

## 三维边界元法中几乎奇异积分的正则化算法<sup>1)</sup>

牛忠荣\* 王秀喜\*\* 周焕林\*

\*(合肥工业大学工程力学系, 合肥 230009)

\*\* (中国科学技术大学力学系, 合肥 230026)

**摘要** 当源点靠近边界单元时, 边界积分方程通常存在几乎奇异积分的计算难题. 基于三角形单元, 将源点到单元的距离与单元特征长度比值定义为接近度, 用于度量边界单元中积分奇异性的程度. 将单元上的面积分在局部的极坐标系  $\rho\theta$  下表示, 利用一些初等函数的积分公式, 获得对变量  $\rho$  作单层积分的解析表达式. 几乎强奇异和超奇异面积分被转化为沿单元围道上一系列线积分, 而 Gauss 数值积分能够有效计算这些线积分. 应用该算法分析三维弹性薄壁结构获得了成功.

**关键词** 弹性力学, 边界元法, 三维问题, 几乎奇异积分, 正则化

### 引 言

边界元法分析中, 当一个源点靠近一个单元, 但不在该单元上, 在边界积分方程中产生几乎奇异积分 (nearly singular integrals) 问题. 几乎强奇异和超奇异积分计算的困难一直干扰着边界元法的应用研究. 对二维边界元分析的几乎奇异积分问题, 近年来贡献出许多有效算法, 获得显著进展. Sladek 等<sup>[1]</sup> 对积分变量作一种优化变换处理了二维边界元中几乎奇异积分, 提高了计算精度. Luo 等<sup>[2]</sup> 对位移积分方程中的强奇异积分核通过 Subtraction 法添加一项, 再补回一项, 将几乎强奇异性降阶, 然后用非线性坐标变换数值计算几乎弱奇异积分值. 牛忠荣等<sup>[3]</sup> 在分析二维边界积分方程中几乎奇异积分时, 引入接近度概念, 由此建立了一个正则化算法, 用于计算一般的几乎强奇异和超奇异积分. 之后, 得到了精度更高的计算列式<sup>[4]</sup>. 最近对几乎奇异积分研究的成果使得边界元法可以分析薄壁结构. Liu 等<sup>[5]</sup> 和 Kouitat 等<sup>[6]</sup> 分别处理了二维薄体压电材料结构和涂层结构问题.

三维边界元法中几乎奇异面积分的计算更加复杂. Davey 等<sup>[7]</sup> 对势场问题中边界积分方程的三角形单元上的强奇异积分给出了解析表达式. 后来, Milroy 等<sup>[8]</sup> 沿用该思路获得了弹性问题积分方程中三角形线性等参元上强奇异面积分的解析结果, 表达式极其冗长. Devey 等<sup>[9]</sup> 在研究稳态弹性动力

学问题边界积分方程中一类奇异积分时, 采用三角形单元, 将奇异积分核中三角函数按  $r$  (单元上场点到源点的距离) 做 Taylor 级数展开, 将级数首项的奇异部分转化为线积分计算, 非奇异面积分作数值积分. Liu<sup>[10]</sup> (1998) 采用 Subtraction 法处理几乎强奇异积分, 分析了三维弹性力学问题的壳类薄壁结构. 本文提出采用分部积分法将单元上的几乎奇异面积分变换为沿单元边界围道上一系列线积分, 然后数值积分法可以有效地求解这些线积分, 建立三维边界积分方程中几乎强奇异和超奇异面积分的一个正则化算法.

### 1 三维问题几乎奇异积分的分析

考虑三维弹性力学问题, 弹性体区域  $\Omega$  内点位移和应力边界积分方程

$$u_i(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} [U_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}) - T_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x})] d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^* b_j d\Omega \quad (1)$$

$$\sigma_{ik}(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} W_{ikj}^* t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ikj}^* u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} W_{ikj}^* b_j d\Omega, \quad \mathbf{y} \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \quad (2)$$

方程中  $i, j, k = 1, 2, 3$ ;  $\mathbf{y}$  为源点,  $\mathbf{x}$  为场点;  $\Gamma = \partial\Omega$ ;  $b_i$  为体力分量;  $u_j, t_j$  为  $\Gamma$  上的位移和面力分量. 积分核中  $U_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $T_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $W_{ikj}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  和  $S_{ikj}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

2003-03-10 收到第一稿, 2003-09-08 收到修改稿.

1) 教育部留学人员回国基金和国家自然科学基金资助项目 (10272039).

