

随机结构动力反应分析的概率密度演化方法¹⁾

李 杰 陈建兵

(同济大学土木工程学院建筑工程系, 上海 200092)

摘要 提出了随机结构动力反应分析的概率密度演化方法. 基于有限单元法基本原理, 导出了含有随机参数的结构反应状态方程, 进而, 通过引入扩展状态向量, 建立了随机结构反应的概率密度演化方程. 将精细时程积分方法与 Lax-Wendroff 差分格式相结合, 探讨了求解概率密度演化方程的数值方法. 对一个 8 层层间剪切型随机结构进行了算例分析, 并与 Monte Carlo 方法的结果进行了比较. 研究表明, 随机结构反应的概率密度具有演化特征, 且概率密度曲线与正态分布差异甚大, 甚至可能出现双峰曲线.

关键词 随机结构, 动力反应, 概率密度演化方程, 精细积分, 差分方法

引 言

20 世纪 70 年代以来, 随机结构分析问题逐渐引起学者们的关注, 并已取得了很大的进展^[1]. Shinozuka 及其合作者对于随机模拟方法的系统研究, 为随机结构分析提供了基本的手段^[2], 虽然随机模拟方法在收敛性和计算开销等方面至今仍然存在明显弱点, 但是其作为校验其它随机结构分析方法正确性的基本地位已经确认. 80 年代对于随机振动方法的系列研究使得关于结构的静力随机振动分析方法趋于成熟^[3], 同时, 这些研究也发现振动方法主要适用于小变异性问题. 而振动方法固有的久期项问题使得它在本质上不适用于结构动力分析问题^[4]. 为此, 基于正交多项式展开的算法开始引起注意. 1990 年 Ghanem & Spanos 尝试用混沌多项式求解随机结构静力分析问题^[5], 1992 年 Jensen & Iwan 则将其推广到结构动力分析之中去^[6]. 1995 年, 李杰提出了扩阶系统方法^[7], 并进行了较为系统的研究^[8,9]. 1996 年以来, Elishakoff 等人开展了寻求随机结构数值特征的精确分析方法的研究^[10~12], 但迄今为止还处于非常初步的阶段.

仔细分析上述随机结构分析方法不难发现: 它们都是以求解结构反应数值特征为基本目的的. 从全面反映随机结构反应的概率信息角度考察, 这些方法仅是对随机结构反应的一种较为宏观的把握. 更为精细化的反映是对于结构反应概率密度及其演化特征的把握. 由于这一问题的难度, 在迄今为止的

国内外研究文献中还鲜有见及. 近年以来, 从发展随机结构非线性反应分析方法入手, 作者逐步建立了一类随机结构反应分析的概率密度演化方法. 本文将结合线性随机结构动力反应分析问题的特点, 从概率密度演化的角度, 导出随机结构动力反应的概率密度演化方程. 结合精细时程积分和差分方法, 对此类概率密度演化方程进行求解. 通过具体算例, 验证了本文给出方法的正确性, 并讨论了随机结构反应概率密度演化的若干特征.

1 随机结构动力反应的状态方程

不失一般性, 根据有限单元法基本原理, 工程结构的动力反应方程可写为

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = f(t) \quad (1)$$

其中 M, C, K 分别为 n 阶质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $f(t)$ 为动力激励, 本文仅考虑确定性激励的情形; $U, \dot{U}, \ddot{U}$ 分别为 n 阶位移、速度和加速度反应向量. 引入状态向量 $X = (U^T, \dot{U}^T)^T$, 方程 (1) 可写成如下状态方程的形式^[9]

$$\dot{X} = \tilde{A}X + \tilde{F}(t) \quad (2)$$

其中 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{F}(t)$ 分别为

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\tilde{F}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}f(t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

2002-08-10 收到第一稿, 2003-06-02 收到修改稿.

1) 国家杰出青年科学基金资助项目 (59825105).

当结构的物理特性含有随机参数时, M, C, K 成为随机矩阵, 从而 $\tilde{A}$ 亦为随机矩阵, 此时方程 (2) 成为含有随机参数的状态方程

$$\dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{A}}(\zeta)\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{F}}(t) \quad (5)$$

式中 ζ 为随机参数向量, 其联合概率密度函数 $p_{\zeta}(\mathbf{x})$ 已知.

