

# 线性分布荷载作用下梯度功能压电悬臂梁的解<sup>1)</sup>

杨永波 石志飞 陈 盈

(北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

**摘要** 采用逆解法求解了上表面受线性分布荷载作用的压电悬臂梁执行器, 其中体积力  $F_z$  呈非线性分布. 首先确定了应力函数和电位移函数的多项式表达式, 进而研究了该问题的通解, 以及体积力的不同分布对解答的影响. 常体积力和无体力情况下的解可以由上述解直接得到. 本文为研究其它类型的压电梯度微观结构提供了一种可行的方法.

**关键词** 压电材料, 梯度功能材料, 执行器, 传感器

## 引 言

压电材料作为一种智能材料在许多高科技领域(如微机电、航空、生物科学等)得到了广泛的应用, 电-机械耦合问题已经成为目前研究的一个热门课题. 近年来, 国内外学者对压电材料的相关问题进行了较深入的研究, 取得了一批重要的研究成果. 如, Ding<sup>[1]</sup>利用格林函数法得到了半平面上作用集中荷载和点电荷时的基本解; Chen<sup>[2]</sup>导出了混合边值问题的 3 个积分方程并改写了文献 [1] 的解答, 得到了更加简洁的表达式, 上述工作为进一步研究压电半平面问题打下了基础. Rajapakse<sup>[3]</sup>研究了在径向荷载和环向电场共同作用下的实心圆柱体, Shi<sup>[4,5]</sup>研究了一类密度呈梯度变化的压电材料的基本解.

在工程中, 压电材料通常被制作成压电单晶片、压电双晶片以及通过粘结而成的压电多晶片<sup>[6]</sup>. 当压电材料具有一维或二维梯度时(梯度功能材料, 即 FGM), 它不仅能克服粘结层的剥落和开裂现象, 而且可以缓和热失配引起的应力<sup>[7]</sup>. Hauke 等人利用 BaTiO<sub>3</sub> 陶瓷制作了一种压电执行器并进行了试验<sup>[8]</sup>, 该执行器属多层结构. 在忽略体积力的同时, Hauke 假定同一层中各材料参数均为常数, 但层与层之间材料参数可以是不同的. 试验结果表明虽然尖端位移略有减小, 但执行器的内应力却得到显著降低. 因此, 他们预言研制出没有内部机械应力的弯曲执行器是完全可能的.

需要指出的是, 在许多关于压电层合梁的理论

分析中, 层间应力  $\sigma_z$  通常被取为常数, 但实际上其分布是相当复杂的. 本文分析中, 在计及梯度体积力的同时, 考虑了压电梁受线性分布荷载的作用.

## 1 压电平面应变问题的基本方程

采用笛卡儿坐标系  $(x, z)$ , 用  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  分别表示压电介质的应变、应力、电位移和电场强度, 则压电平面应变问题的本构方程可表示为<sup>[9,10]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} & 0 \\ S_{13} & S_{33} & 0 \\ 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g_{31} \\ 0 & g_{33} \\ g_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} \quad (1a)$$

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{15} \\ g_{31} & g_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_{11} & 0 \\ 0 & \zeta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_z \end{Bmatrix} \quad (1b)$$

其中,  $S_{ij}$ ,  $g_{ij}$ ,  $\zeta_{ij}$  分别为弹性柔度参数、压电参数以及介电隔离率. 对上、下表面都涂敷有微小分布电极的压电弯曲执行器(如图 1 所示), 设材料沿  $z$  轴极化, 且结构的几何和物理特性关于  $z$ - $x$  平面对称.

将  $x = L$  处设置为固定端, 并设在  $y$  轴方向梁的尺寸很大, 则梁只能在  $z$ - $x$  平面内发生弯曲变形.

2002-02-06 收到第 1 稿, 2004-01-14 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(50272003)和教育部高等学校优秀青年教师学科科研奖励计划资助项目.

