

二维含裂纹结构与声耦合问题研究

吴国荣 钟伟芳

(华中科技大学力学系, 武汉 430074)

摘要 应用分形有限元方法结合边界元方法研究了二维含裂纹结构和声耦合问题. 采用二级分形有限元方法对含裂纹的弹性结构体进行离散处理, 这样可以使得自由度数大大地减少; 无限大外域声场的计算使用边界元方法, 可以自动满足无穷远辐射条件. 数值仿真算例结果表明: 结构声耦合系统的共振频率随着裂纹深度的增加而下降; 裂纹附近的声场所受的影响较为明显.

关键词 结构, 裂纹, 声, 分形, 有限元, 边界元

引 言

结构和声相互作用的研究对于结构声系统的噪声和振动的有效控制具有重要的意义. 这种相互作用的物理本质为能量在结构和声介质之间来回传输. 当流体的声阻尼和固体的相比不是足够小时, 声场和结构的响应都会明显地受这种相互作用的影响. 对这种相互作用问题研究感兴趣的应用领域包括: 浸入流体的弹性结构体的辐射和散射声场、发声腔体以及储液管道系统动力学等. 由于精确解只限于几何形状及载荷条件非常简单的情形, 已提出了许多有效的数值计算方法求解结构声耦合问题, 这些方法包括有限元、边界元和无限元方法之间各种形式的结合^[1~7].

本文应用分形有限元^[8]和边界元相结合的方法计算了带裂纹的弹性体对声波的辐射和散射. 考虑一内侧带有裂纹的无限长空心柱体 (如图 1 所示). 外域散射声场的计算采用边界元方法, 这将自动满足无限远处的辐射边界条件. 对含裂纹的弹性结构采用二级分形有限元方法进行离散. 用一人工边界 Γ (如图 2 所示) 把裂纹尖端附近区域 D 和其余的区域 Ω 分开. 在区域 Ω 采用常规有限元方法进行离散. 在区域 D , 引用分形几何的概念以形成自相似网格; 由于两个自相似网格的刚度矩阵和质量矩阵具有非常简单的关系, 这样只需计算第一分形层中的单元矩阵; 此外采用全局插值函数把节点坐标变换为一组广义坐标, 从而使得自由度大为减少. 最后对含裂纹圆柱体的外域辐射和散射声场进行了数值计算, 结果表明裂纹的存在使得耦合系统的共振频

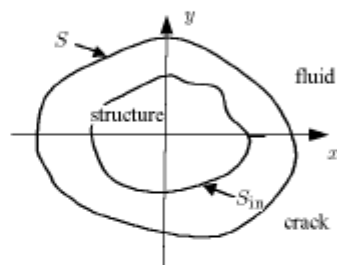


图 1 含裂纹结构声耦合系统

Fig.1 2D cracked structure coupled with sound

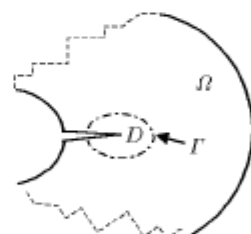


图 2 区域 D 和 Ω 示意图

Fig.2 The domain D and Ω

率下降.

1 二级分形有限元

1.1 有限元离散

经离散处理后, 结构谐和振动的控制方程为

$$(-\omega^2 M - i\omega C + K)U = L \quad (1)$$

其中 M , C 和 K 分别是结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; U 和 L 分别是位移列向量和载荷列向量; ω 是外载荷的角频率.

1.2 全局插值函数

在裂纹尖端的邻近区域 D , 利用如下形式的 I 型裂纹位移场的解析表达式作为全局插值函数^[8]

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2\mu} a_n \left[\left(\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2\mu} a_n \left[\left(\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \sin \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这里 r 和 θ 是极坐标 (如图 3 所示).

