

双气圈动力学模型的建立与求解

詹葵华

(苏州大学机电工程学院, 苏州 215021)

中沢賢

(日本信州大学繊維学部)

摘要 在建立自由气圈的动力学模型的基础上, 进一步提出了双气圈的力学模型. 该模型整体化求解双气圈纱线的形态和张力的方法, 既改进了以往忽略控制环的解析方法, 又避免了求解中由边界条件的不确定性带来的计算上的繁琐和近似. 因微分方程中加入了切向空气阻力、纱线的卷取速度及重力等微影响因素, 使模型更为严密、可靠, 同时拓宽了模型的使用范围.

关键词 气圈, 动力学, 张力, 纱线, 细纱机

引 言

气圈是回转的柔性线状物体由离心力等作用而形成的气球状轨迹. 该现象出现在各种工程领域. 本文以纺织机械中的细纱机为例探讨带控制环的双气圈的力学模型.

有关带控制环的双气圈的研究, 目前被广泛认可的方法是忽略与控制环接触部分纱线的力学特性变化, 用两段自由气圈直接衔接来求解纱线的张力及其形态^[1,2]. 这种方法无需建立双气圈动力学模型, 而是直接采用自由气圈的力学模型^[3~6]进行求解. 在实际应用中, 因控制环的断面直径很小, 纱线重量极轻, 这类近似求解可信度较大. 但衔接处变量值的突变引起边界条件的不确定不仅给计算带来了困难, 也影响到从理论上准确把握气圈形态和张力的关系. 另外, 研究中忽略切向空气阻力和重力等因素的研究方法^[7,8]使研究结果的普适性大大降低, 难以向更广的领域拓展. 本文在前期所建立的自由气圈动力学模型的基础上^[9], 考虑惯性力, 纱线张力, 法向空气阻力和环面的正压力, 摩擦力的作用, 并且加入纱线的卷取速度, 纱线自重及切向空气阻力等以往常被忽略的因素, 对控制环表面的纱线段进行力学解析, 从而建立了双气圈的力学模型. 本方法突破了原有的求解模式, 使动力学模型更具科学性, 也使气圈理论得到进一步的完善.

1 双气圈动力学模型的建立

1.1 有关双气圈

图 1 为双气圈的示意图. P 为钢丝圈, Q 为

导纱钩, 控制环把气圈分隔成两部分. 本文把上方的气圈称为气圈 I, 下方的气圈称为气圈 II. S 点位于控制环上的中心平面位置, A, B 分别为气圈 I 和气圈 II 在环面上的端点. 以锭子的回转轴为 Z 轴建立柱面坐标系. Z 轴的正方向朝上, 原点位于钢丝圈所处的水平面上. 纱线随钢丝圈以 ω 的角速度旋转的同时, 以 V_s 的线速度被卷取.

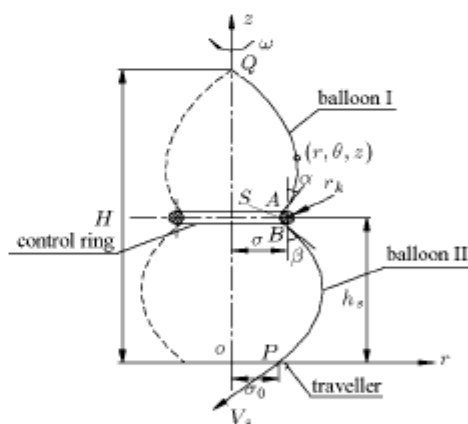


图 1 双气圈示意图

Fig.1 The curve of double-balloon

1.2 控制环上微元纱段的力学解析

在控制环上取微元纱段作受力分析. 如图 2 所示, 微元纱段共受到 7 个外力, 即张力 dF_T , 法向空气阻力 dF_{pn} , 切向空气阻力 dF_{pt} , 正压力 dF_N , 摩擦力 dF_M , 重力 dF_G 及惯性力 dF_R 的作用.

