

基于单位分解法的无网格数值流形方法

李树忱 程玉民

(上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘要 在数值流形方法和单位分解法的基础上, 提出了无网格数值流形方法. 无网格数值流形方法在分析时采用了双重覆盖系统, 即数学覆盖和物理覆盖. 数学覆盖提供的节点形成求解域的有限覆盖和单位分解函数; 而物理覆盖描述问题的几何区域及其域内不连续性. 与原有的数值流形方法相比, 无网格数值流形方法的数学覆盖形状更加灵活, 可以用一系列节点的影响域来建立数学覆盖和单位分解函数, 具有无网格方法的特性, 从而摆脱了传统的数值流形方法中网格所带来的困难. 与无网格方法相比, 由于采用了有限覆盖技术, 试函数的构造不受域内不连续的影响, 克服了原有的无网格方法在处理不连续问题时所遇到的困难. 详细推导了无网格数值流形方法的试函数和求解方程, 最后给出了算例, 验证了该方法的正确性.

关键词 数值流形方法, 单位分解法, 无网格方法, 有限覆盖技术, 不连续性

引 言

目前, 有限元法已成为数值方法的主流, 许多复杂难解的力学问题通过数值模拟, 均可获得有价值的计算结果. 但由于有限元法中单元间的关联条件的限制, 对于工程上常见的不连续变形问题, 例如混凝土裂纹的形成与其力学行为、节理岩体中节理间的不连续问题及具有动边界裂纹扩展问题^[1]等, 显得较为困难. 也有许多学者提出网格重构的技巧, 但网格重构不是一件容易的工作, 尤其在三维裂纹扩展问题中更是令人感到繁难与艰辛. 为了突破单元间关联条件的限制, 近年来许多学者投入到无网格方法的研究中, 无网格方法也渐渐受到重视.

最早的无网格方法是由 Lucy 提出的光滑粒子法^[2], 其次是由 Nayroles 利用移动最小二乘法^[3]配合权函数定义局部的位移场提出扩散单元法^[4]. Belytschko 等延续 Nayroles 的方法, 提出了无网格 Galerkin 法^[5]. 另一种无网格方法是以单位分解法为基础^[6], 包括 h-p 云团法^[7]和基于单位分解的有限元法^[8]. 其它的无网格法还包括: 边界积分方程的无网格法^[9]、PIC 法^[10]、有限点法^[11]等.

数值流形方法是石根华博士提出的同时处理连续和非连续的计算方法^[12]. 由于数值流形方法是一种基于网格的方法, 在模拟裂纹扩展时不可避免地需要网格重构^[13]. 与基于网格的数值方法相比, 只需节点信息就可建立离散方程的无网格方法, 在模

拟裂纹及裂纹扩展问题时就容易得多了^[14]. 但该方法在构造试函数时受域内不连续性的影响, 当不连续性变得复杂时试函数的构造就很难进行甚至无法进行.

在无网格方法和数值流形方法结合方面, 周维垣求解了岩石力学问题^[15]; 刘欣等把有限覆盖引入无网格方法, 但该方法没有对不连续问题进行研究^[16]; 田荣利用流形方法中的有限覆盖技术结合多重权移动最小二乘法构造试函数, 在试函数的构造过程中, 没有考虑不连续所带来的局部化问题^[17].

本文提出的无网格数值流形方法利用单位分解法建立形函数, 然后利用有限覆盖技术建立连续和非连续问题的试函数, 将其代入微分方程的弱形式建立离散形式的求解方程. 与原有的数值流形方法相比, 无网格数值流形方法的数学覆盖形状更加灵活, 可以用一系列节点的影响域来建立数学覆盖和单位分解函数, 具有无网格方法的特性, 从而摆脱了传统的数值流形方法中网格所带来的困难. 与无网格方法相比, 由于采用了有限覆盖技术, 试函数的构造不受域内不连续的影响, 克服了原有的无网格方法在处理不连续问题时所遇到的困难. 对于局部化问题, 形函数的构造较其它方法更为有效, 从而避免了其它方法在建立试函数时没有考虑不连续尖端的缺点; 又由于采用有限覆盖技术建立试函数, 克服不连续对试函数的影响, 尤其当不连续变得复杂时, 更能显示有限覆盖技术在处理不连续方面的

优点. 因此本文方法既有数值流形方法的特点又有无网格方法的优点, 尤其对于求解域内存在不连续及裂纹尖端场问题时, 更能显示该方法的优点.

