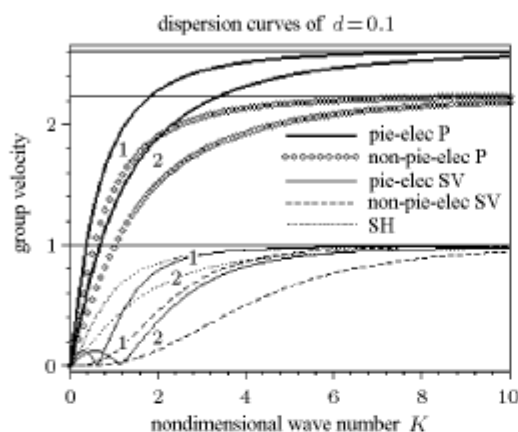


图 3 群速度曲线 (bii-bii, $d = 0.1, n = 1, 2$)

Fig.3 Group velocity curves (bii-bii, $d = 0.1, n = 1, 2$)

图 4 是在 (bi-bii) 侧边界条件下波导条件 μ_n 中 $n = 1$, 半径比分别为 0.1 和 0.5 的空心圆柱的群速度图. 比较图 1, 图 2, 图 3 和图 4 可以得到, 圆柱中存在的压电性质对于拟 P 波和拟 SV 波的传播有显著的影响, 当波长趋向于零时, 压电和非压电圆柱中的拟 P 波波速分别趋向于横观各向同性弹性体的准 P 波波速 c_p 和圆柱采用一维应力模型时的波速 C_L , 在压电圆柱中拟 SV 波存在驻波现象, 并且在出现驻波现象时, 在半径比相同时, 波数 K 随着 n 的增大而增大; 在 n 相同时, 波数 K 随着半径比的增大而增大. 而电场对于 SH 波的传播没有任何影响.

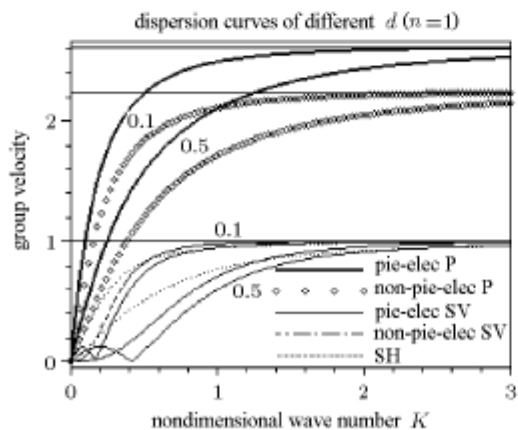


图 4 群速度曲线 (bi-bii, $n = 1, d = 0.1, d = 0.5$)

Fig.4 Group velocity curves (bi-bii, $n = 1, d = 0.1, d = 0.5$)

图 5 是在圆柱端部施加的初始轴向应力, 幅值如图所示, 历时 0.001s. 设圆柱在初始时刻是静止的.

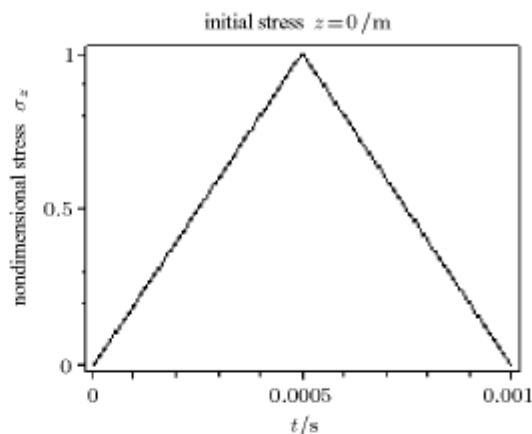


图 5 初始应力

Fig.5 Initial stress

图 6 是在施加如图 5 的端部激励后, 在 (bii-bii) 侧边界条件下, 在外加激励结束时圆柱内的轴向应力, 图中分别是半径比为 0.1 和 0.5 的压电和非压电空心圆柱的轴向应力.

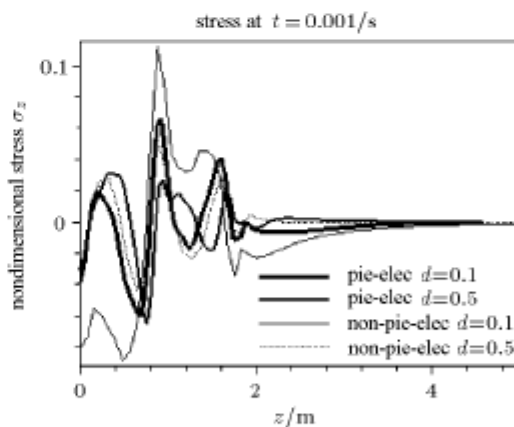


图 6 轴向应力响应 (bii-bii, $t = 0.001$ s, $d = 0.1, d = 0.5$)

Fig.6 Transient response of axial stress

(bii-bii, $t = 0.001$ s, $d = 0.1, d = 0.5$)

图 7 是外加激励结束时, 在 (bii-bii) 侧边界条件下半径比 $d = 0.1$ 的压电和非压电空心圆柱中径向位移 u , 轴向位移 w 和电势函数 φ 的幅值.