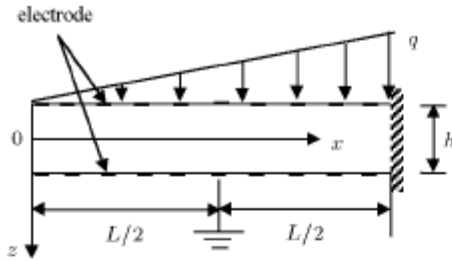


图 1 压电材料悬臂梁示意图

Fig.1 Piezoelectric cantilever model

因此, 该问题可以简化为平面应变问题. 应变和电场强度分量用位移  $(u, w)$  和电势  $\phi$  可表示为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

若不考虑体电荷, 则静力平衡方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中,  $F_x$  和  $F_z$  为体积力分量. 对于梯度功能压电悬臂梁, 假定  $F_x = 0$ ,  $F_z = F_z(z)$ . 通常体积力为有势力, 并设势函数为  $V(z)$ , 即有  $F_x = 0$ ,  $F_z = -\partial V / \partial z$ . 进一步将  $V$  展开并取有限项为

$$V = m_1 z^3 + m_2 z^2 + m_3 z + m_4 \quad (4)$$

其中,  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 为材料常数. 方程 (1)~(3) 即为压电体边值问题的基本方程. 将方程 (1) 和 (3) 代入方程 (2), 可得另一组控制方程

$$\left. \begin{aligned} \left[ S_{11} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left( S_{13} + \frac{S_{44}}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \sigma_x + \\ \left[ S_{33} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( S_{13} + \frac{S_{44}}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \sigma_z + \\ g_{31} \frac{\partial^2 D_z}{\partial z^2} + g_{33} \frac{\partial^2 D_z}{\partial x^2} - g_{15} \frac{\partial^2 D_x}{\partial x \partial z} = \\ -\frac{S_{44}}{2} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \\ (g_{15} + g_{31}) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + g_{33} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \zeta_{11} \frac{\partial D_x}{\partial z} - \\ \zeta_{33} \frac{\partial D_z}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式 (5) 即为用应力和电位移分量表示的相容方程.

## 2 线性分布荷载作用下梯度功能压电悬臂梁的解

采用逆解法, 引入应力函数  $\varphi$  和电势函数  $\psi$ , 应力和电位移分量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \\ D_x &= \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad D_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

进一步, 假定应力函数和电位移函数具有如下形式

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{x^3}{3} (a_1 z^3 + a_3 z + a_4) + \\ &\quad \frac{x^2}{2} (b_1 z^3 + b_3 z + b_4) + \\ &\quad x \left( \frac{1}{5} c_1 z^5 + \frac{1}{3} c_3 z^3 + c_5 z \right) + \\ &\quad \left( \frac{1}{10} d_1 z^5 + \frac{1}{6} d_2 z^4 + \frac{1}{3} d_3 z^3 + d_4 z^2 \right) \\ \psi &= x^2 (A_1 z^3 + A_3 z) + x (B_1 z^3 + B_3 z) + \\ &\quad \left( \frac{1}{5} D_1 z^5 + \frac{1}{3} D_3 z^3 + \frac{1}{2} D_4 z^2 + D_5 z \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中,  $a_i, b_i, c_i, d_i, A_i, B_i, D_i$  为待定常数. 由方程 (6) 和 (7) 可以得到应力和电位移分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2a_1 x^3 z + 3b_1 x^2 z + x(4c_1 z^3 + 2c_3 z) + \\ &\quad (2d_1 z^3 + 2d_2 z^2 + 2d_3 z + 2d_4) \\ \sigma_z &= 2x(a_1 z^3 + a_3 z + a_4) + (b_1 + m_1)z^3 + \\ &\quad m_2 z^2 + (b_3 + m_3)z + (b_4 + m_4) \\ \tau_{xz} &= -x^2(3a_1 z^2 + a_3) - x(3b_1 z^2 + b_3) - \\ &\quad (c_1 z^4 + c_3 z^2 + c_5) \\ D_x &= x^2(3A_1 z^2 + A_3) + x(3B_1 z^2 + B_3) + \\ &\quad (D_1 z^4 + D_3 z^2 + D_4 z + D_5) \\ D_z &= -2x(A_1 z^3 + A_3 z) - (B_1 z^3 + B_3 z) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将方程 (8) 代入方程 (5), 可以发现上述待定常数必须满足如下关系

$$\left. \begin{aligned} 2S_{11}c_1 + (2S_{13} + S_{44})a_1 &= (g_{15} + g_{31})A_1 \\ 2S_{11}d_1 + (2S_{13} + S_{44})b_1 + S_{13}m_1 &= \\ (g_{15} + g_{31})B_1 \\ 2d_2 S_{11} + m_2 S_{13} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1(g_{15} + g_{31}) + A_1\zeta_{11} &= 0 \\ b_1(g_{15} + g_{31}) + B_1\zeta_{11} &= 0 \\ 2c_1(g_{15} + g_{31}) + g_{33}a_1 + 2D_1\zeta_{11} + A_1\zeta_{33} &= 0 \\ c_3(g_{15} + g_{31}) + g_{33}a_3 + D_3\zeta_{11} + A_3\zeta_{33} &= 0 \\ 2g_{33}a_4 + D_4\zeta_{11} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

