

理想导体中具有两个松弛时间的电磁热弹性波¹⁾

宋亚勤* 张元冲* 卢秉恒†

* (西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

† (西安交通大学机械工程学院, 西安 710049)

摘要 研究处于均匀磁场中的理想导体的二维电磁热弹性耦合问题, 引入势函数使控制方程转化为 3 个偏微分方程. 运用 Laplace 变换和 Fourier 变换得到该问题在变换域内的精确表达式, 再通过级数展开和 Laplace 逆变换法求得在时间较短时的逆变换, 得到时间-空间域内问题的解. 运用此方法研究了表面受到热冲击的半无限空间问题, 给出了电磁热弹性波、膨胀波和横波传播的速度, 并通过数值计算, 给出了各个场量的分布图. 所得结论与已有的结论一致.

关键词 GL 理论, 电磁热弹性波, 势函数, Laplace 和 Fourier 变换, 级数展开

引 言

目前, 常用的广义热弹性理论有两种, 一种称为 LS 理论^[1] (由 Lord 和 Shulman 在 1967 年提出), 另一种为 GL 理论^[2] (由 Green 和 Lindsay 在 1972 年提出). 这两种理论都是对传统的 Fourier 热弹性理论进行了修正, 引入一个或两个热松弛时间常数, 其目的是为了消除传统热弹性理论中热信号以无限大的速度传播的缺陷. 这两种理论在结构上是完全不同的, 并已被用于很多问题的研究中, 揭示出在微尺度下很多有趣的现象, 由于当材料有一个对称中心时, GL 理论下所描述的问题并不违背 Fourier 热传导定律, 因此得到了更多的关注. 关于热弹性理论 (经典和广义) 有 Chandrasekharaiyah^[3,4] 综述性的文献.

近年来, 电磁热弹性理论在地球物理学、声学和地震学中得到广泛的应用. 这个理论是研究电磁场与固体的弹性和热弹性变形的相互作用. 由于广义的电磁热弹性耦合问题在微机电系统 (MEMS) 中的广泛应用, 已成为当今的一个研究热点问题, 目前已有不少报道. Nayfeh 和 Nasser^[5] 研究了在磁场影响之下的固体中平面波的传播问题. Sherief 和 Ezzat^[6] 及 Ezzat^[7] 运用 Laplace 变换解决了一维热冲击问题, 得到在小时间范围内问题的近似解. Ezzat 和 Othman^[8] 运用模态分析的方法解决了理想导体中的平面波问题, 得到模态解. 但是对于二维

问题, 由于控制方程本身的复杂性, 目前所做的研究很少.

本文研究了理想导体中的具有两个热松弛时间的二维电磁热弹性问题. 通过在时间域内运用 Laplace 变换并对其中的一个空间变量运用 Fourier 变换得到在变换域内场量的精确表达式. 然后运用级数展开求得在较小时间范围内的逆变换, 得到问题在时间、空间域的解. 并应用该法得到了表面受到热冲击的半无限空间问题的解. 通过数值计算, 得出电磁热弹性波以有限的速度传播的结论, 给出其传播速度, 并给出电磁场及热松弛时间对各个场量分布的影响.

1 基本方程

考虑有两个热松弛时间的二维电磁热弹性问题, 假定介质为理想导体, 则有

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{h}} \\ \mathbf{E} &= -\mu_0 (\dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{H}), \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{H}, \mathbf{J}$ 分别为初始的磁场向量和电流密度向量; $\mathbf{E}$ 为电场, $\mathbf{h}$ 为磁场的扰动. ε_0 和 μ_0 分别为电导率和磁导率. 此问题的运动方程、热传输方程和本构方程及应变-位移关系分别为

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\mathbf{u}}_i &= (\lambda + \mu) u_{j,j} + \mu u_{i,jj} - \\ &\gamma (T + \tau_1 \dot{T})_{,i} + \mu_0 (\mathbf{J} \wedge \mathbf{H})_i \end{aligned} \quad (2)$$