1 无网格覆盖的几何描述

数值流形方法的数学覆盖常常是由一些规则的格子相互连接组成的. 本文提出的基于单位分解的无网格数值流形法中, 数学覆盖是由一些节点的影响域组成, 物理覆盖的建立是由材料的边界和域内的不连续组成. 物理覆盖的形成与数学覆盖独立, 物理覆盖只构成问题的求解域, 如图 1 所示.

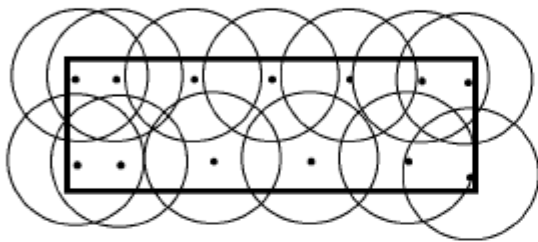


图 1 矩形域的无网格覆盖

Fig.1 A meshless covers of a rectangular domain

2 试函数的建立

2.1 单位分解函数

设在 R^n , $n=2$ 或 3 , 有一个封闭的域 Ω , 且有 N 个节点 $x_I \in \Omega$, 这 N 个节点构成集合为

$$Q_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \quad x_I \in \Omega \quad (1)$$

集合 Q_N 内每个节点的影响域形成一个子覆盖 $\Omega_I, I=1, \dots, N$, 子覆盖可以是圆形也可以是矩形等形状, x_I 是子覆盖的中心, h_I 是子覆盖的度量. 那么封闭域 Ω 由 $\mathcal{R}_N = \{\Omega_I, I=1 \dots N\}$ 所构成的覆盖所包含, 即

$$\Omega \subset \bigcup_{I=1}^N \Omega_I \quad (2)$$

其中

$$\Omega_I = \{y \in \mathcal{R}^n \text{ 且 } \|x_\alpha - y\| < h_\alpha\} \quad (3)$$

和覆盖 $\mathcal{R}_N$ 相关的函数族 $\Phi_N = \{\phi_\alpha, \alpha = 1 \dots N\}$ 满足

$$\sum_I \phi_I(x) = 1 \quad (4)$$

$$\phi_I(x) = 0, \quad x \notin \Omega_I \quad (5)$$

$$\phi_I(x) \in C_0^s(\Omega_I), \quad 1 \leq I \leq N, \quad s \geq 0 \quad (6)$$

函数 $\phi_I(x)$ 被称为单位分解函数.

2.2 无网格数值流形方法的试函数

对于连续区域, 形函数即为单位分解函数, 则试函数为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N_c} \phi_i(x) \cdot u_i \quad (7)$$

式中 $\phi_i(x)$ 是和覆盖 Ω_i 相关的单位分解函数, u_i 是节点 i 处的位移值.

对于不连续区域, 利用有限覆盖技术, 一个连续的子覆盖被不连续分解成两个子覆盖, 试函数在每一子覆盖内都是连续的, 不连续是通过增加一个子覆盖得以体现, 如图 2 所示. 假设子覆盖 Ω_i 的第 j 个覆盖用 Ω_i^j 来表示, 其对应的单位分解函数为 $\phi_i^j(x)$

$$\phi_i^j(x) = \phi_i(x) \cdot \delta_i^j(x) \quad (8)$$

式中当 $x \in \Omega_i^j$ 时, $\delta_i^j(x) = 1$, 否则 $\delta_i^j(x) = 0$.

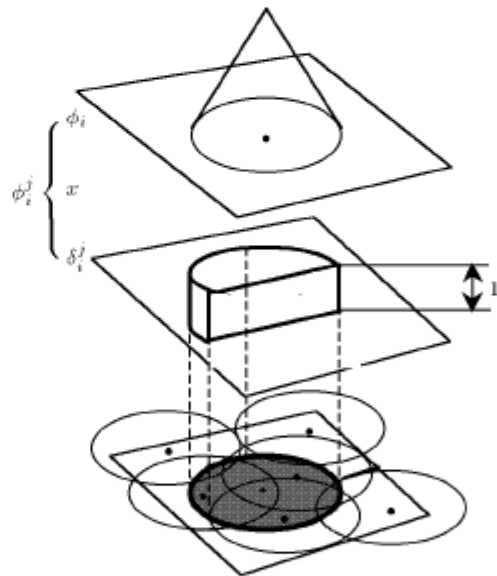
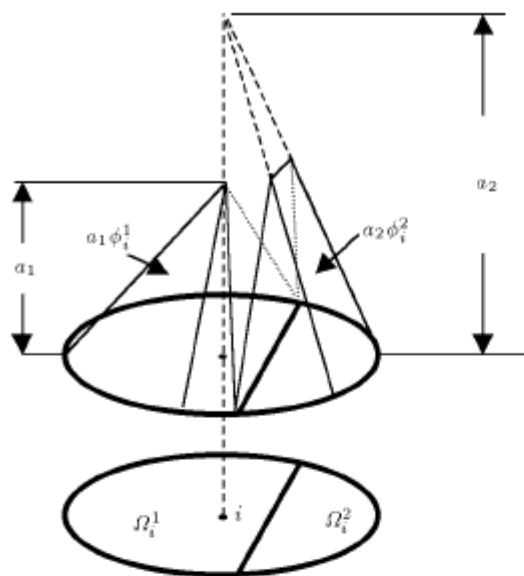