为简化表达, 引入如下记号

$$\left. \begin{aligned} M_i &= 2S_{11}d_i + (b_i + m_i)S_{13} - g_{31}B_i \\ N_i &= S_{11}c_i + a_iS_{13} - g_{31}A_i \\ P_i &= 2S_{13}d_i + (b_i + m_i)S_{33} - g_{33}B_i \\ Q_i &= S_{13}c_i + a_iS_{33} - g_{33}A_i \\ K_i &= -2g_{31}d_i - (b_i + m_i)g_{33} - \zeta_{33}B_i \\ L_i &= -g_{31}c_i - a_i g_{33} - \zeta_{33}A_i \\ R_i &= A_i g_{15} - a_i S_{44}, \quad S_i = B_i g_{15} - b_i S_{44} \\ T_i &= D_i g_{15} - c_i S_{44}; \quad \bar{R}_i = A_i \zeta_{11} + a_i g_{15} \\ \bar{S}_i &= B_i \zeta_{11} + b_i g_{15}, \quad \bar{T}_i = D_i \zeta_{11} + c_i g_{15} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

则应变分量和电场强度分量可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{i=1}^4 M_i z^{4-i} + 2x \sum_{i=1}^4 N_i z^{4-i} + \\ &\quad S_{11}xz(2a_1x^2 + 3b_1x + 2c_1z^2) \\ \varepsilon_z &= \sum_{i=1}^4 P_i z^{4-i} + 2x \sum_{i=1}^4 Q_i z^{4-i} + \\ &\quad S_{13}xz(2a_1x^2 + 3b_1x + 2c_1z^2) \\ \gamma_{xz} &= x^2 \sum_{i=1}^3 R_i(4-i)z^{3-i} + \\ &\quad x \sum_{i=1}^3 S_i(4-i)z^{3-i} + \sum_{i=1}^5 T_i z^{5-i} \\ E_x &= x^2 \sum_{i=1}^3 \bar{R}_i(4-i)z^{3-i} + \\ &\quad x \sum_{i=1}^3 \bar{S}_i(4-i)z^{3-i} + \sum_{i=1}^5 \bar{T}_i z^{5-i} \\ E_z &= \sum_{i=1}^4 K_i z^{4-i} + 2x \sum_{i=1}^4 L_i z^{4-i} - \\ &\quad g_{31}xz(2a_1x^2 + 3b_1x + 2c_1z^2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

在此已约定将函数  $V$ ,  $\varphi$  和  $\psi$  中不含有的  $m_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $D_i$  均取为零, 即  $a_2, b_2, c_2, c_4, A_2, A_4, B_2, B_4$  和  $D_2$  均应取为零。

除了需满足基本方程外, 应力和电位移分量还应满足如图 1 所示的所有力学和电学边界条件。在梁的上、下表面, 应力分量必须精确满足如下边界条件

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= 0, \quad \sigma_z = -qx/L, \quad \text{在 } z = -h/2 \\ \tau_{xz} &= 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \text{在 } z = h/2 \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

在梁的左端, 由圣维南原理有

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz &= 0, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz &= 0, \quad \text{在 } x = 0 \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

电学边界条件为

$$\left. \begin{aligned} D_z &= 0, \quad \text{在 } z = \pm h/2 \\ \int_{-h/2}^{h/2} D_x dz &= 0, \quad \text{在 } x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12c)$$

对于绝缘性固定支承, 固端无电荷交换, 容易证明在  $x = L$  处有  $\int_{-h/2}^{h/2} D_x dz = 0$ 。将式 (8) 代入上述力学和电学边界条件并注意到式 (9), 不难求得待定常数如下