2002-04-29 收到第一稿, 2003-09-17 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10132010, 50175089) 和西安交通大学博士论文基金资助项目.

$$kT_{,ii} = \rho C_E(\dot{T} + \tau_2 \ddot{T}) + \gamma T_0 \dot{u}_{i,i} \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \gamma(T_0 + \tau_1 \dot{T}) \delta_{ij} \quad (4)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad e = e_{ii} \quad (5)$$

其中 λ, μ 为拉梅常数; ρ, k 和 C_E 分别为质量密度, 热传导率和常应变下的比热. $\gamma = (3\lambda + 2\mu)a_t$, a_t 为线性热膨胀系数; τ_1, τ_2 为热松弛时间且满足关系式 $\tau_1 \geq \tau_2$; u_i 为位移分量. T 为高于参考温度 T_0 之上的绝对温度. σ_{ij} 和 e_{ij} 分别为应力张量和应变张量的分量.

假定波只在 xy 面内传播, 则所有变量均与 z 无关. 位移向量 u 的分量为 $(u, v, 0)$, 且初始磁场向量 H 的分量为 $(0, 0, H_0)$. 因此有

$$E = \mu_0 H_0(-\dot{v}, \dot{u}, 0), \quad h = -H_0(0, 0, e) \quad (6)$$

引入下面的无量纲量

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{,i} &= c_0 \eta_0 x_{,i}, \quad \bar{u}_{,i} = c_0 \eta_0 u_{,i}, \quad \bar{t} = c_0^2 \eta_0 t \\ \bar{\tau}_{1,2} &= c_0^2 \eta_0 \tau_{1,2}, \quad \bar{\theta} = \frac{\gamma(T - T_0)}{\rho c_0^2}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} + a_0^2, \quad \eta_0 = \frac{\rho C_E}{k}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \\ a_0 &= H_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}}, \quad \alpha_0 = \frac{\alpha c_0^2}{c_2^2}, \quad \alpha = 1 + \frac{a_0^2}{\varepsilon_0 \mu_0} \end{aligned}$$

这些量都是与材料特征有关的参数, 其取值均为非负值.

引入标量势 ϕ 和向量势 $(0, 0, \psi)$ 如下

$$u = \phi_{,x} + \psi_{,y}, \quad v = \phi_{,y} - \psi_{,x} \quad (8)$$

由控制方程 (2)~(5) 及式 (8) 可得到 (为方便, 以下式子中无量纲量上的“-”已略去)

$$\nabla^2 \phi - (\theta + \tau_1 \dot{\theta}) = \alpha \ddot{\phi} \quad (9)$$

$$\nabla^2 \psi = \alpha_0 \ddot{\psi} \quad (10)$$

$$\nabla^2 \theta = (\dot{\theta} + \tau_2 \ddot{\theta}) + \varepsilon \nabla^2 \dot{\phi} \quad (11)$$

其中

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\sigma C_E}, \quad \sigma = \frac{T_0 \gamma}{c_0^2}, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

2 在变换域内问题的解

对方程 (9)~(11) 的两边取 Laplace 和 Fourier 变换可得

$$(D^2 - \alpha p^2) \phi^* = (1 + \tau_1 p) \theta^* \quad (12)$$

$$(D^2 - \alpha_0 p^2) \psi^* = 0 \quad (13)$$

$$(D^2 - p - \tau_2 p^2) \theta^* = \varepsilon p D^2 \phi^* \quad (14)$$

其中 $D^2 \equiv \frac{d^2}{dy^2} - \xi^2$.