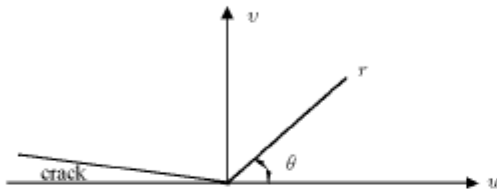


图 3 裂纹尖端邻域极坐标表示
Fig.3 Polar coordinate of plane displacements
in vicinity of crack

利用表达式 (2), 节点位移列向量 U 可变换为一组广义坐标 a

$$U = Ta \quad (3)$$

这里 T 是变换矩阵. 根据变分原理, 方程 (3) 可化为

$$T^T (-\omega^2 M - i\omega C + K) Ta = T^T L \quad (4)$$

由于式 (2) 只取 24 项就具有足够高的精度, 所以 a 的分量个数较 U 要少得多, 从而求解方程 (4) 比求解方程 (1) 要快得多.

1.3 变换过程

在裂纹尖端附近区域 D 的网格划分如图 4 所示, 图中人工边界 Γ 上的小圆圈“o”表示主节点; 区域 D 内部的节点称为从节点. 把区域 D 划分成一系列形状相似的层, 每一层含有 8 个单元. 通过自动地网格细分, 理论上在裂纹尖端可以产生无限小的单元. 对于两个几何相似的单元, 分别以上标 1 和 2 表示, 相似比为 α , 其单元刚度矩阵和单元质量矩阵具有如下简单的关系

$$K_2 = K_1, \quad M_2 = \alpha^2 M_1 \quad (5)$$

这里 K 和 M 分别表示单元刚度矩阵和单元质量矩阵. 假定阻尼为比例阻尼, 因而只需要计算第一分形层的单元矩阵.

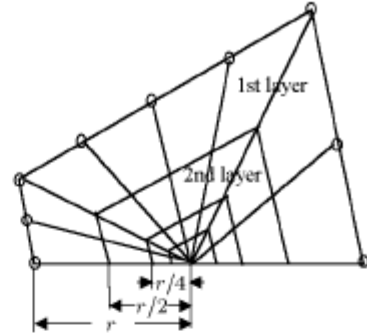


图 4 区域 D 的分形有限元网格
Fig.4 Mesh configuration of domain D

第一分形层中的单元既有主节点又有从节点. 令 U_m 和 U_s 分别表示主节点和从节点的位移矢量. 只需把从节点的位移矢量变换成广义坐标, 变换矩阵为 $\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. 变换后的刚度矩阵和质量矩阵分别为

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} T^T K_{ss}^f T & T^T K_{sm}^f \\ K_{ms}^f T & K_{mm}^f \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} T^T M_{ss}^f T & T^T M_{sm}^f \\ M_{ms}^f T & M_{mm}^f \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这里上标“f”表示第一分形层.

对于内层的单元, 其节点皆为从节点. 利用关系式 (5), 可得 (这里比值 $\alpha = 1/2$)

$$\left\{ \begin{aligned} (T^n)^T K^n T^n &= (T^n)^T K^f T^n \\ (T^n)^T M^n T^n &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} (T^n)^T M^f T^n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中上标“n”表示所在的分形层数. 变换后的刚度矩阵和质量矩阵的第 i 行、第 j 列为

$$\left\{ \begin{aligned} k_{ij}^n &= \left(\frac{1}{2^{(i+j)/2}} \right)^n (T^f)_i^T K^f T_j^f \\ m_{ij}^n &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2^{(i+j+2)/2}} \right)^n (T^f)_i^T M^f T_j^f \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由方程 (5)~(8) 可以装配成区域 D 的刚度矩阵和质量矩阵.