为 Kelvin 基本解, 其列式可见于通常的边界元的书或文献中<sup>[3]</sup>. 令  $y_i$  和  $x_i$  为源点和场点坐标值,  $n_i$  为  $\Gamma$  外法线方向余弦,  $r$  为源点到场点的距离, 方程 (1) 和 (2) 的基本解所含变数为

$$\left. \begin{aligned} r_i &= x_i - y_i, \quad r = \sqrt{r_i r_i} \\ r_{,i} &= \partial r / \partial x_i, \quad r_{,n} = \partial r / \partial n = r_{,i} n_i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

使源点  $y$  趋于边界  $\Gamma$ , 则得位移边界积分方程

$$\begin{aligned} C_{ij}(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \\ &\int_{\Gamma} T_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^* b_j d\Omega, \quad \mathbf{y} \text{ 在 } \Omega \text{ 上} \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $\int_{\Gamma} (\cdots) d\Gamma$  为 Cauchy 主值积分,  $C_{ij}(\mathbf{y})$  称为位移奇异性系数. 当源点处  $r \rightarrow 0$  时, 各积分核出现不同程度的奇异性.  $U_{ij}^*$  含  $1/r$  为弱奇性,  $T_{ij}^*$  和  $W_{ijk}^*$  含  $1/r^2$  为强奇性,  $S_{ijk}^*$  含  $1/r^3$  为超奇性. 常规的弹性力学问题边界元解法基于式 (4) 获得边界上位移和面力, 再由式 (1) 和 (2) 求得内点位移和应力.

当源点  $y$  趋近于边界  $\Gamma$ , 但不在  $\Gamma$  上时, 则方程 (1) 和 (2) 出现几乎强奇异和超奇异面积分. 将边界剖分为  $M$  个单元, 源点  $y(y_1, y_2, y_3)$  邻近边界的几乎奇异单元  $\Gamma_e$  取为平面 3 节点线性等参元, 见图 1. 记  $\partial\Gamma_e$  为  $\Gamma_e$  的围道, 则  $\partial\Gamma_e$  由 3 条直线构成. 在  $\Gamma_e$  平面上定义局部坐标系  $\alpha\xi\eta$ , 见图 2, 原点置于节点 1,  $\xi$  轴置于节点 1 和节点 2 的连线  $\vec{12}$ . 则 3 个节点在  $\alpha\xi\eta$  中的坐标  $(\xi_i, \eta_i)$  可根据 3 条边的位置信息求得. 单元  $\Gamma_e$  的几何坐标、位移和面力在  $\alpha\xi\eta$  系中由线性试函数描述如下

$$x_i = N_m(\xi, \eta) x_{mi}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (5)$$

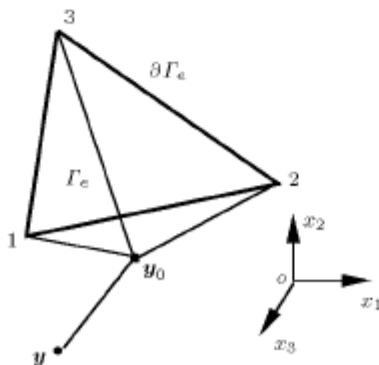


图 1 源点  $y$  和单元  $\Gamma_e$

Fig.1 Point  $y$  and element  $\Gamma_e$

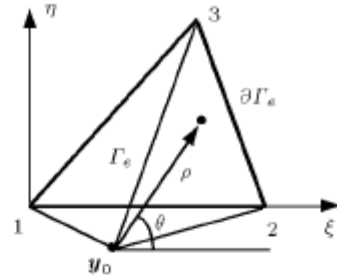


图 2 局部坐标  $\xi\eta$  和  $\rho\theta$

Fig.2 The local systems  $\xi\eta$  and  $\rho\theta$

$$u_i = N_m(\xi, \eta) u_{mi}, \quad t_i = N_m(\xi, \eta) t_{mi} \quad (6)$$

式中

$$N_m(\xi, \eta) = \frac{1}{2A} (a_m + b_m \xi + c_m \eta) \quad (7)$$

$x_{mi}, u_{mi}$  和  $t_{mi}$  分别是坐标、位移和面力在节点  $m$  沿  $x_i$  方向分量;  $\alpha_m, \beta_m$  和  $\gamma_m$  由 3 个节点在  $\alpha\xi\eta$  中坐标确定;  $A$  是  $\Gamma_e$  的面积. 在  $\Gamma_e$  上, 坐标  $\alpha x_1 x_2 x_3$  变换到  $\alpha\xi\eta$  的雅可比  $J^s = 1$ . 设  $y_0$  为源点  $y$  在  $\Gamma_e$  所在平面上的垂足, 可获得  $y_0$  在  $\alpha x_1 x_2 x_3$  系中的坐标为  $(y_{01}, y_{02}, y_{03})$ ,  $y_0$  在  $\alpha\xi\eta$  系中坐标  $(\xi_0, \eta_0)$ . 进一步在平面  $\xi\eta$  内建立一个极坐标系  $\rho\theta$ , 坐标系的极点在  $(\xi_0, \eta_0)$ , 极轴初位置与  $\xi$  轴平行. 那么两个坐标系转换关系为

$$\xi - \xi_0 = \rho \cos \theta, \quad \eta - \eta_0 = \rho \sin \theta \quad (8)$$