从方程 (12) 和 (14) 中消去 θ^* 可得到关于 ϕ^* 的四阶方程

$$\{D^4 - [p + \tau_2 p^2 + \alpha p^2 + \varepsilon p(1 + \tau_1 p)]D^2 + \alpha p^2(p + \tau_2 p^2)\} \phi^* = 0 \quad (15)$$

从方程 (15) 和 (14) 可得到 ϕ^* 和 ψ^* 的解为

$$\phi^* = A_1 e^{-a_1 y} + A_2 e^{-a_2 y} + A_3 e^{a_1 y} + A_4 e^{a_2 y} \quad (16)$$

$$\psi^* = B_1 e^{-b_1 y} + B_2 e^{b_1 y} \quad (17)$$

其中 $b_1 = \sqrt{\xi^2 + \alpha_0 p^2}$ 且 $A_i (i = 1, \dots, 4)$, B_1, B_2 是关于 ξ 和 p 的函数, 可通过边界条件确定. a_1, a_2 是下面方程的根 (可以为复数但其实部需大于零, 即 $\text{Re}(a_{1,2}) > 0$)

$$\begin{aligned} a^4 - [p + \tau_2 p^2 + \alpha p^2 + \varepsilon p(1 + \tau_1 p)]a^2 + \\ \alpha p^2(p + \tau_2 p^2) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

取耦合系数 ε 为小参数, 上面方程的摄动级数解为

$$a = g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots \quad (19)$$

把式 (19) 代入 (18), 可得零阶和一阶摄动解为

$$\begin{aligned} g_{0,1} &= p\sqrt{\alpha}, \quad g_{0,2} = \sqrt{p + \tau_2 p^2} \\ g_{1,1} &= -\frac{(1 + \tau_1 p)p\sqrt{\alpha}}{2(1 + \tau_2 p) - 2\alpha p} \\ g_{1,2} &= \frac{(1 + \tau_1 p)\sqrt{p + \tau_2 p^2}}{2(1 + \tau_2 p) - 2\alpha p} \end{aligned}$$

利用解 (16) 和 (17) 可得到在变换域内各个场量的表达式. 同时由于 Laplace 变换中的变量 p 为复数, 为确保其逆变换存在, 应使 p 的实部为非负数.

3 逆变换 (在小时间范围内的解)

在 Laplace 和 Fourier 变换域内已得到问题的解, 但一般其逆变换的精确解很难求出. 由于我们关心的只是在较短时间范围内问题的解, 在这里采用级数展开的方法来求解. 把 a_1, a_2, b_1 展成 p 的幂级数形式并考虑当 $p \rightarrow \infty$ 时其相关项 (保留到 $1/p$ 的一阶项)

$$a_1 \approx c_1 p + c_2 + \frac{c_3}{p} \quad (20)$$

$$a_2 \approx c_4 p + c_5 + \frac{c_6}{p} \quad (21)$$

$$b_1 \approx \sqrt{\alpha_0} p + \frac{\xi^2}{2\sqrt{\alpha_0} p} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\frac{\tau_2 m_3}{m_1}}, \quad c_2 = \frac{m_1^2 + \varepsilon m_2}{2m_1 \sqrt{\tau_2 m_1 m_3}} \\ c_3 &= \frac{c_1}{2} \left(\frac{\xi^2 m_1^3 - \varepsilon m_2 + \varepsilon m_1^2}{\tau_2 m_1 m_3} - \frac{m_1^2 + \varepsilon m_2}{4\tau_2^2 m_3^2} \right) \\ c_4 &= \sqrt{\frac{\alpha m_4}{m_1}}, \quad c_5 = \frac{\alpha \varepsilon m_5}{2\sqrt{\alpha m_1 m_4}} \\ c_6 &= \frac{c_4}{2} \left(\frac{\xi^2 m_1^3 - \alpha \varepsilon m_5}{\alpha m_4 m_1^2} - \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 m_5^2}{4\alpha^2 m_4^2} \right) \end{aligned}$$

且 $m_1 = \tau_2 - \alpha$, $m_2 = \tau_2 m_1 - \alpha \tau_1$, $m_3 = m_1 + \varepsilon \tau_1$, $m_4 = m_1 - \varepsilon \tau_1$, $m_5 = \tau_1 - m_1$. 从方程 (20)~(22) 可看出, 电磁热弹性波、膨胀波和弹性横向波的传播速度分别为 $1/c_1, 1/c_4$ 和 $1/\sqrt{\alpha_0}$.