2 边界元方法

假定外域声介质为理想流体, 在谐和波动条件下, 其控制方程为如下 Helmholtz 方程^[9]

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (9)$$

式中: ∇^2 为 Laplacian 微分算子, p 为声压, $k = \omega/c$ 为声波波数, c 为声介质中的波速. 对于散射问题, 由于在外域流体中的入射声压 p_i 已知, 因而把总的声压 p 分解为入射声压和散射声压两部分较为简便

$$p = p_i + p_s \quad (10)$$

Helmholtz 方程 (9) 可化为如下边界积分方程^[10]

$$\int_S p(\mathbf{x}) \frac{\partial G(r)}{\partial n} dS - \int_S \hat{q}(\mathbf{x}) G(r) dS = \begin{cases} p(\mathbf{x}')/2 - p_i, & \mathbf{x}' \text{ 在 } S \text{ 上} \\ p(\mathbf{x}') - p_i, & \mathbf{x}' \text{ 在 } E \text{ 内} \end{cases} \quad (11a)$$

$$(11b)$$

这里 E 表示外域声场点, r 是从点 $\mathbf{x}$ 到点 $\mathbf{x}'$ 的距离, $\hat{q}$ 是声压 p 的法向导数, $G(r) = -\frac{i}{4} H_0^2(kr) (H_0^2(kr))$ 为第二类零阶 Hankel 函数) 为二维自由空间的 Green 函数.

利用边界元方法对方程 (11a) 进行离散, 可得

$$AP = BQ + P_i \quad (12)$$

其中列向量 P, Q 和 P_i 的各分量分别是总的声压、声压的法向导数和入射波边界单元节点上的值, 矩阵 A 和 B 的元素由下式计算

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} &= \frac{1}{2} \delta_{mn} - \int_{S_n} \frac{\partial G(r)}{\partial n} dS \\ B_{mn} &= - \int_{S_n} G(r) dS \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上式中, 积分路径 S_n 为离散的边界单元, 符号 δ_{mn} 为 Kronecker 符号.

3 结构声耦合分析

对于结构声耦合问题, 作用在结构上载荷列向量可写为如下形式

$$L = L_s - R_f H P \quad (14)$$

这里 L_s 为外载荷列向量, R_f 为一矩形变换阵, 其作用是把声压作用在交界面上的载荷升阶为结构节点总载荷. 矩阵 H 的作用是从由声压作用产生的载荷列阵中分解出未知边界节点声压列阵 P , 如果边界上离散为 NE 个单元, 则其维数为 $2NE \times NE$. 把其按每两行一列进行分块, 相应的第 m 行、第 n 列 h_{mn} 形式上可表示为

$$h_{mn} = \int_{S_n} N_s \cdot n dS \quad (15)$$

其中 N_s 为结构有限元插值形函数.

把式 (14) 代入式 (1), 得

$$DU = L_s - R_f H P \quad (16)$$

这里

$$D = (-\omega^2 M - i\omega C + K) \quad (17)$$

利用流固交界面上的连续条件, 方程 (12) 化为

$$AP = \omega^2 \rho B U_n + P_i \quad (18)$$

其中 ρ 为流体的密度, U_n 为交界面 S 上外法向位移列向量, 它和结构总体位移列向量 U 满足如下变换关系

$$U_n = R_s U \quad (19)$$

上式中 R_s 为一矩形变换阵, 其作用是把结构的总体位移列阵变换为结构外边界节点上法向位移列向量.

由方程 (16), (18) 和 (19) 中消去列向量 U 和 U_n , 得到如下声结构耦合系统的控制方程

$$(A + \omega^2 \rho B R_s D^{-1} R_f H) P = \omega^2 \rho B R_s D^{-1} L_s + P_i \quad (20)$$

由上式求得流固交界面上的声压 P , 然后代入方程 (16) 计算位移向量 U , 再由式 (19) 计算 U_n . 解出流固交界面上的声压 P 和 U_n 后, 外域声场中任一点的声压值可由 Helmholtz 积分方程 (11b) 的相应离散格式求出.