这个映射的雅可比是  $J^p = \rho$ . 式 (8) 代入式 (5) 和式 (7), 得

$$N_m(\xi, \eta) = \frac{1}{2A} \rho (b_m \cos \theta + c_m \sin \theta) + N_m(\xi_0, \eta_0) \quad (9)$$

$$x_i = \frac{1}{2A} \rho (b_m \cos \theta + c_m \sin \theta) x_{im} + y_{0i} \quad (10)$$

式中

$$y_{0i} = N_m(\xi_0, \eta_0) x_{0i}$$

将式 (10) 代入式 (3), 可得

$$\begin{aligned} x_i - y_i &= r_i = \\ &\frac{1}{2A} \rho (b_m \cos \theta + c_m \sin \theta) x_{mi} + y_{0i} - y_i \end{aligned} \quad (11)$$

$$R = r^2 = r_i r_i = \rho^2 + \delta_1^2 \quad (12)$$

式中

$$\delta_1^2 = (y_{0i} - y_i)(y_{0i} - y_i) \quad (13)$$

$\delta_1$  是  $y$  到平面  $\Gamma_e$  的最短距离. 如果垂足  $y_0$  不在单元  $\Gamma_e$  内, 在  $\Gamma_e$  上总存在一个离  $y_0$  最近的点, 引

入  $\delta_2$  表示从  $y_0$  到这个最近点的距离. 定义从源点  $y$  到单元  $\Gamma_e$  的相对距离如下

$$e_1 = \delta_1/L_{\max}, \quad e_2 = \delta_2/L_{\max} \quad (14)$$

式中  $L_{\max}$  为单元  $\Gamma_e$  3 条边长度中最大值. 当  $y_0$  接近  $\Gamma_e$  或在  $\Gamma_e$  内时, 式 (12) 表明 Kelvin 基本解中  $1/r \rightarrow \infty$  的度量依赖于  $e_1 \rightarrow 0$  的程度. 因此, 这里定义  $e_1$  为源点相对于单元  $\Gamma_e$  的接近度. 事实上,  $\sqrt{e_1^2 + e_2^2}$  也可以定义为接近度.

在单元  $\Gamma_e$  上的面积分可以在极坐标系  $\rho\theta$  中列式

$$d\Gamma(x) = J^s d\xi d\eta = \rho d\rho d\theta \quad (15)$$

将式 (5)~(12) 代入到离散后的方程 (1), (2) 和方程 (4) 中, 那么这些方程在单元  $\Gamma_e$  上发生的几乎奇异积分可归纳为如下形式

$$I_n = \int_{\Gamma_e} \frac{1}{R^{n/2}} Q_n(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta, \quad n = 1, 3, 5, 7 \quad (16)$$

上式中  $Q_n(\rho, \theta)$  是关于  $\rho, \cos\theta$  和  $\sin\theta$  的多项式函数,  $R$  是  $\rho$  的二次函数. 随着  $e_1$  和  $e_2$  的减小, 直接对式 (16) 的积分进行常规的 Gauss 数值求积将导

致失败. 因此, 较小的  $e_1$  和  $e_2$  是引起几乎奇异面积分的主要原因.

## 2 平面三角形单元上几乎奇异积分的正则化算法

对式 (16) 中几乎奇异积分的正则化思想是使用分部积分手段将面积分变换为沿单元围道的一系列线积分. 观察式 (16), 先对  $I_n$  中的变量  $\rho$  作积分

$$K_n(\rho, \theta) = \int \frac{1}{R^{n/2}} Q_n(\rho, \theta) \rho d\rho \quad (17)$$

按照  $e_1 \neq 0$  和  $e_1 = 0$  把几乎奇异积分划分为两类, 对两种情况分别给出正则化算法列式如下.

**情形 1** I 型几乎奇异面积分,  $e_1 \neq 0$

存在下列积分公式

$$\int \frac{d\rho}{r} = \ln(\rho + r) + c, \quad r = \sqrt{\rho^2 + \delta_1^2} \quad (18)$$

$$\int \frac{d\rho}{r^n} = \frac{\rho}{(n-2)\delta_1^2 r^{n-2}} + \frac{n-3}{(n-2)\delta_1^2} \int \frac{d\rho}{r^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (19)$$