把式 (20)~(22) 代入各场量在变换域内的表达式, 借助于软件 Mathematica 对各场量可求得其 Fourier 逆变换 $\tilde{A}(x, y, p)$, 再运用下面的式子来近似计算它的 Laplace 逆变换

$$\begin{aligned} A(x, y, t) &\approx \frac{e^{\gamma t}}{T_1} \left[\frac{1}{2} \tilde{A}(x, y, \gamma) + \right. \\ &\quad \left. \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N \tilde{A}(x, y, \gamma + \frac{in\pi}{T_1}) e^{in\pi t/T_1} \right] \quad (23) \end{aligned}$$

其中 N 为一个充分大的正整数, γ 和 T_1 是参数, 其选择必须使得下面的式子成立

$$e^{\gamma t} \left\{ \operatorname{Re} \left[\tilde{A}(x, y, \gamma + \frac{in\pi}{T_1}) e^{in\pi t/T_1} \right] \right\} < \omega \quad (24)$$

其中 ω 为给定的精确度.

4 表面受到热冲击的半空间问题

考虑一个均质、各向同性热弹性半空间, 其所占区域为: $\Omega = \{(x, y) | y \geq 0, -\infty < x < \infty\}$. 对于物

理问题, 在无限远处其场量不能为无穷大. 因此在解 (16)~(17) 中: $A_3 = A_4 = B_2 = 0$. 初始条件为

$$\theta = u = v = \dot{\theta} = \dot{u} = \dot{v} = 0 \quad (25)$$

在表面 $y = 0$ 的边界条件为

$$\theta(x, 0, t) = H(t) \quad (26)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0, t) = 0 \quad (27)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0, t) = 0 \quad (28)$$

对边界条件 (26)~(28) 的两边取 Laplace 和 Fourier 变换, 可求得 A_1, A_2, B_1 的解.

5 数值计算

当所考虑的半空间为铜时, 无量纲化参数的取值为: $\varepsilon = 0.0168$, $\tau_1 = 0.04$, $\tau_2 = 0.025$, 计算中的精确度 $\omega = 0.00001$. 根据上面的方法, 进行数值计算可得 $u = \sigma_{xy} = 0$, 其余 5 个场量分布分别示于图 1~图 5. 每图中的 4 条曲线分别代表在 GL 模型下不考虑外加磁场影响 ($\alpha = 1.0$) 和考虑外加磁场影响 ($\alpha = 1.1$), 在传统的耦合热弹性模型下 ($\tau_1 = \tau_2 = 0.0$) 不考虑外加磁场影响和考虑外加磁场影响时各个场量的分布. 可看出, 磁场的存在使相应的温度增大, 但使相应的位移和应力减小. 此结论与 Ezzat^[7] 等所得的结论一致. 同时可看到, 在 GL 理论下电磁热弹性波和膨胀波分别以速度 $1/c_1$ 和 $1/c_4$ (在有磁场影响时分别为 6.3267 和 0.9997, 在无磁场影响时分别为 6.3265 和 0.9532) 传播, 可