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\frac{q}{Lh^3}, \quad a_3 = \frac{3q}{4Lh}, \quad a_4 = -\frac{q}{4L} \\ b_1 &= 2\bar{m}_1, \quad b_3 = -\frac{3}{2}\bar{m}_1 h^2, \quad b_4 = -\bar{m}_2 h^2 \\ c_1 &= \frac{m^*q}{2S_{11}Lh^3}, \quad c_3 = -\frac{3m^*q}{20S_{11}Lh}, \quad c_6 = \frac{m^*qh}{160S_{11}L} \\ d_1 &= -\frac{m^*}{S_{11}}\bar{m}_1 - \frac{S_{13}}{2S_{11}}m_1, \quad d_2 = -\frac{S_{13}}{2S_{11}}m_2 \\ d_3 &= \frac{3}{20}h^2\left(\frac{m^*}{S_{11}}\bar{m}_1 + \frac{S_{13}}{2S_{11}}m_1\right) \\ d_4 &= \frac{S_{13}}{24S_{11}}m_2 h^2 \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{q}{Lh^3}\bar{g}, \quad A_3 = -\frac{q}{4Lh}\bar{g} \\ B_1 &= -2\bar{g}\bar{m}_1, \quad B_3 = \frac{\bar{g}}{2}\bar{m}_1h^2 \\ D_1 &= \frac{q}{2Lh^3}(\bar{A} - \bar{B} - \bar{C}) \\ D_3 &= -\frac{q}{4Lh}(3\bar{A} - \frac{3}{5}\bar{B} - \bar{C}) \\ D_4 &= \frac{qg_3}{2L\zeta_{11}} \\ D_5 &= \frac{qh}{480L}(27\bar{A} - 3\bar{B} - 7\bar{C}) \end{aligned} \right\} \quad (13b)$$

其中, 引入了如下的新记号

$$\left. \begin{aligned} \bar{g} &= \frac{g_{15} + g_{31}}{\zeta_{11}} \\ m^* &= \frac{(g_{15} + g_{31})^2}{\zeta_{11}} + (2S_{13} + S_{44}) \\ \bar{m}_1 &= \frac{m_1}{4} + \frac{m_3}{h^2}, \quad \bar{m}_2 = \frac{m_2}{4} + \frac{m_4}{h^2} \\ \bar{A} &= \frac{g_{33}}{\zeta_{11}}, \quad \bar{B} = \frac{m^*}{S_{11}}\bar{g}, \quad \bar{C} = \frac{\zeta_{33}}{\zeta_{11}}\bar{g} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

由式 (2) 还可得到位移  $u$  和  $w$  的表达式为

$$\left. \begin{aligned} u &= \int \varepsilon_x dx + f_1(z) = \\ & x \sum_{i=1}^4 M_i z^{4-i} + x^2 \sum_{i=1}^4 N_i z^{4-i} + \\ & S_{11}z \left( \frac{1}{2}a_1x^4 + b_1x^3 + c_1x^2z^2 \right) + f_1(z) \\ w &= \int \varepsilon_z dz + f_2(x) = \\ & \sum_{i=1}^4 \frac{P_i}{5-i} z^{5-i} + 2x \sum_{i=1}^4 \frac{Q_i}{5-i} z^{5-i} + \\ & S_{13}x(a_1x^2z^2 + \frac{3}{2}b_1xz^2 + \frac{1}{2}c_1z^4) + f_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

利用固端的约束边界条件  $u(L, 0) = 0$ ,  $w(L, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}(L, 0) = 0$ , 有

$$\left. \begin{aligned} f_1(z) &= -\sum_{i=1}^4 \frac{2Q_i z^{6-i}}{(5-i)(6-i)} + \sum_{i=1}^5 \frac{T_i z^{6-i}}{(6-i)} - \\ & \frac{1}{10}c_1S_{13}z^5 - \left[ \frac{1}{2}S_{11}a_1L^4 + b_1S_{11}L^3 + \right. \\ & L^2(N_3 - R_3) + L(M_3 - S_3) \Big] z - \\ & LM_4 - L^2N_4 \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

$$\left. \begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{10}S_{11}a_1(5xL^4 - x^5 - 4L^5) + \\ & \frac{1}{4}b_1S_{11}(4xL^3 - x^4 - 3L^4) + \\ & \frac{1}{3}(N_3 - R_3)(3xL^2 - x^3 - 2L^3) + \\ & \frac{1}{2}(M_3 - S_3)(2xL - x^2 - L^2) \end{aligned} \right\} \quad (16b)$$