设纱线上任意点的位移向量为 R , 纱线切向单位向量为 t , 回转角速度为 ω , 纱线张力为 T , 则有

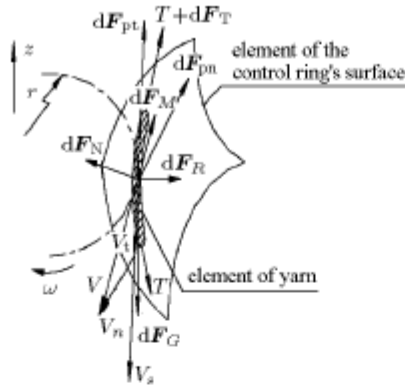


图 2 控制环表面微元纱段的受力分析
Fig.2 Dynamic analysis of an element of yarn at the surface of the control ring

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad (1)$$

$$\mathbf{t} = r'\mathbf{e}_r + r\theta'\mathbf{e}_\theta + z'\mathbf{e}_z \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{e}_z \quad (3)$$

$$\mathbf{T} = T(r'\mathbf{e}_r + r\theta'\mathbf{e}_\theta + z'\mathbf{e}_z) \quad (4)$$

这里, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ 分别为坐标轴的单位向量, “'”表示对微元纱段 ds 求微分.

有关单位长度纱线所受的张力 $\mathbf{F}_T$, 切向空气阻力 $\mathbf{F}_{pt}$, 法向空气阻力 $\mathbf{F}_{pn}$, 正压力 $\mathbf{F}_N$, 摩擦力 $\mathbf{F}_M$, 重力 $\mathbf{F}_G$, 惯性力 $\mathbf{F}_R$ 分别解析如下.

$$\mathbf{F}_T = d\mathbf{T}/ds =$$

$$[T(r'' - r\theta'^2) + T'r']\mathbf{e}_r + [T(2r'\theta' + r\theta'') + T'r\theta']\mathbf{e}_\theta + [Tz'' + T'z']\mathbf{e}_z \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_{pt} = -p_t|\mathbf{V}_t + \mathbf{V}_s|(\mathbf{V}_t + \mathbf{V}_s) \quad (6)$$

其中 p_t 为切向空气阻力系数, 而

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} =$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = -r^2\theta'\omega(r'\mathbf{e}_r + r\theta'\mathbf{e}_\theta + z'\mathbf{e}_z) \quad (7)$$

$$\mathbf{V}_s = -V_s(r'\mathbf{e}_r + r\theta'\mathbf{e}_\theta + z'\mathbf{e}_z) \quad (8)$$

这样,

$$\mathbf{F}_{pt} = p_t(r^2\theta'\omega + V_s)^2(r'\mathbf{e}_r + r\theta'\mathbf{e}_\theta + z'\mathbf{e}_z) \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_{pn} = -p_n|\mathbf{V}_n|\mathbf{V}_n \quad (10)$$

其中, p_n 为法向空气阻力系数, 而

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n &= \mathbf{V} - \mathbf{V}_t = \\ &r\omega\sqrt{r'^2 + z'^2}\left[\frac{rr'\theta'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}}\mathbf{e}_r - \sqrt{r'^2 + z'^2}\mathbf{e}_\theta + \frac{r\theta'z'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}}\mathbf{e}_z\right] \end{aligned} \quad (11)$$

这样,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{pn} &= -p_n r^2 \omega^2 (r'^2 + z'^2) \cdot \\ &\left[\frac{rr'\theta'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}}\mathbf{e}_r - \sqrt{r'^2 + z'^2}\mathbf{e}_\theta + \frac{r\theta'z'}{\sqrt{r'^2 + z'^2}}\mathbf{e}_z\right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_N = N\left(\frac{r - a_s}{r_k}\mathbf{e}_r + \frac{z - h_s}{r_k}\mathbf{e}_z\right) \quad (13)$$

其中 N 为单位长度的正压力, r_k 为控制环断面圆的半径, a_s, h_s 为图 1 所示的控制环的相关尺寸. 因

$$\mathbf{F}_M = \mu N \frac{(\mathbf{V} + \mathbf{V}_s)}{|\mathbf{V} + \mathbf{V}_s|} \quad (14)$$

所以

$$\mathbf{F}_M = \frac{\mu N}{p_c}[V_s r' \mathbf{e}_r + (V_s r \theta' + \omega r) \mathbf{e}_\theta + V_s z' \mathbf{e}_z] \quad (15)$$

其中

$$p_c = \sqrt{(V_s r')^2 + (V_s r \theta' + \omega r)^2 + (V_s z')^2} \quad (16)$$

μ 为环面与纱线间的摩擦系数.

$$\mathbf{F}_G = -mg\mathbf{e}_z \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_R = m\mathbf{a} \quad (18)$$

m 为纱线的线密度, g 为重力加速度, $\mathbf{a}$ 为相对静止坐标系的加速度. 如图 3 所示, XOY 为静止坐标系, xoy 为与钢丝圈同步的旋转坐标系. 本文讨论气圈的形态, 是以旋转坐标系为参照进行的. 即求解纱线各点的 r, θ, z 的坐标值. 由图 3 可知, 经过时间 t , 纱线上 A_0 点将运动到 A_t 点, 其相对旋转坐标系的旋转角为 θ , 相对静止坐标系的旋转角 $\phi = \theta + \omega t$.