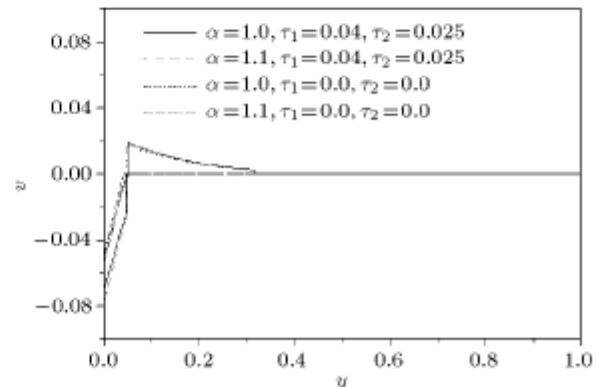
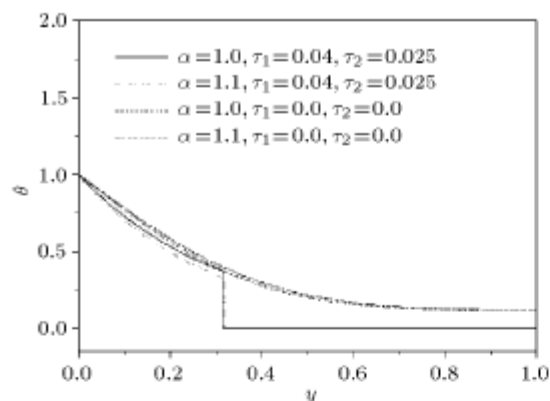
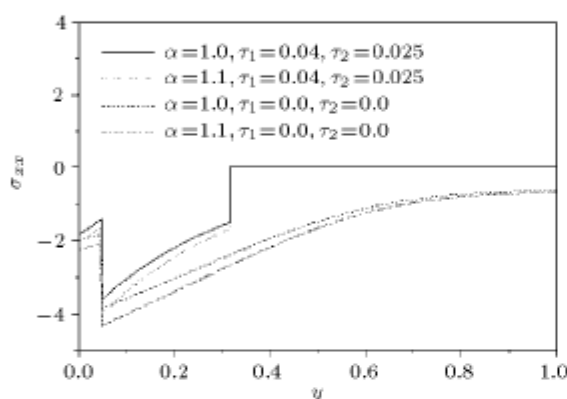
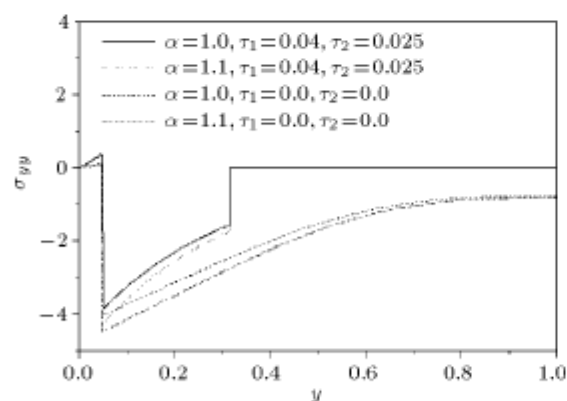
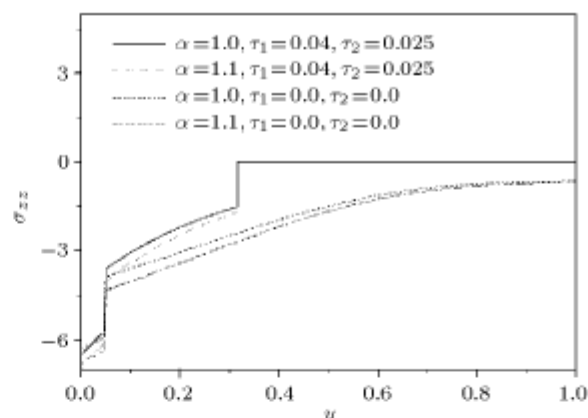


图 1 时间 $t = 0.05$ 时的位移分布

Fig.1 Displacement distribution at time $t = 0.05$

图 2 时间 $t = 0.05$ 时的温度分布Fig.2 Temperature distribution at time $t = 0.05$ 图 3 时间 $t = 0.05$ 时的应力分布Fig.3 Stress distribution at time $t = 0.05$ 图 4 时间 $t = 0.05$ 时的应力分布Fig.4 Stress distribution at time $t = 0.05$

看出在时间 $t = 0.05$ 时,在不考虑磁场影响时两波的波阵面分别到达 0.31634 和 0.05,在考虑磁场影响时两波的波阵面分别到达 0.3163 和 0.0477. 同时可看到 GL 模型所计算的结果中都有两个跳跃不连续点(位移和温度分布图中的第一个间断点所对应值的跳跃很小,不能很清楚地显示出来),这说明波以有限

图 5 时间 $t = 0.05$ 时的应力分布Fig.5 Stress distribution at time $t = 0.05$

的速度传播,在波未到达的区域,保持不受扰动.而在传统的耦合理论下,只可观察到膨胀波的传播,这说明在这种理论下电磁热弹性波以无限的速度传播.同时可看出在所考虑的时间较短时,热松弛时间对场量的分布影响较大,使相应的温度增大,但使相应的位移和应力减小,这同磁场对其影响相同.