同理, 利用电势边界条件  $\phi(L, 0) = 0$ , 可得到电势为

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (4-i)\bar{R}_i x^3 z^{3-i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (4-i)\bar{S}_i x^2 z^{3-i} - \\ & \sum_{i=1}^5 \bar{T}_i x z^{5-i} - \sum_{i=1}^4 \frac{K_i}{5-i} z^{5-i} \end{aligned} \quad (17)$$

表达式 (8), (11), (15) 和 (17) 即为图 1 所示模型的通解.

### 3 示例与讨论

为了说明 FGM 的优点, 下面考虑不同的密度分布对执行器的影响. 为此, 假定梁具有恒定的重量, 即  $\int_{-h/2}^{h/2} F_z dz = \rho gh$  成立. 进一步有

$$m_1 \left( \frac{h}{2} \right)^2 + m_3 = -\rho g \quad (18)$$

作为示例, 本文假定

$$m_1 : m_2 : m_3 : m_4 = 1 : \frac{2}{h} : \left( \frac{2}{h} \right)^2 : \left( \frac{2}{h} \right)^3 \quad (19)$$

则有

$$m_1 = -\frac{2\rho g}{h^2}, \quad m_2 = -\frac{\rho g}{h}, \quad m_3 = -\frac{\rho g}{2}, \quad m_4 = -\frac{\rho gh}{4} \quad (20)$$

为便于讨论, 引入如下两个无量纲参数

$$Z = \frac{z}{h}, \quad X = \frac{x}{L} \quad (0 \leq X \leq 1, -\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{1}{2}) \quad (21)$$

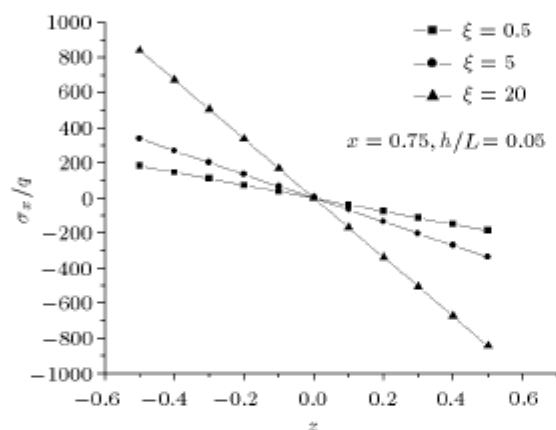
除此之外, 假设体积力与荷载之间有如下关系  $\rho gL = \xi q$ , 其中  $\xi$  为参数. 则方程 (20) 成为

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= -\frac{2\xi q}{h^2L}, \quad m_2 = -\frac{\xi q}{hL} \\ m_3 &= -\frac{\xi q}{2L}, \quad m_4 = -\frac{h\xi q}{4L} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

表 1 给出了部分选定的 PZT 材料的弹性柔度参数、压电参数以及介电隔离率. 这些常数已经通过本构方程进行了变换<sup>[11]</sup>. 基于方程 (8), (15), (17), 可以得到  $\sigma_x$ ,  $w$  和  $\phi$  的曲线图如图 2~ 图 4 所示,

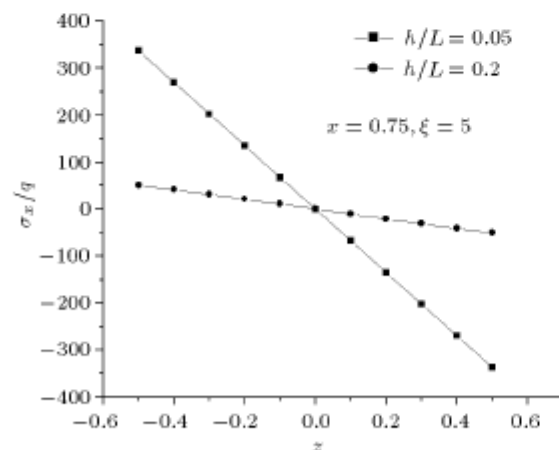
表 1 PZT-4 和 PZT-5 的部分材料常数  
Table 1 Some material constants of PZT-4  
and PZT-5