2 随机结构动力反应的概率密度演化方程

引入扩展状态向量 $\mathbf{Y} = (\mathbf{X}^T, \zeta^T)^T = (Y_1, \dots, Y_{2n+n_{\zeta}})^T$, n_{ζ} 为 ζ 的维数, 则状态方程 (5) 可写为

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}, t) = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{F}(t) \quad (6)$$

式中 $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_{2n+n_{\zeta}})^T$, 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}(\zeta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

方程 (6) 的初始条件 $\mathbf{Y}|_{t=0} = (\mathbf{X}_0^T, \zeta^T)^T$ 为随机向量, 故由方程 (6) 所确定的过程 $\mathbf{Y}(t)$ 为一随机过程.

设 $\mathbf{Y}(t)$ 的概率密度函数为 $p_Y(\mathbf{y}, t)$, 根据概率守恒原理, 可以证明概率密度满足如下演化方程^[13,14]

$$\frac{\partial}{\partial t} p_Y(\mathbf{y}, t) + \sum_{j=1}^{2n+n_{\zeta}} \frac{\partial}{\partial y_j} [p_Y(\mathbf{y}, t) G_j(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (8)$$

当结构初始位移与初始速度均为零时, 其初始条件为

$$p_Y(\mathbf{y}, t)|_{t=0} = \left[\prod_{j=1}^{2n} \delta(y_j) \right] p_{\zeta}(\mathbf{y}_{\zeta}) \quad (9)$$

式中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数, $\mathbf{y}_{\zeta} = (y_{2n+1}, \dots, y_{2n+n_{\zeta}})$.

将式 (6) 和式 (7) 代入式 (8), 经整理可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2n} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{2n} A_{ji} y_i \right] \frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial y_j} \right\} + \\ \sum_{j=1}^{2n} F_j(t) \frac{\partial p_Y(\mathbf{y}, t)}{\partial y_j} + p_Y(\mathbf{y}, t) \cdot \text{Tr}(\mathbf{A}) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

其中, A_{ij} 为矩阵 $\mathbf{A}$ 之元素, $F_j(t)$ 为向量 $\mathbf{F}(t)$ 之分量, $\text{Tr}(\mathbf{A})$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 之迹.

当仅对 $Y_l (1 \leq l \leq 2n)$ 的一维概率密度感兴趣时, 令

$$p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t) = \int p_Y(\mathbf{y}, t) dy_1 \cdots dy_{l-1} dy_{l+1} \cdots dy_{2n} \quad (11)$$

式中, 注意到边界条件

$$p_Y(\mathbf{y}, t)|_{y_j = \pm \infty} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n) \quad (12)$$

对式 (10) 两边关于 $y_1, \dots, y_{l-1}, y_{l+1}, \dots, y_{2n}$ 积分, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t)}{\partial t} + [A_{ll} y_l + F_l(t)] \frac{\partial p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t)}{\partial y_l} + \\ \sum_{i=1, i \neq l}^{2n} \int A_{li} y_i \frac{\partial p_{Y_l \zeta}(y_l, y_i, \mathbf{y}_{\zeta}, t)}{\partial y_l} dy_i + \\ A_{ll} p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

若对于给定的 $\mathbf{y}_{\zeta}$, 根据方程 (2) 或 (6) 求解得到的反应为 $Y_i(\mathbf{y}_{\zeta}, t)$, 这意味着联合概率密度函数中含有 $\delta(y_i - Y_i(\mathbf{y}_{\zeta}, t))$, 即 $p_{Y_l \zeta}(y_l, y_i, \mathbf{y}_{\zeta}, t) = \delta(y_i - Y_i(\mathbf{y}_{\zeta}, t)) p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t)$, 由此可将上式中的第三项化为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1, i \neq l}^{2n} \int A_{li} y_i \frac{\partial p_{Y_l \zeta}(y_l, y_i, \mathbf{y}_{\zeta}, t)}{\partial y_l} dy_i = \sum_{i=1, i \neq l}^{2n} A_{li} \cdot \\ \frac{\partial \left[\int y_i \delta(y_i - Y_i(\mathbf{y}_{\zeta}, t)) p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t) dy_i \right]}{\partial y_l} = \\ \sum_{i=1, i \neq l}^{2n} A_{li} Y_i(\mathbf{y}_{\zeta}, t) \frac{\partial p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t)}{\partial y_l} \end{aligned} \quad (14)$$

代入式 (13) 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t)}{\partial t} + \left[A_{ll} y_l + \sum_{i=1, i \neq l}^{2n} A_{li} Y_i(\mathbf{y}_{\zeta}, t) + F_l(t) \right] \cdot \\ \frac{\partial p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t)}{\partial y_l} + A_{ll} p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