图 2 子覆盖和它的单位分解函数

Fig.2 A sub-cover and its partition of unity function

由于不连续的存在, 一个节点就有两个以上子覆盖, 即在无网格数值流形方法中模拟不连续是通过有限覆盖技术在一个节点处把一个子覆盖变成几个子覆盖来实现的. 如图 3 所示一个单独的子覆盖 Ω_i 被一条不连续面分割成两个子覆盖 Ω_i^1 和 Ω_i^2 . 由于每一个子覆盖都有和自己相关的单位分解函数, 由单位分解法, 图 3 中的试函数为

$$u^h(x) = a_1 \phi_i^1(x) + a_2 \phi_i^2(x) \quad (9)$$

图 3 子覆盖 Ω_i 被分割成两个子覆盖和对应的单位分解函数Fig.3 The sub-cover Ω_i is divided into two sub-covers Ω_i^1 and Ω_i^2 and its partition of unity function

式中 a_1 和 a_2 分别是 Ω_i^1 和 Ω_i^2 相关的节点值, 则不连续情况的试函数为

$$\begin{aligned} u^h(x) = & \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^M \phi_i^j(x) \cdot u_i^j = \\ & \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^M \phi_i(x) \cdot \delta_i^j(x) \cdot u_i^j \end{aligned} \quad (10)$$

式中 M 是不连续面引起的节点数, 即不连续将一个子覆盖变成多个子覆盖的数目. N_c 是节点的影响域(子覆盖)内的节点数. 单位分解函数 ϕ_i 有不同的建立方法, 目前主要利用 Shepard 方法或移动最小二乘方法来建立.

3 无网格数值流形方法的求解方程

考虑弹性力学问题, 问题所在域为 Ω , 边界为 S , 平衡方程和边界条件为

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (11)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i, \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad (12)$$

$$u_i = \bar{u}_i, \quad \text{在 } S_u \text{ 上} \quad (13)$$

式中 $\bar{u}_i$ 是在位移边界 S_u 上已知位移, $\bar{t}_i$ 是在面力边界 S_σ 上已知面力.

方程 (11)~(13) 的积分弱形式为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \delta u : \sigma(u) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \cdot f d\Omega - \\ \int_{S_\sigma} \delta u \cdot \bar{T} dS - \delta W_u(u) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

式中 ∇ 是平面问题的微分算子, $\delta W_u(u)$ 是在无网格覆盖中考虑必要边界时增加的一项. 该项可以通过罚函数法或拉格朗日乘子法来强制满足, 本文采用罚函数法来处理位移边界条件^[5].

对于线弹性力学, 几何方程和物理方程为

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (15)$$

$$\sigma = D : \varepsilon \quad (16)$$

则利用方程 (10) 作为 u 和 δu 的近似代入式 (14) 可得如下离散方程

$$Ku = F \quad (17)$$

式中

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T \cdot D \cdot B_J d\Omega \quad (18)$$

$$F_I = \int_{S_\sigma} \phi_I^T \bar{t}_I dS + \int_{\Omega} \phi_I^T f_I d\Omega \quad (19)$$

$$B_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 & \phi_{I,y} \\ 0 & \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

4 数值算例

以下采用本文提出的无网格数值流形方法对受均布荷载的单边裂纹板进行了计算. 考虑图 4 所示, 平板宽为 L , 高为 $2D$, 在板的一边有长为 a 的裂纹. 在板的两边受均布荷载为 σ , 我们来求解它的应力强度因子和裂纹尖端应力场的变化, 该算例在文献 [18] 中给出了应力强度因子的解析表达式

$$K_I = C \sigma \sqrt{a\pi} \quad (21)$$

式中 C 是修正系数.

在该模型计算中, 几何及物理参数为 $\sigma = 0.2 \text{ GPa}$, $L = 52 \text{ mm}$, $\mu = 0.286$, $D = 20 \text{ mm}$, $a = 12 \text{ mm}$, $E = 76 \text{ GPa}$, $\rho = 2450 \text{ kg/m}^3$.