|                                                                   |              | PZT-4 | PZT-5 |
|-------------------------------------------------------------------|--------------|-------|-------|
| effective elastic compliance<br>( $10^{-12}\text{m}^2/\text{N}$ ) | $S_{11}$     | 10.82 | 14.43 |
|                                                                   | $S_{13}$     | -2.0  | -2.94 |
|                                                                   | $S_{33}$     | 8.28  | 9.5   |
|                                                                   | $S_{44}$     | 17.91 | 25.22 |
| piezoelectric parameter<br>( $10^{-3}\text{m}^2/\text{C}$ )       | $g_{31}$     | -12   | -11   |
|                                                                   | $g_{33}$     | 26    | 25    |
|                                                                   | $g_{15}$     | 40    | 38    |
| dielectric impermeability<br>( $10^6\text{m}/\text{F}$ )          | $\zeta_{11}$ | 76.87 | 65.31 |
|                                                                   | $\zeta_{33}$ | 86.92 | 66.47 |



(a) 不同  $\xi$  下的  $\sigma_x/q$  分布

(a) Distribution of  $\sigma_x/q$  for different  $\xi$



(b) 不同  $h/L$  下的  $\sigma_x/q$  分布

(b) Distribution of  $\sigma_x/q$  for different  $h/L$

图 2 参数变化对  $\sigma_x$  分布的影响

Fig.2 Influences of different parameter on the distribution of  $\sigma_x$

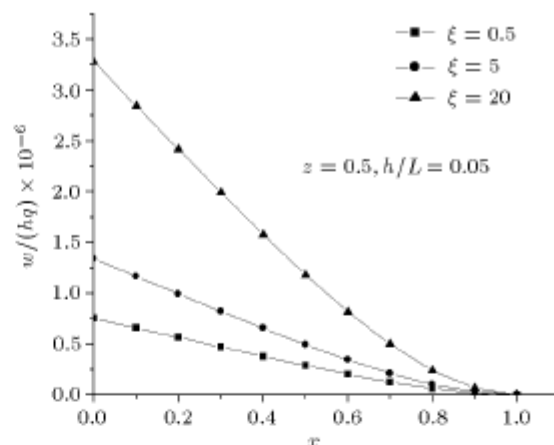
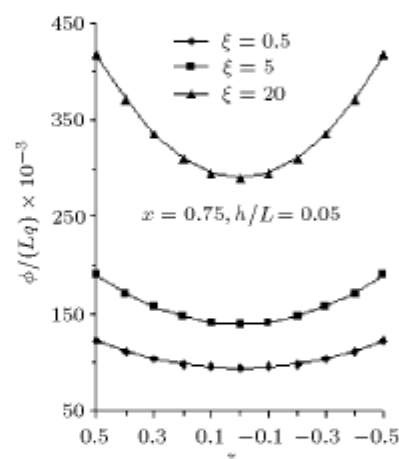


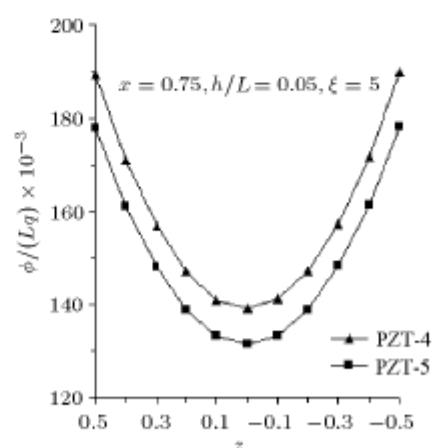
图 3 参数  $\xi$  变化对梁的位移的影响

Fig.3 Influence of different parameter  $\xi$  on the deflection of the beam



(a) 不同  $\xi$  下的  $\phi$  分布

(a) Distribution of  $\phi$  for different  $\xi$



(b) 对于不同材料的  $\phi$  分布

(b) Distribution of  $\phi$  for different materials

图 4 参数变化对  $\phi$  分布的影响

Fig.4 Influences of different parameter on the distribution of  $\phi$

在压电执行器的研究中这些参数尤其重要. 图 2 为不同的荷载参数  $\xi$  和比率  $h/L$  对梁横截面上的  $\sigma_x$  的影响曲线. 可以看到在  $\xi$  和  $h/L$  的一个较大的变化范围内,  $\sigma_x$  可大致看作是  $z$  的线性函数. 图 3 为对应于不同荷载参数  $\xi$  的梁的挠曲线, 不难看出梁的挠度随着  $\xi$  的增大而增大. 图 4 为梁横截面上电势  $\phi$  的分布曲线, 以及不同的荷载参数  $\xi$  和材料参数对它的影响. 进一步的计算可知梁厚度的变化是非常微小的. 需要指出的是, 除有特别说明外, 图 2~图 4 中所有的数值都是针对 PZT-4 得到的.