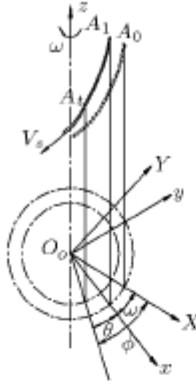


图 3 微元纱段在静止坐标系和旋转坐标系中的位置

Fig.3 An element of yarn in static co-ordinates and in rotating co-ordinates

设 R_0 为静止坐标系中的位置向量, 则有加速度

$$\begin{aligned} a = \frac{d^2 R_0}{dt^2} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})e_\phi + \ddot{z}e_z = \\ &[V_s^2 r'' - r(V_s\theta' + \omega)^2]e_r + [2r'V_s(V_s\theta' + \omega) + \\ &rV_s^2\theta'']e_\theta + V_s^2 z''e_z \end{aligned} \quad (19)$$

“.”表示对 t 求微分。这样,

$$\begin{aligned} F_R = m\{ &[V_s^2 r'' - r(V_s\theta' + \omega)^2]e_r + \\ &[2r'V_s(V_s\theta' + \omega) + rV_s^2\theta'']e_\theta + V_s^2 z''e_z\} \end{aligned} \quad (20)$$

1.3 求解双气圈微分方程

由力的平衡可得联立方程组

$$\begin{aligned} m[V_s^2 r'' - r(V_s\theta' + \omega)^2] &= \\ T(r'' - r\theta'^2) + T'r' - p_n r^3 \omega^2 r'\theta' \sqrt{r'^2 + z'^2} + \\ p_t(r^2\theta'\omega + V_s)^2 r' + N \frac{r - a_s}{r_k} + \frac{\mu N V_s r'}{p_c} \\ m[2r'V_s(V_s\theta' + \omega) + rV_s^2\theta''] &= \\ T(2r'\theta' + r\theta'') + T'r\theta' + p_n r^2 \omega^2 (r'^2 + z'^2) \cdot \\ \sqrt{r'^2 + z'^2} + p_t(r^2\theta'\omega + V_s)^2 r\theta' + \\ \frac{\mu N(V_s r\theta' + \omega r)}{p_c} \\ mV_s^2 z'' &= Tz'' + T'z' - p_n r^3 \omega^2 \theta' z' \sqrt{r'^2 + z'^2} + \\ p_t(r^2\theta'\omega + V_s)^2 z' + N \frac{z - h_s}{r_k} + \frac{\mu N V_s z'}{p_c} - mg \end{aligned} \quad (21)$$

经整理计算得

$$\begin{aligned} N &= \left\{ (r - a_s) \left\{ -m[r(V_s\theta' + \omega)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{r'^2 + z'^2}{r - a_s} V_s^2 + \frac{r'}{z'} g \right\} + \\ &\quad \left. T \left[r\theta'^2 + \frac{r'^2 + z'^2}{r - a_s} \right] \right\} / r_k \\ T' &= -mr r' \omega^2 - p_t(r^2\theta'\omega + V_s)^2 - \\ &\quad \frac{\mu N(V_s + \omega r^2\theta')}{p_c} + mgz' \\ r'' &= \left[mr(V_s\theta' + \omega)^2 - T r\theta'^2 + T'r' - \right. \\ &\quad \left. p_n r^3 r'\theta' \omega^2 \sqrt{r'^2 + z'^2} + \right. \\ &\quad \left. p_t r'(r^2\theta'\omega + V_s)^2 + N \frac{r - a_s}{r_k} + \frac{\mu N V_s r'}{p_c} \right] / \\ &\quad (mV_s^2 - T) \\ \theta'' &= \left[-2mr'V_s(V_s\theta' + \omega) + 2r'\theta'T + \right. \\ &\quad \left. T'r\theta' + p_n r^2 \omega^2 (r'^2 + z'^2) \sqrt{r'^2 + z'^2} + \right. \\ &\quad \left. p_t(r^2\theta'\omega + V_s)^2 r\theta' + \right. \\ &\quad \left. \frac{\mu N(V_s r\theta' + \omega r)}{p_c} \right] / [r(mV_s^2 - T)] \\ z' &= \sqrt{1 - r'^2 - (r\theta')^2} \end{aligned} \quad (22)$$