4 数值计算和结论

对含裂纹的铝制无限长弹性圆柱体的外域辐射和散射声场进行了数值模拟计算, 材料常数为: 杨氏模量为 7.1×10^{10} Pa, 泊松比为 0.3, 密度为 2700 kg/m^3 . 在数值计算中, 取无限长圆柱体的内外半径分别为 $a=1.0 \text{ m}$ 和 $b=1.2 \text{ m}$; 外域声介质的密度和波速分别为 1023 kg/m^3 和 1450 m/s . 结构的阻尼值为

$$C = 0.0145M + 0.012K$$

算例 1 辐射声场的计算

对于辐射问题, 入射波为零. 假设外载荷为一对作用在结构内边界 (或称“干边界”) 上点 $x=0, y=1.0 \text{ m}$ 和 $x=0, y=-1.0 \text{ m}$ 处的谐和力, 其幅值为

10^5 N. 数值计算结果如图 5 所示, 其中图 5(a) 给出的是在点 $x = 2.0$ m, $y = 0$ 处的计算结果, 图 5(b) 给出在点 $x = -2.0$ m, $y = 0$ 处的计算结果. 图中的纵坐标为声压值, 单位为 $\text{dB}(20 \log |p/0.1|)$, 横坐标为无量纲波数 ka .

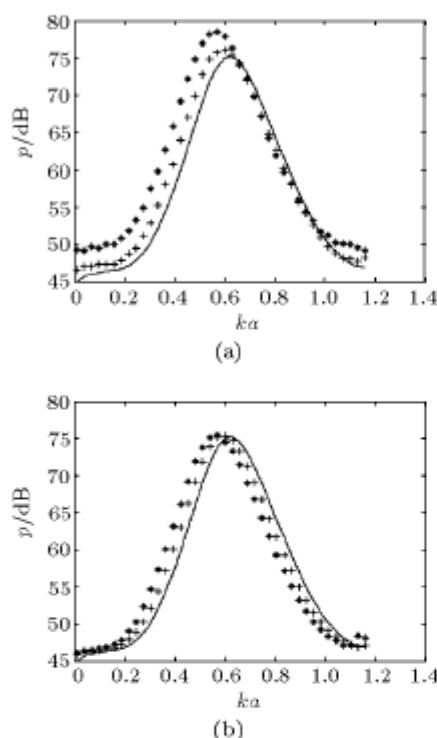


图 5 铝制圆柱体: (a) 在点 $x = 2.0$ m, $y = 0$; (b) 在点 $x = -2.0$ m, $y = 0$ 处的辐射声压值

*: 裂纹深度为 0.1 m; +: 裂纹深度为 0.05 m; -: 无裂纹
Fig.5 Radiation pressure by aluminum cylinder at points:
(a) $x = 2.0$ m, $y = 0$; (b) $x = -2.0$ m, $y = 0$
*: depth of crack 0.1 m; +: depth of crack 0.05 m;
-: without crack

算例 2 散射声场的计算

对于散射问题, 此时令外加载荷为零. 一沿 x 轴负方向传播的平面波作用在柱体外表面 (也称“湿边界”). 图 6 给出的是散射声压值. 图中横坐标为无量纲波数 ka , 纵坐标为无量纲声压 $|p_s/p_i|$. 其中图 6(a) 为在点 $x = 2.0$ m, $y = 0$ 的散射计算结果, 图 6(b) 为在点 $x = -2.0$ m, $y = 0$ 处的计算值.

从图 5 和图 6 所示的数值计算结果可以看出: 在结构声耦合系统中, 当结构含有裂纹时, 耦合系统的共振频率将下降, 裂纹越深, 共振频率下降得越多. 这是由于裂纹的存在使得结构变得较软. 比较图 5, 图 6 中相应的 (a), (b) 两图所示的结果可以得出: 无论是辐射声场还是散射声场在裂纹附近区域所受的影响都较为显著.