#### 4 结 论

本文主要研究了密度呈梯度时压电悬臂梁在线性分布荷载作用下的解析解, 是经典弹性理论中相关问题的推广, 并通过逆解法求得了梁中用多项式表示的力学和电学分量. 当力-电耦合消失时, 即有 ( $g_{ij} = 0, \zeta_{ij} \rightarrow \infty$ ), 本文所得解退化为经典弹性理论相关问题的解, 这也说明了本文工作的正确性. 另一方面, 作为特例, 常体力 ( $m_1 = m_2 = 0$ ) 和无体力 ( $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ ) 的压电悬臂梁的解答可从本文给出的基本解中直接导出. 本文研究还发现在荷载参数  $\xi$  和  $h/L$  比率的较大变化范围内, 应力分量  $\sigma_x$  均可大致视为  $z$  的线性函数. 由电势的表达式可知梁的上、下表面的电势均并不恒定. 但是在梁的上、下表面之间, 任意横截面上的电势变化都是恒定的.

#### 参 考 文 献

- 1 Ding HJ, Chen B, Liang J. On the Green's function for two-plane transversely isotropic piezoelectric structure. *Int J Solids Structure*, 1997, 34(23): 3041~3057
- 2 Chen WQ, Shioya T, Ding HJ. Integral equations for mixed boundary value problem of a piezoelectric half-space and the applications. *Mechanics Research Communications*, 1999, 26(5): 583~590
- 3 RKND Rajapakse, Zhou Y. Stress analysis of piezoceramic cylinders. *Smart Materials and Structures*, 1997 (6): 169~177
- 4 Shi ZF. Analysis of a piezoelectric cantilever with non-uniform body force. 13rd International Conference on Composite Materials, Beijing, China, June 25~29, 2001
- 5 Shi ZF. General solution of a density functionally gradient piezoelectric cantilever and its applications. *Smart Materials and Structures*, 2002, 11(1): 122~129
- 6 Uchino K. Piezoelectric Actuators and Ultrasonic Motors. Kluwer Academic Publ, Boston/Dordrecht/London, 1997
- 7 Wu CCM, Kahn M. Piezoelectric ceramic with functional gradients: A new application in material design. *Journal of the American ceramic society*, 1996, 79(3): 809
- 8 Hauke T, Kouvátov A. Bending behavior of functionally gradient materials. *Ferroelectric*, 2000, 238: 195~202
- 9 Ding HJ, Wang GQ, Chen WQ. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1997, 453: 2241~2257
- 10 Sosa HA, Castro Ma. Electroelastic analysis of piezoelectric laminated structures. *Appl Mech Rev*, 1993, 46(11): 21~28
- 11 Ruan XP, Danforth SC, Safari A, et al. Saint-Venant end effects in piezoceramic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37: 2625~2637

## PIEZOELECTRIC CANTILEVER ACTUATOR SUBJECTED TO A LINEARLY DISTRIBUTED LOADING

Yang Yongbo Shi Zhifei Chen Ying

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract** The inverse method is traditionally used to solve elastic problems. In the present paper this method is applied for a piezoelectric cantilever actuator subjected to a linear distributed loading on the upper surface. Nonlinear body force  $F_z$  is also considered. The stress function and induction function in the form of polynomials are obtained. The general solutions as well as the influence of the distribution profile of body force on this solution are discovered. From this conclusion the solutions of the cantilever actuator with constant body force and without body force can be easily found. This work provides a feasible method to study other kinds of functionally gradient piezoelectric microstructures.

**Key words** piezoelectric material, FGM, actuator, sensor

Received 6 February 2002, revised 14 January 2004.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50272003), the Teaching and Research Award Fund for Outstanding Young Teachers in Higher Education Institutions of MOE.