利用上式, 对式 (17) 反复作分部积分, 得到

$$\begin{aligned} K_1(\rho, \theta) = & rQ_1 - \frac{1}{2}Q_1'[r + \delta_1^2 \ln(\rho + r)] + \frac{1}{2}Q_1''\left[\frac{1}{3}r^3 + \delta_1^2 \rho \ln(\rho + r) - \delta_1^2 r\right] - \\ & \frac{1}{4}Q_1''' \left[\frac{1}{6}\rho r^3 - \frac{5}{4}\delta_1^2 \rho r + \delta_1^2 \rho^2 \ln(\rho + r) - \frac{1}{4}\delta_1^4 \ln(\rho + r)\right] + \\ & \frac{1}{4} \int Q_1^{(4)} \left[\frac{1}{6}\rho r^3 - \frac{5}{4}\delta_1^2 \rho r + \delta_1^2 \rho^2 \ln(\rho + r) - \frac{1}{4}\delta_1^4 \ln(\rho + r)\right] d\rho \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} K_3(\rho, \theta) = & -\frac{1}{r}Q_3 + Q_3' \ln(\rho + r) - Q_3''[\rho \ln(\rho + r) - r] + \frac{1}{4}Q_3'''[2\rho^2 \ln(\rho + r) - 3\rho r - \\ & \delta_1^2 \ln(\rho + r)] - \frac{1}{4}Q_3^{(4)} \left[-\frac{11}{9}r^3 + \frac{5}{3}\delta_1^2 r + \frac{2}{3}\rho^3 \ln(\rho + r) - \delta_1^2 \rho \ln(\rho + r)\right] + \\ & \frac{1}{4} \int Q_3^{(5)} \left[-\frac{11}{9}r^3 + \frac{5}{3}\delta_1^2 r + \frac{2}{3}\rho^3 \ln(\rho + r) - \delta_1^2 \rho \ln(\rho + r)\right] d\rho \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} K_5(\rho, \theta) = & -\frac{1}{3r^3}Q_5 + \frac{1}{6\delta_1^2} \left[\frac{1}{r}R'Q_5' - 2rQ_5''\right] + \frac{1}{6\delta_1^2}Q_5'''[r + \delta_1^2 \ln(\rho + r)] - \\ & \frac{1}{6\delta_1^2}Q_5^{(4)} \left[\frac{1}{3}r^3 + \delta_1^2 \rho \ln(\rho + r) - \delta_1^2 r\right] + \\ & \frac{1}{12\delta_1^2}Q_5^{(5)} \left[\frac{1}{6}\rho r^3 - \frac{5}{4}\delta_1^2 \rho r + \delta_1^2 \rho^2 \ln(\rho + r) - \frac{1}{4}\delta_1^4 \ln(\rho + r)\right] - \\ & \frac{1}{12\delta_1^2} \int Q_5^{(6)} \left[\frac{1}{6}\rho r^3 - \frac{5}{4}\delta_1^2 \rho r + \delta_1^2 \rho^2 \ln(\rho + r) - \frac{1}{4}\delta_1^4 \ln(\rho + r)\right] d\rho \end{aligned} \quad (20c)$$

$$\begin{aligned}
K_7(\rho, \theta) = & -\frac{1}{5r^5}Q_7(\rho, \theta) + \frac{\rho}{15\delta_1^2 r}Q_7'\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{\delta_1^2}\right) - \frac{1}{15\delta_1^2}Q_7''\left[\frac{2r}{\delta_1^2} - \frac{1}{r}\right] + \\
& \frac{\rho}{15\delta_1^4}rQ_7''' - \frac{1}{45\delta_1^4}r^3Q_7^{(4)} + \frac{1}{360\delta_1^4}Q_7^{(5)}\left[2\rho^3 + 3\delta_1^2\rho r + 3\delta_1^4\ln(\rho + r)\right] - \\
& \frac{1}{360\delta_1^4}Q_7^{(6)}\left[\frac{2}{5}r^3 + \delta_1^2r^3 - 3\delta_1^4r + 3\delta_1^4\rho\ln(\rho + r)\right] + \\
& \frac{1}{360\delta_1^4}\int Q_7^{(7)}\left[\frac{2}{5}r^3 + \delta_1^2r^3 - 3\delta_1^4r + 3\delta_1^4\rho\ln(\rho + r)\right]d\rho
\end{aligned} \quad (20d)$$

式中  $(\cdots)' = d(\cdots)/d\rho$ .

**情形 2** II 型几乎奇异面积分,  $e_1 = 0$ , 但  $e_2 \neq 0$

此时, 有

$$r = \sqrt{\rho^2 + \delta_1^2} = \rho$$

式 (17) 可写为

$$K_n(\rho, \theta) = \int \frac{1}{\rho^{n-1}}Q_n(\rho, \theta)d\rho \quad (21)$$

存在积分公式如下

$$\int \frac{1}{\rho^n}d\rho = -\frac{1}{(n-1)\rho^{n-1}} + c, \quad n \neq 1 \quad (22a)$$

$$\int \frac{1}{\rho}d\rho = \ln\rho + c \quad (22b)$$

利用上式, 对式 (21) 反复运用分部积分, 获得

$$\begin{aligned}
K_1(\rho, \theta) = & \int Q_1(\rho, \theta)d\rho = \\
& \rho Q_1 - \frac{1}{2}\rho^2 Q_1' + \frac{1}{6}\rho^3 Q_1'' - \\
& \frac{1}{24}\rho^4 Q_1''' + \frac{1}{24}\int \rho^4 Q_1^{(4)}d\rho
\end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned}
K_3(\rho, \theta) = & \int \frac{1}{\rho^2}Q_3(\rho, \theta)d\rho = \\
& -\frac{1}{\rho}Q_3 + \ln\rho Q_3' - \rho(\ln\rho - 1)Q_3'' + \\
& \frac{1}{2}\rho^2\left(\ln\rho - \frac{3}{2}\right)Q_3''' - \frac{1}{6}\rho^3\left(\ln\rho - \frac{11}{6}\right)Q_3^{(4)} + \\
& \frac{1}{6}\int \rho^3\left(\ln\rho - \frac{11}{6}\right)Q_3^{(5)}d\rho
\end{aligned} \quad (23b)$$