求解方程 (15) 和初始条件 (9) 构成的偏微分方程问题即可得到 $p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t)$, 进而对其积分即可给出反应 $Y_l(t)$ 的概率密度

$$p_{Y_l}(y_l, t) = \int p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t) d\mathbf{y}_{\zeta} \quad (16)$$

对于无阻尼体系, 由式 (3) 可知 $A_{ll} = 0$, 此时式 (15) 化简为

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t)}{\partial t} + \left[\sum_{i=1, i \neq l}^{2n} A_{li}(\mathbf{y}_{\zeta}) Y_i(\mathbf{y}_{\zeta}, t) + F_l(t) \right] \cdot \\ \frac{\partial p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t)}{\partial y_l} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

初始条件 (9) 经积分变为

$$p_{Y_l \zeta}(y_l, \mathbf{y}_{\zeta}, t)|_{t=0} = \delta(y_l) p_{\zeta}(\mathbf{y}_{\zeta}) \quad (18)$$

3 数值分析方法

式 (17) 可用差分方法求解, 其基本步骤是:

①关于 ζ 的实值区间进行离散, 设离散点值向量为 $y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}$;

②对初始条件 (18) 进行离散, 得到离散格式的初始条件

$$p_{Y_i \zeta}(y_{t; i_l}, y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}, t_0) = \begin{cases} \frac{1}{|\Delta y_l|} p_{\zeta}(y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}), & i_l = 0 \\ 0, & i_l \neq 0 \end{cases} \quad (19)$$

③对于给定的 $y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}$, 求解方程 (2) 得到 $Y_i(y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}, t)$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$);

④根据差分方法求解方程 (17), 即可得到 $p_{Y_i \zeta}(y_{t; i_l}, y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}, t_m)$, $t_m = m\Delta t$, 为第 m 个时间离散点, Δt 为时间离散间距;

⑤对 $y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}$ 进行数值积分, 得到概率密度

$$p_{Y_i}(y_{t; i_l}, t_m) = \prod_{j=2n+1}^{2n+n_{\zeta}} |\Delta y_j| \cdot \sum_{i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}} p_{Y_i \zeta}(y_{t; i_l}, y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}, t_m)$$

显然, 这一求解方法同样适用于有阻尼体系的分析。

3.1 结构动力反应分析

上述步骤③实际上是一个确定性动力分析问题, 可采用精细时程积分方法^[15]。当参数取为 $y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}$ 时进行确定性动力反应分析。

令

$$T = \exp(\tilde{A}\Delta t) \quad (20)$$

由精细积分方法可得到 T 的几乎精确值^[15]。则方程 (2) 的动力反应的一般表达式为

$$X(t_{m+1}) = TX(t_m) + \int_0^{\Delta t} \exp(\tilde{A}(\Delta t - \xi)) \cdot \tilde{F}(t_m + \xi) d\xi \quad (21)$$

例如当基底输入正弦激励 $\ddot{x}_g(t) = \ddot{X}_g \sin(\omega t + \varphi)$ 时, 其中 $\ddot{X}_g$ 为幅值, 式 (4) 变为

$$\tilde{F}(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (22)$$

其中 $F_0 = \ddot{X}_g(0^T, 1^T)^T$, 代入式 (21), 积分可得

$$X(t_{m+1}) = TX(t_m) + B_m F_0 \quad (23)$$

这里

$$B_m = (I + \omega^2 \tilde{A}^{-2})^{-1} [-\tilde{A}^{-1} \sin(\omega \Delta t + \omega t_m + \varphi) + T \tilde{A}^{-1} \sin(\omega t_m + \varphi) - \omega \tilde{A}^{-2} \cos(\omega \Delta t + \omega t_m + \varphi) + \omega \tilde{A}^{-2} T \cos(\omega t_m + \varphi)] \quad (24)$$

由此即可得到

$$Y_i(y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}, t_m) = X_i(y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}, t_m)$$

3.2 Lax-Wendroff 差分方法

对于步骤④中的差分方法, 研究表明, Lax-Wendroff 格式具有较好的收敛与稳定性^[16], 故本文中采用这一格式。

设网格比 $r = \frac{\Delta t}{\Delta y_l}$, 方程 (17) 的 Lax-Wendroff 格式为

$$p_{j,m} = \frac{1}{2}(r^2 g_m^2 - r g_m) p_{j+1,m-1} + (1 - r^2 g_m^2) p_{j,m-1} + \frac{1}{2}(r^2 g_m^2 + r g_m) p_{j-1,m-1} \quad (25)$$