由上式可求解控制环面上纱线的张力。当正压力 $N = 0$ 时, 式 (22) 即为自由气圈的动力学表达式。也就是说高速旋转, 同时被卷取的绕性体在满足以下前提的情况下, 可使用式 (22) 来分析其张力和空间形态:

- 1) 柔软且不延伸变形;
- 2) 材质均匀, 线密度 m 为常数;
- 3) 旋转过程中, 空间形态保持稳定状态。

2 双气圈形态和张力的求解方法及其边界条件

以图 1 中的 S 点为起始点, 给定适当步长 ds , 使用打靶法沿纱线向上作数值计算^[10~12], 求解气圈 I 的形态和张力。 S 点处的已知边界条件为 $r_s, \theta_s, z_s, r'_s, z'_s$, 分别为

$$\begin{aligned} r_s &= a_s - r_k, \quad \theta_s = 0, \quad z_s = h_s \\ r'_s &= 0, \quad z'_s = \sqrt{1 - (a_s - r_k)^2 \theta_s'^2} \end{aligned} \quad (23)$$

而未知条件为 θ'_s 和 T_s 。首先任意设定 θ'_s 和 T_s 为某一数值, 利用方程式 (22) 进行数值计算。当纱线长 s 增长, $z = H$ 时, 判断 $r_Q = 0$ 是否成立, 反复

调整 θ'_s 和 T_s 并使其成立. 其间还给出一个约束条件, 即纱线从控制环表面 A 处的脱开角度 α 为某一固定数值. 当纱线从环面上脱开, 进入自由气圈段后, 方程式 (22) 中的 N 用 0 代入. 搜索得 θ'_s 和 T_s 后, 气圈 I 的张力及走向也就明确求得.

使用 S 点的边界条件式 (23) 及已计算所得的 θ'_s 和 T_s 即可直接求解气圈 II. 此时, 应有惟一一个气圈 II 与之对应. 以 S 点为起点, 给定适当的步长 ds (负值), 利用方程式 (22) 向下作数值计算. 计算时任意给定脱离点 B 处的包容角 β 为某一数值, 判断 $z = 0$ 时 $r_p = a_0$ 是否成立. 反复调整 β 使之成立为止. 这时即可明确求得整个双气圈的形态及张力.

图 1 中, A, B 两点为纱线从控制环表面脱开的位置. 因纱线与环面的摩擦系数很小, 本文假定在 A, B 两点处纱线处于一阶连续状态. 把计算所得的环面纱线末点各变量的终值作为气圈 I 和气圈 II 起始点的初始值. 另外, 经分析, 当机构各尺寸及纱线特性被确定后, 纱线在 A 处脱开的角度 α 决定了双气圈的形态和张力.

2.1 关于空气阻力系数 p_n 和 p_k 的选取

空气阻力系数 p_n 的大小由纱线断面的直径 d , 法向速度 V_n 以及雷诺数 Re 决定, 并满足以下公式

$$p_n = \frac{1}{2} C_N \rho d \quad (24)$$

这里, ρ 为空气密度, 取 1.2 kg/m^3 , C_N 为与雷诺数相关的系数 [3]. 而

$$Re = V_n d / \eta \quad (25)$$

η 为空气的运动黏度系数, 取 $1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

气圈中不同位置纱线的 V_n 值是变化的, 应该说空气阻力系数 p_n 也是一个变化值. 但由式 (10) 可知, 空气阻力 F_{pn} 与 V_n^2 成正比. 所以相对来说, p_n 对空气阻力的影响较小. 计算时可选择适当的 V_n 值来确定 p_n .

切向空气阻力系数 p_k 的选取很难找到明确的理论依据. 本文采用文献 [13] 的观点, 取 p_n 的 1/4 倍.

2.2 实例计算

本文以日本金井重要工业株式会社生产的精纺机为例, 作双气圈形态张力的分析计算. 纱线的特性及机构尺寸如表 1 所示.