图 8 是在 (bii-bii) 侧边界条件下, 半径比分别为 0.1 和 0.5 的圆柱, 在距离空心圆柱端部 10m 处的截面上得到的轴向应力.

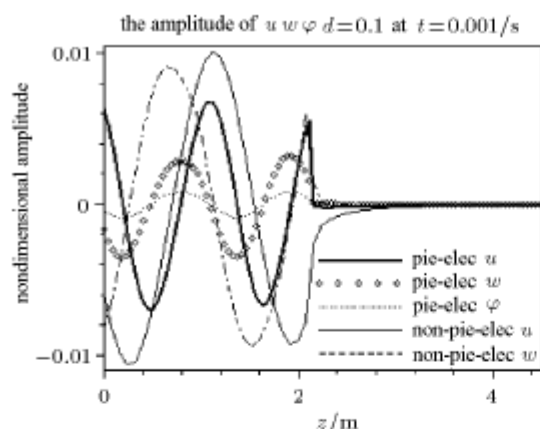
图 7 位移和电势的瞬态响应 (bii-bii, $d=0.1$, $t=0.001$ s)

Fig.7 Displacement and electric potential transient response

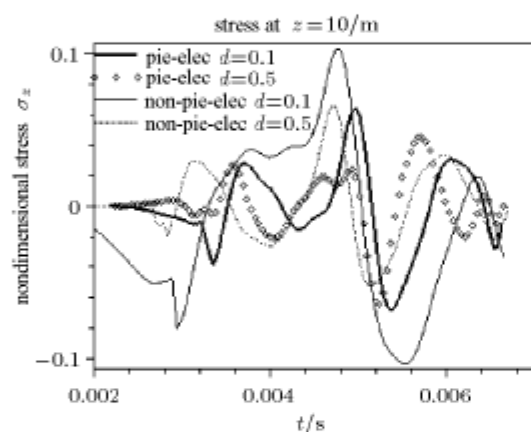
(bii-bii, $d=0.1$, $t=0.001$ s)图 8 轴向应力响应 (bii-bii, $d=0.1$, $d=0.5$, $z=10$ m)

Fig.8 Transient response of axial stress

(bii-bii, $d=0.1$, $d=0.5$, $z=10$ m)

图 9 是在 (bi-bii) 侧边界条件下, 半径比分别为 0.1 和 0.5 的圆柱, 在距离空心圆柱端部 10 m 处的

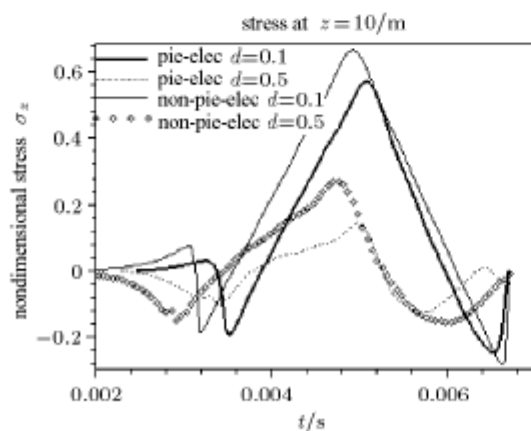
图 9 轴向应力响应 (bi-bii, $d=0.1$, $d=0.5$, $z=10$ m)

Fig.9 Transient response of axial stress

(bi-bii, $d=0.1$, $d=0.5$, $z=10$ m)

截面上得到的轴向应力. 比较图 8 和图 9 可以得到, 在相同半径比下, 由于压电空心圆柱中存在机械能同电场能量间的转换, 因而非压电圆柱的应力响应要大于压电圆柱中的应力响应; 压电圆柱中的应力响应随着半径比的增大而减小; 在同样的初始状态和观测条件下, (bii-bii) 侧边界条件的压电圆柱中应力响应要大于 (bii-bii) 侧边界条件的压电圆柱, 这是由于 (bii-bii) 侧边界条件的压电圆柱具有较小的截止频率值.

图 10 是在 (bii-bii) 侧边界条件下半径比 $d=0.1$ 的空心圆柱中径向位移 u , 轴向位移 w 和电势函数 φ 在径向 r 上的振型.