式中 $p_{j,m}$ 表示 $p_{Y_i \zeta}(y_{t; j}, y_{\zeta; i_{2n+1}, \dots, i_{2n+n_{\zeta}}}, t_m)$, 而

$$g_m = \sum_{i=1, i \neq l}^{2n} A_{li}(y_{\zeta}) Y_i(y_{\zeta}, t_m) + F_l(t_m) \quad (26)$$

式 (25) 的 CFL 条件是

$$|r g_m| \leq 1 \quad (27)$$

据此即可确定网格比。在实际计算中可先估计 $|g_m|_{\max}$, 然后取 $r = r_0/|g_m|_{\max}$, $r_0 \leq 1$ 为调整因子。在计算中应随时验算条件 (27)。

4 算例分析

以图 1 中的 8 层层间剪切型结构在基底正弦输入下的随机反应为例, 对上述概率密度演化分析方法进行验证。

该结构从顶层至底层各层质量依次为 5.0×10^4 kg, 1.1×10^5 kg, 1.1×10^5 kg, 1.0×10^5 kg, 1.1×10^5 kg, 1.1×10^5 kg, 1.3×10^5 kg, 1.2×10^5 kg, 层高除第一层 4 m, 其余均为 3 m。柱截面尺寸为 600 mm $\times$ 600 mm, 两跨三柱, 弹性模量 E 服从正态分布, 均值 $\mu_E = 3.0 \times 10^{10}$ Pa, 标准差 $\sigma_E = 3.45 \times 10^9$ Pa。基底确定性正弦激励加速度时程为 $\ddot{x}_g = -0.05 \sin 10t$ 。

自上至下水平位移和速度记为 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_8, \dots, X_{16})^T$, 前 8 个分量为位移, 后 8 个分量为速度. 采用本文方法计算得到的结构反应 X_1 的概率密度演化曲线示例见图 2, 图 3, 结构反应均值与标准差与 Monte Carlo 模拟方法结果的比较见图 4, 均值参数系统反应及其与反应均值的差异见图 5. 在 Monte Carlo 模拟中, 首先对弹性模量进行抽样, 然后按精细时程积分方法进行确定性结构动力分析, 最后进行均值与标准差的统计计算, 直至按照标准差范数误差在 0.5% 以内为止. 在内存 256 M, 主频 1 GHz 的奔腾 III 机器上分析, Monte Carlo 模拟需时 72 s, 而本文建议方法仅需时 12 s.

分析可见: 随机结构反应呈现典型的概率密度演化性质, 且其概率密度曲线的分布与形状均随着

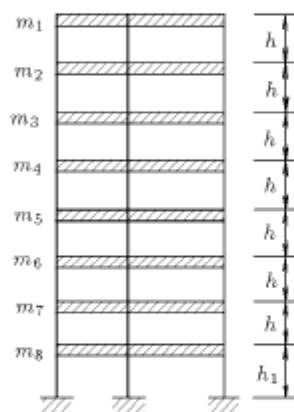


图 1 8 层层间剪切型随机结构模型

Fig.1 An 8-story floor-shear stochastic structure

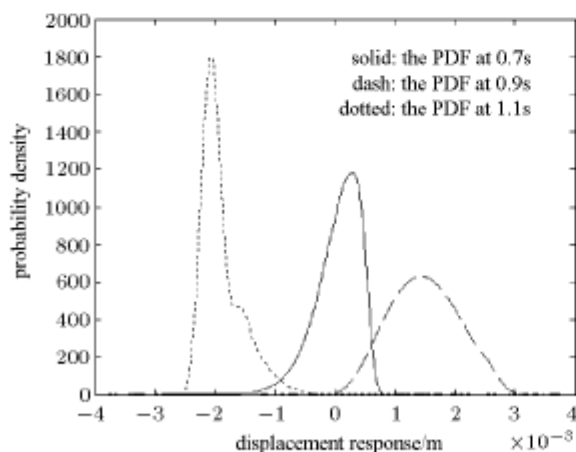


图 2 概率密度演化的典型曲线

(图注: PDF: Probability density function)

Fig.2 Typical probability density curves

(Annotation: PDF: Probability density function)