$$\begin{aligned}
K_5(\rho, \theta) = & \int \frac{1}{\rho^4}Q_5(\rho, \theta)d\rho = \\
& -\frac{1}{3\rho^3}Q_5 - \frac{1}{6\rho^2}Q_5' - \frac{1}{6\rho}Q_5'' + \frac{1}{6}\ln\rho Q_5''' - \\
& \frac{1}{6}\rho(\ln\rho - 1)Q_5^{(4)} + \frac{1}{12}\rho^2\left(\ln\rho - \frac{3}{2}\right)Q_5^{(5)} - \\
& \frac{1}{12}\int \rho^2\left(\ln\rho - \frac{3}{2}\right)Q_5^{(6)}d\rho
\end{aligned} \quad (23c)$$

$$\begin{aligned}
K_7(\rho, \theta) = & \int \frac{1}{\rho^6}Q_7(\rho, \theta)d\rho = \\
& -\frac{1}{5\rho^5}Q_7 - \frac{1}{20\rho^4}Q_7' - \frac{1}{60\rho^3}Q_7'' - \\
& \frac{1}{120\rho^2}Q_7''' - \frac{1}{120\rho}Q_7^{(4)} + \frac{1}{120}\ln\rho Q_7^{(5)} - \\
& \frac{1}{120}\rho(\ln\rho - 1)Q_7^{(6)} + \frac{1}{120}\int \rho(\ln\rho - 1)Q_7^{(7)}d\rho
\end{aligned} \quad (23d)$$

在式 (17) 中,  $Q_n(\rho, \theta)$  ( $n = 1, 3, 5, 7$ ) 是关于  $\rho$  的多项式, 这些多项式的阶总是有限的. 如果在三维弹性力学问题边界元法中采用线性的三角形等参元, 肯定存在

$$\left. \begin{aligned} Q_1'''(\rho, \theta) = 0, \quad Q_3^{(4)}(\rho, \theta) = 0 \\ Q_5^{(5)}(\rho, \theta) = 0, \quad Q_7^{(6)}(\rho, \theta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

如果采用三角形二次亚参元, 即单元几何形状是扁平的, 单元上物理量用二次形函数描述, 则相应于式 (16), 有

$$\left. \begin{aligned} Q_1^{(4)}(\rho, \theta) = 0, \quad Q_3^{(5)}(\rho, \theta) = 0 \\ Q_5^{(6)}(\rho, \theta) = 0, \quad Q_7^{(7)}(\rho, \theta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

将式 (24) 或 (25) 代入到式 (20) 和 (23) 各式中, 则各式的最后一项皆为零, 因此,  $K_n(\rho, \theta)$  关于  $\rho$  的积分已完全解析. 将式 (20) 和 (23) 代入式 (16), 则有

$$I_n = \int_{\partial\Gamma_e} [K_n(\rho, \theta)]_{\rho=\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} d\theta \quad (26)$$

由图 2, 并注意到式 (8), 可推得单元  $\Gamma_e$  的 3 个边的极坐标表达式:

1)  $\overline{12}$  边  
在  $o\rho\theta$  系中

$$\rho_{12}(\theta) = -\frac{\eta_0}{\sin \theta} \quad (27a)$$

2)  $\overline{23}$  边  
在  $o\rho\theta$  系中

$$\rho_{23}(\theta) = \frac{(\xi_2 - \xi_0)\eta_3 - (\xi_2 - \xi_3)\eta_0}{\cos \theta \eta_3 + (\xi_2 - \xi_3) \sin \theta} \quad (27b)$$

3)  $\overline{31}$  边  
在  $o\rho\theta$  系中

$$\rho_{31}(\theta) = \frac{\xi_3 \eta_0 - \xi_0 \eta_3}{\eta_3 \cos \theta - \xi_3 \sin \theta} \quad (27c)$$

式 (26) 中  $I_n$  关于  $\rho$  积分的上下限取自式 (27). 至此, 式 (16) 的面积分  $I_n$  已转化为式 (27) 关于变量  $\theta$  的一系列线积分, 并且引起几乎奇异积分的因子  $e_1$  (即  $\delta_1$ ) 已被分离到这些线积分核之外, 见式 (20). 此时, 常规的 Gauss 数值积分可以有效计算这些线积分, 本文称此为正则化算法.