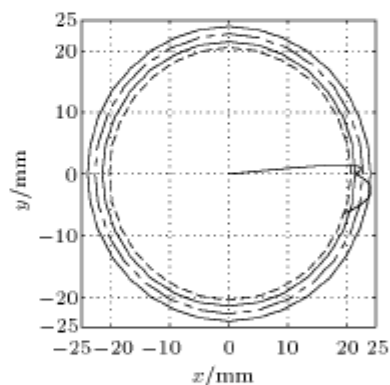
气圈形态和张力之间存在着非常密切的关系,

表 1

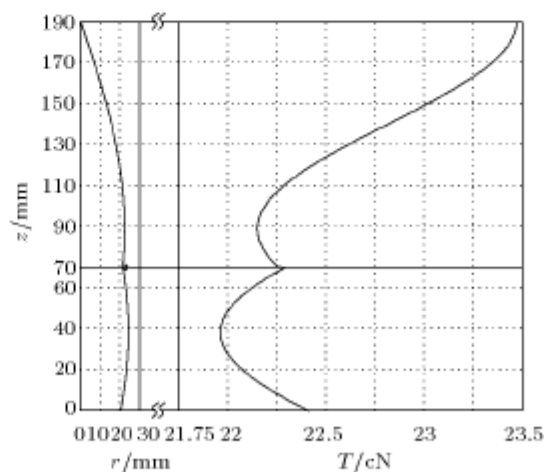
Table 1

H/mm	190	mass per unit length / $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$	1.48×10^{-5}
h_s/mm	70	angular velocity /rpm	18 000
a_s/mm	22.75	$p_n/\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$	1×10^{-4}
r_k/mm	1.25	$p_t/\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$	2.5×10^{-5}
a_0/mm	20.5	$V_s/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	0.32
d/mm	0.3	μ	0.1

准确解析气圈曲线为实现张力的实时控制提供了可能性. 而本文为了解决新建动力学模型的求解问题, 在这方面不作探讨, 仅以双气圈形态和张力的一种情况作为算例, 进行数值计算. 图 4(a), 4(b) 分别表示 $\alpha = 5^\circ$ 时计算所得的双气圈水平投影、双气圈包络曲面母线的形态以及高度方向上纱线张力的变化情况. 图 4(a) 中的虚线圆为 P 点的轨迹, 以点划线为中心线的两圆为控制环的内外圆投影. 并解得 S 点处各变量的数值为



(a)



(b)

图 4 双气圈的形态和张力

Fig.4 Shape and tension of double-balloon

$$\left. \begin{aligned} r_s &= 21.5 \text{ mm}, \quad z_s = 70 \text{ mm}, \quad \theta_s = 0 \\ r'_s &= 0, \quad \theta'_s = 2.83/\text{m}, \quad z'_s = 0.998 \\ T_s &= 22.27 \text{ cN} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

导纱钩处的张力 $T_Q = 23.48 \text{ cN}$, 钢丝圈处的张力 $T_P = 22.41 \text{ cN}$, $\beta = 9.21^\circ$.

2.3 与简化计算的分析比较

关于双气圈的研究, 以往普遍采用的是忽略控制环的存在, 单独建立自由气圈动力学模型, 求解双气圈的形态和张力的方法. 这是一种简化算法. 笔者同时用这种简化算法在保证纺出张力 T_Q 相同的前提下对本文的实例作了计算和比较. 结果表明, 整个双气圈的张力大小近乎一致, 差异最大位于气圈 II 最膨胀处, 为 0.05 cN . 而气圈形态, 特别是气圈 II 的空间扭转程度相差较大, P 点处的 θ 角相差约 4° . 从数值计算角度比较, 不考虑控制环的双气圈在 S 点处一阶不连续, 因此计算时边界条件存在不确定性, 需要给出一定的假设条件, 这样, 算法在推广应用上便有了局限性. 因篇幅所限, 此处不出具比较计算结果图表.

3 结 论

1) 建立求解了带控制环气圈曲线形态和张力的动力学模型. 此模型考虑以往模型中常被忽视的切向空气阻力、纱线自重及卷取速度等因素, 适用于求解带毛羽的粗重纱线作回转运动时气圈的张力与形态, 同时也可作为求解其他工程行业中类似的气圈问题的参考模型.

2) 由解析控制环表面纱段的受力情况, 得到微分方程式 (22). 利用该方程可求解在摩擦体表面作回转运动的纱线的张力变化情况. 当式中 $N = 0$ 时, 即为自由气圈的解析方程式.

3) 针对带控制环的双气圈情况, 从控制环中央 S 点处开始作数值计算, 由此可得到一系列相互对应的气圈形态和张力值. 而其决定性参数则为控制环上纱线的脱离角度 α . 当 $\alpha = 5^\circ$ 时, 得图 4 的形态和张力.