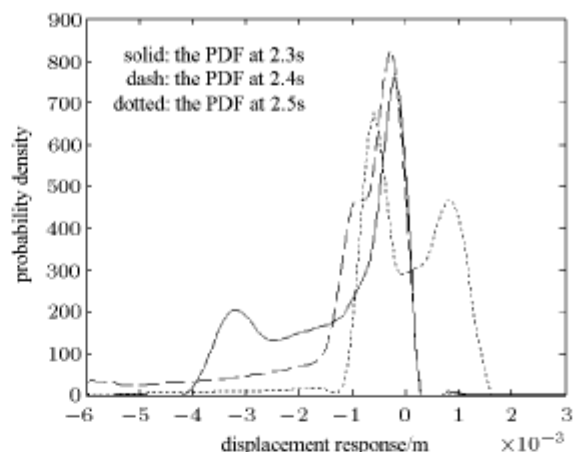


图 3 概率密度演化的典型曲线

(图注: PDF: Probability density function)

Fig.3 Typical probability density curves

(Annotation: PDF: Probability density function)

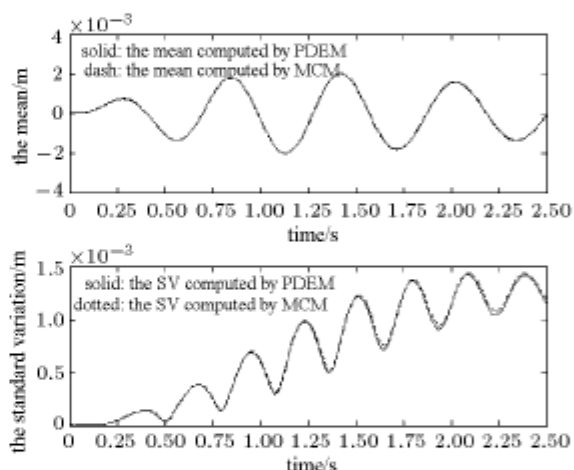


图 4 随机结构反应的均值与标准差

(图注: PDEM: the probability density evolution method
MCM: the Monte Carlo method)

Fig.4 The mean and the standard variation of the stochastic structural response (Annotation: PDEM: the probability density evolution method, MCM: the Monte Carlo method)

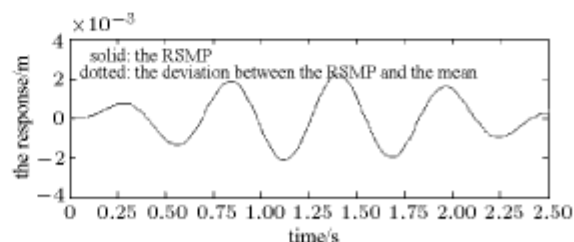


图 5 均值参数系统反应及其与随机结构反应均值的差异

(图注: RSMP: the response of the system with the mean parameter)

Fig.5 The RSMP and the deviation between RSMP and the mean response of the stochastic structure (Annotation: RSMP: the response of the system with the mean parameter)

时间的发展而变化。虽然在本算例中假定结构弹性模量具有正态分布,但是结构反应的概率密度曲线与正态分布相去甚远,并且可能出现双峰曲线的情形。这在结构可靠度分析中是值得注意的。

概率密度演化方法得到的结构反应均值与标准差与 Monte Carlo 方法的结果符合良好,并且具有计算量小、计算结果稳定等优点,在 Monte Carlo 方法中,计算的收敛准则与计算精度的评价至今仍未获得完满解决,而且难以得到比二阶矩更为精细的概率信息。

均值参数系统反应与系统反应均值具有明显的差异,且随着时间的发展差异越来越大,差异的幅值几乎可以达到与反应均值幅值相当的水平(图5)。随机结构反应中的这一基本特征再次得到了验证。与静力反应相比较,结构动力反应的涨落显著增大,随机参数虽然仅具有 11.5% 的变异系数,但是随机反应的标准差最大值却达到了与均值最大值几乎同一量级的水平。

5 结 论

随机结构动力反应具有确定的反应概率密度演化特征。通过概率密度演化方法,可以得到任意时刻随机结构反应的概率密度曲线,从而得到其全部的概率信息。研究表明,概率密度曲线具有典型的演化特征,且与正态分布差异很大,甚至出现双峰曲线的情形,应该引起足够的重视。与随机模拟方法、随机摄动方法和正交展开理论相比较,概率密度演化方法不仅可以获得更为精细的反应概率信息,而且计算量小、不存在久期项问题的困扰和小变异性的限制,具有很高的精度。相信,随着研究工作的深入开展,概率密度演化方法将会被证明是一条具有良好的研究和应用前景的随机结构分析途径。