### 3 正则化算法在三维弹性力学问题中的应用

正则化算法在弹性力学的边界元解法中被用来求解薄壁结构和近边界点的位移和应力. 对于远离源点的单元, 常规的数值积分法已足够精确. 这个正则化算法直接适用于三角形线性等参元. 对于三角形单元  $\Gamma_e$ , 将式 (9)~(12) 代入方程 (1) 和 (2) 中的积分核, 则单元上积分可写为式 (16) 的形式, 易于证明式 (24) 是成立的. 因此, 正则化算法可以应用于式 (16), 计算其导出的线积分式 (20) 或 (23).

在三维边界元法中, 高阶单元具有较高的精度通常被采用. 当高阶单元发生几乎奇异积分时, 直接的数值积分将导致失败, 即使采用大量的积分点. 为此, 本文提出一个计算方案. 以常用的 8 节点二次等参元  $\Gamma_8$  为例. 将  $\Gamma_8$  再剖分为若干三角形线性等参元, 仅仅当我们需要计算它的几乎奇异积分时. 在每一个细分的三角形单元上, 线性试函数可以描述其几何形状、位移和面力. 一种细分  $\Gamma_8$  的方案如图 3 所示,  $\Gamma_8$  由 8 个子三角形单元替代. 注意此方案中, 因为  $\Gamma_8$  的细分和正则化算法所增加的计算量并不干扰整个求解的其他环节. 当对于  $\Gamma_8$  的接近度很小时, 可以采用更加细化的三角形单元分解. 为了表明本文算法的有效性, 下面给出算例.

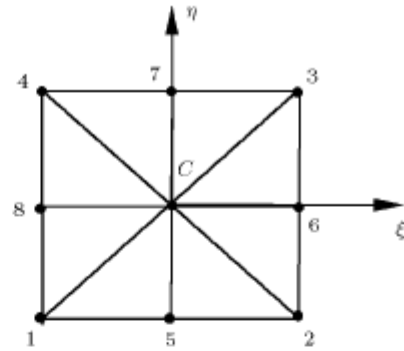


图 3  $\Gamma_8$  的细分

Fig.3 The subdivision on  $\Gamma_8$

#### 例 1 受均匀外压圆柱体.

圆柱直径为 4cm, 长度为 2cm, 均匀外压为 32 MPa, 材料的弹性模量  $E = 37500$  MPa, 泊松比  $\nu = 0.25$ . 由于对称性, 考虑 1/4 部分如图 4 示. 边界剖分为: 两个横截面各 3 个 6 节点三角形单元, 外表弧面 3 个 8 节点四边形单元, 共 9 个单元. 本文采用常规的边界元法和正则化算法求解近边界点位移和应力. 常规边界元法使用标准的 Gauss 积分法按二次单元直接计算方程 (1) 和 (2) 中面积分. 在正则化算法中, 当二次单元遇到几乎奇异积分时, 采用细化的三角形子单元即时取代, 然后按照式 (20) 用 Gauss 积分法计算相应的线积分. 沿  $AB$  线趋近边界  $A$  点的内点位移和应力计算结果见图 5, 图中  $u_2$  是  $x_2$  方向位移,  $\sigma_{11}$  是  $x_1$  方向应力. 对四边形单元, 接近度 (也可称为相对位移)  $e_1$  定义为

$$e_1 = \delta / L_{\max} \quad (28)$$

这里  $\delta$  是源点到单元的垂直距离,  $L_{\max}$  是四边形单元的两个对角线中最大者.