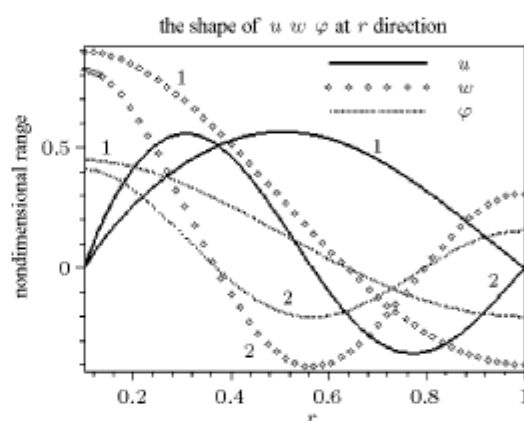
图 10 径向振型 (bii-bii, $n=1, 2$, $d=0.1$)

Fig.10 Mode shape of radial direction

(bii-bii, $n=1, 2$, $d=0.1$)

4 结 论

应用积分变换方法将空心圆柱的控制方程同其侧边界条件相结合, 得到了一组由位移、电势函数和积分变量构成的动力学方程. 在考虑了两组侧边界条件下, 确定了波导条件 μ , 得到与之相应的频散方程和频散曲线. 通过采用相同的力学参数, 比较了压电空心圆柱和非压电空心圆柱的频散特性和外激励下的响应.

侧边界条件为弹性简支-刚性滑支 (bi-bii) 空心圆柱的内外围环境, 十分接近长距离油气输送管道, 城市中各种地下管道和密闭环境中的各种输送管道的内外围环境, 而且这种结构具有的刚度条件使得轴向波在传播中幅值衰减和频散程度都较小, 因而利用压电材料优秀的机电双向性能, 可以实现管道安全的时时维护.

用三维压电弹性体轴对称模型对压电材料整体动力学行为进行了研究, 初步揭示了电场对于 SH 波的传播没有任何影响, 压电圆柱中拟 SV 波存在驻波现象等物理现象. 至于采用三维压电弹性体非轴对称模型研究压电弹性材料波动问题将在后续工作中展开.

参 考 文 献

- 1 Mesquida AA, Otero JA, Ramos RR. Wave propagation in layered piezoelectric structures. *J Appl Phys*, 1998, 83: 4652~4659
- 2 Ramos RR, Otero JA, Perez-Alvarez R. Wave propagation in piezoelectric layered. *J Appl Phys*, 1997, 81: 7242~7247
- 3 Liu H, Wang ZK, Wang TJ. Effect of initial stress on the propagation behavior of love waves in a layered piezoelectric structure. *Int J Solids Struct*, 2001, 38: 37~51
- 4 Jin J, Wang Q, Quack ST. Lamb wave propagation in a metallic semi-infinite medium covered with piezoelectric layer. *Int J Solids Struct*, 2002, 39: 2547~2556
- 5 Seshadri SR. Distributive deflection of Rayleigh waves. *J Appl Phys*, 1991, 69: 6277~6288
- 6 Darinkii AN, Weihnacht M. Existence of the branch of fast surface acoustic waves on piezoelectric substrates. *Wave Motion*, 2002, 36: 87~102
- 7 Mayer AP. Surface acoustic waves in nonlinear elastic media. *Phys Rept*, 1995, 256: 237~366
- 8 Wang ZK, Zheng BL. The general solution of three-dimensional problems in piezoelectric media. *Int J Solid Struct*, 1995, 32: 105~115
- 9 Ding HJ, Xu RQ, Chen WQ. Free vibration of transversely isotropic piezoelectric circular cylindrical panels. *Int J Mech Sci*, 2002, 44: 191~206
- 10 Ding HJ, Chen WQ, Guo YM, et al. Free vibration of piezoelectric cylinder shells filled with compressible fluid. *Int J Solids Struct*, 1997, 34: 2025~2034
- 11 Ding HJ, Xu RQ. Free axisymmetric vibration of laminated transversely isotropic annular plates. *Int J Sound Vib*, 2000, 230: 1031~1044

WAVE PROPAGATION IN THE PIEZOELECTRIC HOLLOW CYLINDER¹⁾

Wei Jianping Su Xian Yue

(Department of Mechanics & Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract In this article, the wave propagation in the piezoelectric hollow cylinder is investigated by applying 3-D piezoelectric elastic axial symmetric model. While the cylinder has piezoelectric property, its guided wave very differs with the non-piezoelectric cylinder. When the wavelength tends to zero, the velocity of simulation-P wave (sim-P wave) in the piezoelectric cylinder asymptotically tends to the quasi-P wave velocity of transverse isotropic elastic body, but the velocity of sim-P wave in the non-piezoelectric cylinder asymptotically tends to the P wave velocity of 1-D bar model. The sim-SV wave in the piezoelectric cylinder has the standing wave phenomenon. The SH wave is independent of electric field, so the piezoelectric and non-piezoelectric cylinders have the same frequency dispersion curves about SH wave. In this paper, using Integral Transform Method to combine the boundary condition and the governing equations together, a group of dynamics equations, which are about the displacements and electric potential, is derived. To the assured boundary condition, the guided-wave condition and the frequency dispersion equations are obtained. Above such solution, the transient responses under a stress pulse at the end are simulated. At last the effect to the wave propagation about the radius' ratios of the hollow cylinders is discussed.

Key words piezoelectric hollow cylinder, guided-wave conditions, dispersion relations

Received 3 December 2003, revised 21 June 2004.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10172004, 10232040).