参 考 文 献

- 1 李杰. 随机结构系统——分析与建模. 北京: 科学出版社, 1996 (Li Jie. Stochastic Structural Systems—Analysis and Modeling. Beijing: Science Press, 1996 (in Chinese))
- 2 Shinozuka M. Probabilistic modeling of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1972, 98: 1433~1451
- 3 Kleiber M, Hien TD. The Stochastic Finite Element Method. Chichester: John Wiley & Sons, 1992
- 4 Hisada T, Nakagiri S. Stochastic finite element method developed for structural safety and reliability. In: Proc. 3rd Int. Conf on Structural Safety and Reliability, 1981, 395~408
- 5 Ghanem R, Spanos PD. Polynomial chaos in stochastic finite elements. *Journal of Applied Mechanics*, 1990, 57: 197~202
- 6 Jensen H, Iwan WD. Response of systems with uncertain parameters to stochastic excitation. *Journal of Engineering Mechanics*, 1992, 118 (5): 1012~1025
- 7 李杰. 随机结构分析的扩阶系统方法 (I) 扩阶系统方程. 地震工程与工程振动, 1995, 15(3): 111~118 (Li Jie. The expanded system method for analysis of expanded system method (I) the expanded system equation. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1995, 15(3): 111~118 (in Chinese))
- 8 李杰. 随机结构分析的正交分解分析方法. 振动工程学报, 1999, 12(1): 78~84 (Li Jie. The orthogonal expansion method for stochastic structural analysis. *Journal of Vibration*, 1999, 12 (1): 78~84 (in Chinese))
- 9 李杰, 廖松涛. 线性随机结构在随机激励下的动力响应分析. 力学学报, 2002, 34(3): 416~424 (Li Jie, Liao Songtao. Dynamic response analysis for linear stochastic structures under random excitation. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34 (3): 416~424 (in Chinese))
- 10 Elishakoff I, Ren YJ, Shinozuka M. Variational principles developed for and applied to analysis of stochastic beams. *Journal of Engineering Mechanics*, 1996, 122 (6): 559~565
- 11 Ren YJ, Elishakoff I, Shinozuka M. Finite element method for stochastic beams based on variational principles. *Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64: 664~669
- 12 Elishakoff I, Impollonia N, Ren YJ. New exact solutions for randomly loaded beams with stochastic flexibility. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 36, 2325~2340
- 13 陈建兵. 随机结构非线性反应概率密度演化分析. [博士学位论文]. 上海: 同济大学, 2002 (Chen Jianbing. Probability density evolution of stochastic structural nonlinear response. [Ph D thesis]. Shanghai: Tongji University, 2002 (in Chinese))
- 14 张炳根, 赵玉芝. 科学与工程中的随机微分方程. 北京: 海洋出版社, 1981 (Zhang Binggen, Zhao Yuzhi. Random Differential Equations in Science and Engineering. Beijing: Ocean Press, 1981 (in Chinese))
- 15 钟万勰. 应用力学对偶体系. 北京: 科学出版社, 2002 (Zhong Wanxie. The Conjugate Systems in Applied Mechanics. Beijing: Science Press, 2002 (in Chinese))
- 16 Thomas JW. Numerical Partial Differential Equations Finite Difference Methods. New York: Springer-Verlag Inc, 1995

PROBABILITY DENSITY EVOLUTION METHOD FOR ANALYSIS OF STOCHASTIC STRUCTURAL DYNAMIC RESPONSE¹⁾

Li Jie Chen Jianbing

(School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract Probability density evolution method for the analysis of stochastic structural dynamic response is presented. Based on the finite element method, the state equations of structural response containing random parameter are deduced. The probability density evolution equation (PDEE) of the stochastic structural response is then established by introducing augmented state vector. Combining the precise integration method with the Lax-Wendroff difference scheme will lead to numerical method for the PDEE. A case is studied on the response of an 8-storey floor-shear stochastic structure and the results are compared with that evaluated by the Monte Carlo method. The investigation shows that the probability density curves of the stochastic structural response have the characteristics of evolution, and they are far from normal distribution, at some time they even have double peaks.

Key words stochastic structure, dynamic response, probability density evolution equation, precise integration method, difference method

Received 10 August 2002, revised 2 June 2003.

1) The project supported by the National Science Fund for Distinguished Young Scholar of China (59825105).