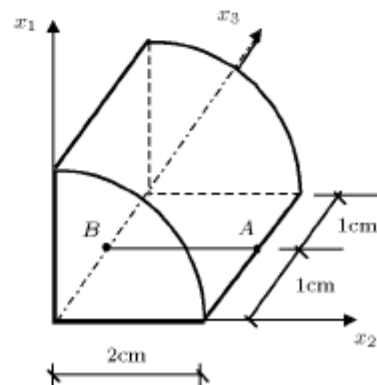


图 4 均压圆柱体

Fig.4 A cylinder subject to uniform pressure

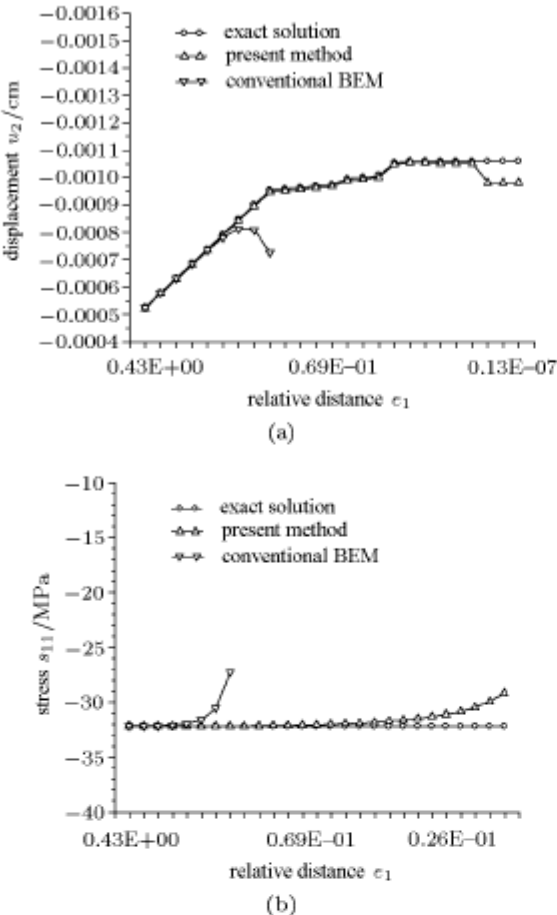


图 5 圆柱体的内点位移  $u_2$  和应力  $\sigma_{11}$

Fig.5 The displacement  $u_2$  and stress  $\sigma_{11}$  at interior points in the cylinder

根据计算结果和精确解,对两种算法作一比较.使用常规方法,当  $e_1 < 0.06$  时,位移计算值渐渐失真,  $e_1 < 0.1$  时,应力计算值已失效.而采用正则化算法,即使  $e_1$  达到  $1 \times 10^{-6}$  时,计算值仍然有高的精度,当  $e_1$  达到 0.001 时,应力计算值未产生明显的误差.因此在应力值 (包含超奇异积分) 的有效

范围,本文算法减小了接近度达二个数量级.对位移 (包含强奇异积分) 的计算,本文算法已基本消除了几乎强奇异面积分.

例 2 等截面环形直管单向拉伸

环形管长为 10 cm, 环管横截面内缘为圆,半径为 10 cm, 外缘为同心椭圆,  $a = 12\text{cm}$ ,  $b = 10.0004 \sim 12\text{cm}$ , 如图 6 示. 端面均匀受拉,分布力为 10 MPa, 材料常数  $\nu = 0.3$ ,  $E = 210\,000\text{ MPa}$ . 由于对称性,考虑 1/4 部分. 边界剖分为: 两个横截面各 20 个 8 节点等参元, 内、外表弧面各 10 个 8 节点等参元, 共 60 个二次等参元. 本文采用常规的边界元法和正则化算法求解边界点位移和应力. 直管端面 B 点处的轴向位移  $u_3$  和应力  $\sigma_{33}$  见表 1, 其中接近度  $e_1$  的意义与式 (28) 相同.

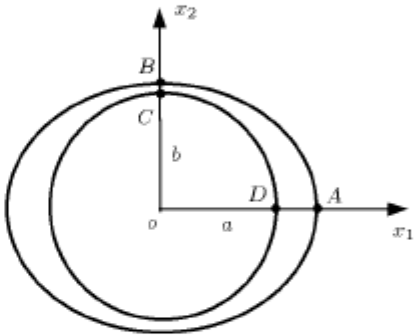


图 6 环形管端截面

Fig.6 The end section of the annular pipe

结果比较, 当  $b = 10.1\text{cm}$  ( $e_1 = 0.00276$ ) 时, 常规算法已失效. 本文的正则化算法计算的有效范围甚至达到  $b = 10.00005\text{cm}$ , 此时环形管在横截面 BC 处厚度已经非常薄 (见图 6). 可见本文正则化算法能够有效分析超薄体结构.

表 1 环形直管端面 B 点处轴向位移和轴向应力

Table 1 The axial displacement and stress at point B on the end section of the annular pipe

| $b$       | $u_3/10^{-3}\text{ cm}$ |          |              | $\sigma_{33}/\text{MPa}$ |           |              | $e_1$       |
|-----------|-------------------------|----------|--------------|--------------------------|-----------|--------------|-------------|
|           | exact                   | present  | conventional | exact                    | present   | conventional |             |
| 12        | 0.476 19                | 0.476 32 | 0.472 00     | 10                       | 9.999 97  | 9.929 79     | 0.003 045   |
| 11        | 0.476 19                | 0.475 81 | 0.454 41     | 10                       | 9.986 75  | 9.615 54     | 0.000 235   |
| 10.1      | 0.476 19                | 0.475 36 | 0.364 55     | 10                       | 10.021 61 | 6.297 36     | 0.000 276   |
| 10.01     | 0.476 19                | 0.475 63 | —            | 10                       | 10.000 18 | —            | 0.000 055   |
| 10.001    | 0.476 19                | 0.474 06 | —            | 10                       | 9.857 22  | —            | 0.000 025   |
| 10.000 1  | 0.476 19                | 0.482 28 | —            | 10                       | 10.694 01 | —            | 0.000 002   |
| 10.000 05 | 0.476 19                | 0.488 12 | —            | 10                       | 11.458 16 | —            | 0.000 001 2 |
| 10.000 04 | 0.476 19                | 0.416 49 | —            | 10                       | 3.008 40  | —            | 0.000 001 0 |

## 4 小 结

针对三维边界元法存在着几乎奇异积分障碍, 本文从三角形线性单元着手, 按照源点  $y$  相邻于三角形单元的位置和距离引入了接近度概念, 用来度量三维问题边界单元上的几乎奇异积分, 并分类 I 型和 II 型奇异面积分. 引用一些初等函数积分的解析式, 通过分部积分将 I 型和 II 型奇异面积分转换为一系列正则化线积分, 然后用 Gauss 数值积分法计算这些线积分, 数值实验表明本文正则化算法处理几乎奇异积分获得好的效果.