6 结 论

通过本文的研究,可得到以下结论:

(1) 运用势函数法及 Laplace 和 Fourier 变换法,得到二维电磁热弹性半空间问题的场量在变换域内的精确表达式.

(2) 运用级数展开和 Laplace 逆变换方法可得到在小时间范围内问题的解.并可得到电磁热弹性波、膨胀波和横向弹性波的传播速度及磁场和热松弛时间对各个场量的影响.

(3) 本文所用方法为求解二维电磁热弹性耦合问题的一种有效方法,对 MEMS 系统的理论研究和优化设计具有一定的意义和价值.

参 考 文 献

- 1 Lord HW, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J Mech Phys Solid*, 1967, 15: 299~309
- 2 Green AE, Lindsay KE. Thermoelasticity. *J Elast*, 1972, 2(1): 1~7
- 3 Chandrasekharaiah DS. Thermoelasticity with second sound: A review. *Appl Mech Rev*, 1986, 39(3): 355~376
- 4 Chandrasekharaiah DS. Hyperbolic thermoelasticity: A review of recent literature. *Appl Mech Rev*, 1998, 51(12): 705~729
- 5 Nayfeh AH, Nasser SN. Electromagneto-thermoelastic plane waves in solids with thermal relaxation. *J Appl Mech*, 1972, 113: 108~113

- 6 Sherief HH, Ezzat MA. A thermal-shock problem in magneto-thermoelasticity with thermal relaxation. *Int J Solids and Structure*, 1996, 33(30): 4449~4459
- 7 Ezzat MA. State space approach to generalized magneto-thermoelasticity with two-relaxation times in a medium of perfect conductivity. *Int J Engng Sci*, 1997, 35(8): 741~752
- 8 Ezzat MA, Othman MI. Electromagneto-thermoelastic plane waves with two relaxation times in a medium of perfect conductivity. *Int J Engng Sci*, 2000, 38(1): 107~120

ELECTROMAGNETO-THERMOELASTIC WAVES WITH TWO RELAXATION TIMES IN A PERFECTLY CONDUCTING MEDIUM¹⁾

Song Yaqin* Zhang Yuanchong* Lu Bingheng[†]

*(Department of Engineering Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

[†](Department of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract The main object of this paper is to give a method for two-dimensional coupled electromagneto-thermoelastic problem under generalized thermoelasticity with relaxation times in a perfectly conducting medium.

The model of the two-dimensional equations of electromagneto-thermoelastic with two relaxation times in a perfectly conducting medium is established firstly. Then the potential functions are introduced to make the problem transform into three coupled partial differential equations. The joint Laplace (for time variable) and Fourier (for one space variable) transform methods are used to obtain the exact expressions for field quantities in transform domain. Using the series expansion method and inverse Laplace transform the solutions of the problem valid in small time range are given. The resulting formulations are applied to a half space subjected to a thermal shock at the boundary. The velocities of electromagneto-thermoelastic wave, dilatational wave and transverse wave are given. The graphs of field quantities distributions are given using numerical calculation. Also the effects of relaxation times and magnetic field on the distribution of field quantities can be observed. The conclusion agrees with that obtained before.

Increasing attention has been devoted to the interaction between electromagnetic field and strain field in a thermoelastic solid due to its many applications in the fields of geophysics, plasma physics, and related topics. Especially, study of the problem of generalized coupled electromagneto-thermoelastic in microscale domain is very important due to the rapid development of microelectromechanical system (MEMS). So this work has some value in the theoretical analysis and optimization design of the microscale device.

Key words GL theory, electromagneto-thermoelasticity waves, potential function, Laplace and Fourier transform, series expansion

Received 29 April 2002, revised 17 September 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10132010, 50175089) and the Doctoral Foundation of Xi'an Jiaotong University.