4) 双气圈由两段自由气圈和一段绕环面纱线段

组成, 但解析方程可统一用一个高阶多元微分方程组表达. 与传统的简化解析法相比较, 方法简明, 精度高.

参 考 文 献

- 1 Fraser WB. On the theory of ring spinning. *Phil Trans R Soc Lond A*, 1993, 342: 439~468
- 2 Fraser WB, Farnell L, Stump DM. The effect of a slub on the stability of the ring-spinning balloon. *J Text Inst*, 1995, 86(4): 610~634
- 3 Kothari VK, Leaf GAV. The unwinding of yarns from packages. *J Text Inst*, 1979, 3: 89~94
- 4 Kothari VK, Leaf GAV. The unwinding of yarns from packages. *J Text Inst*, 1979, 5: 184~197
- 5 陈人哲. 纱线力学问题. 北京: 纺织工业出版社, 1989. 140~177 (Chen Renzhe. Yarn Dynamics. Beijing: Textile Industry Press, 1989. 140~177(in Chinese))
- 6 Mack C. Theoretical study of ring and cap spinning balloon curves. *J Text Inst*, 1953, 44(11): T483~T498
- 7 新宅敦德, 山本孝, 喜成年泰. ダブルツイステで強撚されろつイラメント系の張力. 纖維学会誌, 1988, 44(10): 511~516 (Shintaku S, Yamamoto T, Kinari T. Tension generated in hard twist filament yarn by two-for-one twister. *Journal of Textile Society*, 1988, 44(10): 511~516 (in Japanese))
- 8 新宅敦德, 吉村元一. カバード糸製造におけるカバリング糸の巻き付き張力について. 纖維学会誌, 1980, 36(2): 75~81 (Shintaku S, Yoshimura G. A study on tension of ballooning in covering process. *Journal of Textile Society*, 1980, 36(2): 75~81(in Japanese))
- 9 詹葵华, 黄民柱, 杨军. 倍捻锭气圈动力学——气圈与锭盘丝线的形态与张力. 纺织学报, 2001, 4: 6~8 (Zhan Kuihua, Huang Minzhu, Yang Jun. The dynamics of yarn balloon in two for one twisting. *Journal of Textile Research*, 2001, 4: 6~8(in Chinese))
- 10 Batra SK, Ghosh TK, Zeng Q. An integrated approach to dynamic analysis of the ring spinning process. *Textile Res J*, 1995, 65(7): 417~423
- 11 Batra SK, Ghosh TK, Zeidman MI. An integrated approach to dynamic analysis of the ring spinning process. *Textile Res J*, 1989, 59(6): 309~317
- 12 Lisini GG, Toni P, Quilghini D, et al. A comparison of stationary and non-stationary mathematical models for the ring-spinning process. *J Text Inst*, 1992, 83(4): 550~559
- 13 Shintaku S, Yoshimura G, Iwaki N. Effect of tangential air drag on balloon curve. *Journal of Textile Society*, 1982, 38(4): T171~T177

DOUBLE-BALLOON DYNAMICS MODEL

Zhan Kuihua* Masaru Nakazawa†

*(*College of Mechatronics Engineering, Suzhou University, Suzhou 215021, China*)†(*Faculty of Textile Science and Technology, Shinshu University, Japan*)

Abstract In this paper a double-balloon dynamic model is presented for a whirling yarn of a ring spinning machine with balloon control ring, considering influences of running speed of the yarn, tangential direction air drag and gravitational force on the yarn as well as inertia of the yarn, normal direction air drag and tension of the yarn. Although dynamic treatment of the connecting condition of the yarn at the balloon control ring is very important both for analytical theory and practical application to control of ring spinning machine, there have never been derived dynamic analytical theory considering many practical parameters. In the paper the authors derived condition equations of the yarn contacting to the control ring, taking account of reaction force of the ring to the yarn and frictional force between the ring and the yarn. Obtained equations can derive numerically the shape of whirling yarn (balloon shape, inclination angle of the yarn to bobbin axis) and the yarn tension, if the certain values of the system parameter such as diameters of the traveler guide ring and balloon control ring, heights of yarn guide and control ring above the traveler guide, air drag coefficients of the yarn, coefficient of frictional force of control ring to the yarn, revolution speed of the bobbin, etc. are given. Numerical calculations results proved validity of the theory. The theory derived is applicable to on-line and real time control of the yarn tension of ring spinning machine.

Key words balloon, dynamics, tension, yarn, ring spinning machine