对三维边界元法中的高阶单元, 文中提出将高阶单元再细分为若干个子三角形线性元, 分别用正则化算法计算各子三角元上的几乎奇异积分. 这里用此策略计算了三维弹性力学问题的薄形结构以及近边界点位移和应力, 与常规方法比较, 本文途径获得显著成功.

**致谢** 在本文研究工作中, 第一作者与德国 Stuttgart 大学数学 A 所 W. L. Wendland 教授, Schulz 博士和 Stainbach 博士讨论中获益匪浅, 在此深表感谢! 并感谢他们提供良好的工作环境.

## 参 考 文 献

- 1 Sladek V, Sladek J, Tanaka M. Optimal transformations of the integration variables in computation of singular integrals in BEM. *Int J Numer Methods Eng*, 2000, 47: 1263~1283
- 2 Luo JF, Liu YJ, Berger EJ. Analysis of two-dimensional thin structures (from micro- to nano-scales) using the boundary element method. *Computational Mechanics*, 1998, 22: 404~412
- 3 牛忠荣, 王秀喜, 周焕林. 边界元法计算近边界点参量的一个通用算法. *力学学报*, 2001, 33(2): 275~283 (Niu Zhongrong, Wang Xiuxi, Zhou Huanlin. A general algorithm for calculating the quantities at interior points close to the boundary by the BEM. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(2): 275~283 (in Chinese))
- 4 牛忠荣, 王秀喜, 周焕林. 边界元法中计算几乎奇异积分的一种无奇异算法. *应用力学学报*, 2001, 18(4): 1~8 (Niu Zhongrong, Wang Xiuxi, Zhou Huanlin. A non-singular algorithm for the evaluation of the nearly singular integrals in boundary element methods. *Chinese Journal of Appl Mech*, 2002, 18(4): 1~8 (in Chinese))
- 5 Liu YJ, Fan H. Analysis of thin piezoelectric solids by the boundary element method. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002, 191: 2297~2315
- 6 Kouitat Njiwa R, Stebut JV. Boundary element numerical modeling as a surface engineering tool: Application to very thin coatings. *Surface and Coatings Technology*, 1999, 116-119: 573~579
- 7 Davey K, Hinduja S. Analytical integration of linear three-dimensional triangular elements in BEM. *Appl Math Model*, 1989, 13: 450~461
- 8 Milroy J, Hinduja S, Davey K. The 3-D thermoelastic boundary element method: Analytical integration for linear isoparametric triangular elements. *Appl Math Model*, 1997, 21: 763~782
- 9 Davey K, Alonso Rasgado MT, Rosindale L. The 3-D elastodynamic boundary element method: Semi-analytical integration for linear isoparametric triangular elements. *Int J Numer Methods Eng*, 1999, 44: 1031~1054
- 10 Liu Yijun. Analysis of shell-like structures by the boundary element method based on 3-D elasticity: Formulation and verification. *Int J Numer Methods Eng*, 1998, 41: 541~558

## A REGULARIZATION ALGORITHM FOR THE NEARLY SINGULAR INTEGRALS IN 3-D BEM<sup>1)</sup>

Niu Zhongrong\* Wang Xiuxi\*\* Zhou Huanlin\*

*\*(Department of Engineering Mechanics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)*

*\*\* (Department of Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)*

**Abstract** The nearly singular integrals occur in the boundary element analysis for the thin-wall structures and calculating the quantities at interior points close to the boundary. In this paper, the triangular boundary element with three nodes is considered in the three-dimensional boundary element analysis, where the relative distance from a source point to the element is introduced to measure the singularities of the integrals. The smaller the relative distance is, the more difficult the integrals are to be evaluated. The surface integrals on the triangular element are expressed in a local polar coordinate system  $\rho\theta$ . Then the integrals are analytically integrated with respect to the polar variable  $\rho$  by means of the integral formulae of some elementary functions. Thus the nearly singular surface integrals are transformed into a series of line integrals along the contour of the element. The resulting line integrals are computed efficiently by the Gauss numerical quadrature instead of the original singular surface integrals. Moreover, the regularization algorithm can also be applied to higher order elements by subdividing the elements into several triangular sub-elements. Here, the algorithm is employed successfully to analyze the thin-walled structures of the three-dimensional elasticity problems.

**Key words** elasticity, boundary element methods, three-dimensions, nearly singular integrals, regularization

---

Received 10 March 2003, revised 8 September 2003.

1)The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272039).