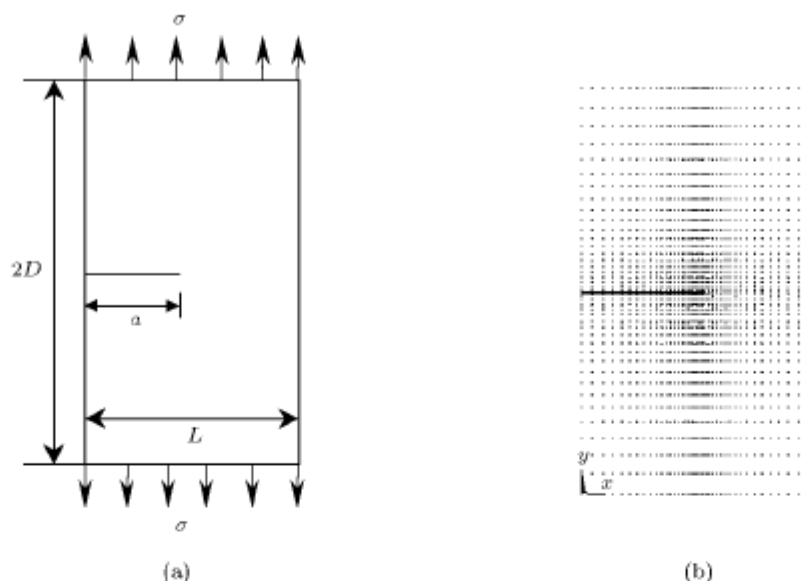
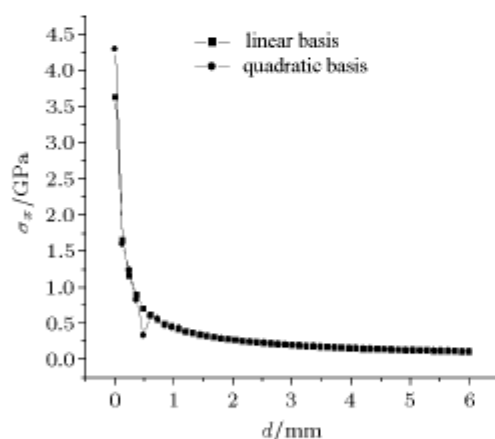
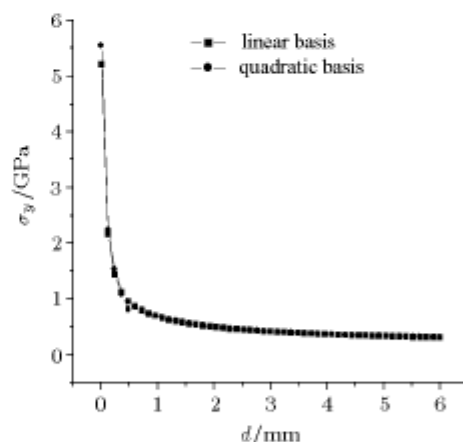


图 4 几何模型和配点图

Fig.4 Geometry model and the nodes

整个求解域共 1722 个节点, 基函数分别取线性基和二次基, 计算所得的正则应力强度因子 $K_I^{\text{num}}/\sigma\sqrt{a\pi}$ 分别为 1.30 和 1.32, 而解析法得到的值是 1.34, 其误差分别为 2.9% 和 1.4%。可以看出计

算结果和解析解相吻合, 二次基比线性基精度好。图 5 和图 6 分别给出了裂纹尖端附近点的应力随该点和裂纹尖端距离 d 的变化关系。

图 5 σ_x 随点与裂纹尖端距离的变化关系Fig.5 σ_x at the tip of the crack图 6 σ_y 随点与裂纹尖端距离的变化关系Fig.6 σ_y at the tip of the crack

5 结 论

本文针对域内不连续问题, 利用单位分解法和有限覆盖技术建立了新的无网格方法——基于单位分解法的无网格数值流形方法。

由于本方法吸收了数值流形方法中有限覆盖技术, 克服了原有无网格方法在处理不连续时所采用的各种处理技术的不足; 当域内含有不连续变得不规则时, 试函数的建立比原有无网格方法要容易;

同时, 也减少了原有无网格方法在处理不规则裂纹时多次映射所带来的误差。

该方法也吸收了无网格方法的优点, 可以在裂纹尖端任意加点, 提高了数值解的精度。克服了原有数值流形方法在处理裂纹问题时, 裂纹尖端解的精度不高和裂纹扩展路径受制于单元的缺点。