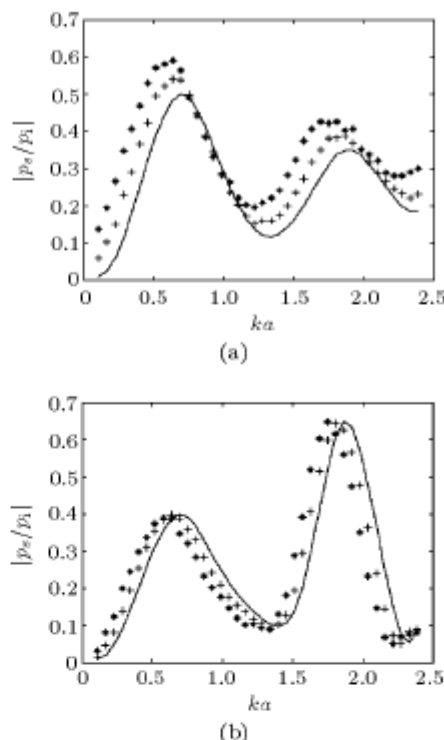


图 6 铝制圆柱体: (a) 在点 $x = 2.0$ m, $y = 0$; (b) 在点 $x = -2.0$ m, $y = 0$ 处的散射声压值

*: 裂纹深度为 0.1 m; +: 裂纹深度为 0.05 m; -: 无裂纹
Fig.6 Scattering pressure by aluminum cylinder at points: (a) $x = 2.0$ m, $y = 0$; (b) $x = -2.0$ m, $y = 0$
*: depth of crack 0.1 m; +: depth of crack 0.05 m;
-: without crack

参 考 文 献

- Ohayon R, Soize C. Structure Acoustics and Vibration. London: Academic Press, 1998
- Pan J. The forced response of an acoustic-structural coupled system. *J Acoust Soc Am*, 1992, 91(2): 347~361
- Chen SH, Liu YJ. A unified boundary element method for the analysis of sound and shell-like structure interactions. *J Acoust Soc Am*, 1999, 106(5): 1247~1254
- Slepyan LI, Sorokin SV. Analysis of structural-acoustic coupling problems by a two-level boundary integral method, part 1: A general formulation and test problems. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 184: 195~211
- Assaad J, Decarpigny JN, Bruneel C. Application of the finite element method to two-dimensional radiation problems. *J Acoust Soc Am*, 1993, 94(2): 562~573
- Everstine GC. Finite element formulations of structural acoustics problems. *Computers and Structures*, 1997, 65(3): 307~321
- Chen ZS, Hofstetter G, Mang HA. A Galerkin-type BE-FE formulation for elasto-acoustic coupling. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1998, 52(1): 147~155
- Leung AYT, Su RKL. Mixed mode 2D crack problem by fractal two level finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 51(6): 889~895

9 Skudrzyk E. The Foundations of Acoustics. Wien-New York: Springer-Verlag, 1971

10 Brebbia CA. The Boundary Element Method for Engineers. London: Billing & Sons Ltd, 1984

ANALYSIS ON 2D CRACKED STRUCTURE-ACOUSTIC COUPLING PROBLEMS

Wu Guorong Zhong Weifang

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract The effective control of noise and vibration in a structural acoustic system depends largely on the accurate evaluation of the sound-structure interaction which is characterized by the energy transferring back and forth between the acoustic field and the structure. When the fluid is heavy enough, both of the responses of the sound field and the structure can be significantly affected by this sound-structure interaction. Applications of interest include acoustic radiation and scattering from a submerged elastic structure, acoustic cavity analysis, and dynamics of fluid-filled elastic pipe systems.

In this paper, the cracked 2D elastic structure sound interaction problems are studied by employing fractal two level finite element method combined with boundary element method. The cracked elastic structure is discretized by fractal two level finite element method, which is divided into two parts by an artificial boundary. The crack neighbouring domain is discretized by the fractal finite element method, which can reduced the freedom degrees greatly through transforming the nodal displacements to a set of generalized coordinates, the another domain is discretized by the conventional finite element method. The exterior acoustic field is calculated by boundary element method, which satisfies automatically Sommerfeld's radiation condition.

In the numerical simulation procedure, the radiation and scattering acoustical pressure by an infinite long cracked aluminum cylinder immersed in fluid are calculated, the results show that the resonate frequencies of the structural-acoustic coupled system become lower with the depth of the crack increase, and that the effect on the acoustical field by the crack is particularly pronounced in vicinity of the crack tip.

Key words structure, crack, sound, fractal, finite element method, boundary element method