与原有的无网格方法和数值流形方法相比, 本文方法具有明显的优点。

参 考 文 献

- 1 Organ J. Numerical solutions to dynamic fracture problems using the EFG. [Ph D Thesis]. Northwestern University, 1996.6
- 2 Lucy LB. A numerical approach to the testing of the fission hypotheses. *The Astron J*, 1977, 8: 1013~1024
- 3 Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least square methods. *Math Comput*, 1981, 37: 141~158
- 4 Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Comput Mech*, 1992, 10: 307~318
- 5 Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 229~256
- 6 Babuska I, Melenk JM. The partition of unity method. *Int J Numer Meth Engrg*, 1997, 40: 727~758
- 7 Duarte CAM, Oden JT. Hp clouds—an hp meshless method. *Numer Meth Partial Diff Eqs*, 1996, 12: 673~705
- 8 Babuska I, Melenk JM. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Comput Meth Appl Mech Engrg*, 1996, 139: 289~314
- 9 程玉民, 陈美娟. 弹性力学一种边界无单元法. *力学学报*, 2003, 35(2): 181~186 (Cheng Yumin, Chen Meijun. A boundary element-free method for linear elasticity. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(2): 181~186 (in Chinese))
- 10 Harlow FH. The particle-in-cell computing methods for fluid dynamics. *Methods Comput Phys*, 1964, 3: 319~343
- 11 Oñate E, Idelsohn S, Zienkiewicz OC, et al. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 1996, 139: 315~346
- 12 Shi GH. Modeling rock joints and blocks by manifold method. In: Proceedings of the 33rd US Rock Mechanics Symposium, San Ta Fe, New Mexico, 1992. 639~648
- 13 Chiou Yaw-Jeng, Lee Yu-Min, Tsay Ren-Jow. Mixed mode fracture propagation by manifold method. *International Journal of Fracture*, 2002, 114: 327~347
- 14 Belytschko T, Lu YY, Gu L. Crack propagation by element free Galerkin method. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 51 (2): 295~315
- 15 Zhou Weiyuan, Yang Qiang, Kou Xiaodong. Manifold method and its applications to engineering. In: Proc of the Second International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation, Kyoto, Japan, 1997. 274~281
- 16 刘欣, 朱德懋等. 基于流形覆盖思想的无网格方法的研究. *计算力学学报*, 2001, 18(1): 21~27 (Liu Xin, Zhu Demao et al. Study on meshless method based on manifold cover ideas. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2001, 18(1): 21~27 (in Chinese))
- 17 田荣. 连续与非连续变形分析的有限覆盖无网格方法及其应用研究. [博士论文]. 大连: 大连理工大学, 2000. 11 (Tian Rong. Finite-cover-based element-free method for continuous and discontinuous deformation analysis with applications in geotechnical engineering. [Ph D Thesis]. Dalian: Dalian University of Technology, 2000. 11 (in Chinese))
- 18 Ewalds H, Wanhill R. Fracture Mechanics. New York: Edward Arnold, 1989

MESHLESS NUMERICAL MANIFOLD METHOD BASED ON UNIT PARTITION

Li Shuchen Cheng Yumin

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract In this paper the meshless numerical manifold method is presented based on the numerical manifold method and the partition of unity method. In meshless numerical manifold method, two cover systems are employed. The mathematical cover system provides the nodes for forming finite covers of the solution domain and the partition of unity functions, and the physical cover system describes geometry of the domain of the problem and the discontinuous surfaces in the domain. The shape function in this method is formed by the partition of unity and the finite cover technology, so the shape functions cannot be affected by discontinuous domain, and crack problems can be treated better. To local problems, the shape functions are more effective than other method. So the method can avoid the disadvantages in other meshless methods in which the tip of the discontinuous crack is not considered. Comparing with the conventional numerical manifold method, the shape of the finite cover can be selected easily. And the finite covers and the partition of unity functions are formed with the influence domains of a series of nodes. So the meshless manifold method has some advantages of the meshless and gets rid of the disadvantage of the mesh in the numerical manifold method. Comparing with the conventional meshless method, finite cover technology is used in the method, and then the test functions cannot be influenced by the discontinuity in the solving domain. And this method can conquer some difficulties in the conventional meshless methods for the problems with a discontinuous domain. The test function and the equations of the meshless numerical manifold method are obtained in detail. And a numerical example is given and it shows the method in this paper is correct.

Key words numerical manifold method, partition of unity, meshless method, finite cover technology, discontinuity