

用 PDF 方程法分析悬沙垂线浓度分布¹⁾

傅旭东 王光谦

(清华大学水利系水沙科学教育部重点实验室, 北京 100084)

摘要 从颗粒运动的 PDF(概率密度分布函数) 输运方程出发, 建立颗粒相的质量、动量和脉动速度二阶矩方程. 对于明渠二维恒定均匀流, 利用垂向动量方程导出了新的泥沙扩散方程, 表明颗粒脉动强度梯度、升力、重力沉降和紊动扩散都影响悬沙运动, 说明了传统扩散方程的不足. 理论分析了水沙两相物理属性和水流条件对泥沙扩散系数和浓度分布特征的影响, 并通过细颗粒试验资料的分析进行了定量研究.

关键词 PDF 方程, 挟沙水流, 泥沙扩散方程, 浓度分布, 扩散系数

引 言

研究悬移质泥沙浓度分布的理论多种多样, 但分析表明, 各家成果形式上均与扩散方程类似, 只是扩散系数有些差异^[1]. 长期以来, 悬沙浓度分布的研究一直以传统的泥沙扩散理论为主, 泥沙扩散系数 ε_s 的确定是理论的关键. 但是, ε_s 的确定往往依靠半经验的处理, 假定 ε_s 等于或者正比于水流的紊动涡黏性系数 ν_t^* . 根据已知泥沙浓度的垂线分布, 利用传统扩散方程反推出 ε_s 往往大于 $\nu_t^{*[2,3]}$, 这样的结果与离散质点的紊流扩散理论并不一致^[4,5]. 虽然针对扩散系数的确定提出了种种修正办法, 如 Czernuszenko^[4] 提出了漂移扩散系数的概念, 但都未从根本上解决这个矛盾. 而且, 对于试验和实测中所观察到的最大值出现在床面以上某个位置的泥沙浓度 I 型分布, 传统的泥沙扩散理论亦难以解释^[1]. 由于传统理论存在不足, 一些学者着手寻求更为一般的理论解释悬沙运动机理. 如 Wang 和 Ni^[6] 应用固液两相流的动理学理论, 分析发现升力作用是 I 型分布形成因素之一. 刘大有^[5,7] 从两相流的一般扩散模型出发, 发现传统扩散理论不能反映颗粒脉动强度梯度引起的扩散, 指出在颗粒脉动强度变化较大区域, 传统泥沙理论所基于的 Fick 扩散定律存在明显缺陷, 并对 ε_s 大于 ν_t^* 的试验结果以及浓度 I 型分布的形成作了定性解释. 刘大有^[8] 继而分析了泥沙悬浮运动的机理, 认为只要有某种形式的无规则运动存在, 泥沙颗粒就能悬浮; 河流或水平管道中颗粒的悬浮, 除了重力和浮力以外, 颗粒还可能受

到其他的升力与颗粒脉动强度梯度的作用. 本文从动理学理论的基本方程出发, 对悬沙浓度分布的形成机理及其影响因素作定量分析, 并修正传统的泥沙扩散方程.

1 悬沙颗粒运动的 PDF 方程与各阶守恒方程

低浓度挟沙水流中, 不考虑泥沙颗粒之间的碰撞, 单颗粒运动的 Lagrange 方程为

$$\frac{d\mathbf{R}_p}{dt} = \mathbf{v}_p \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R}_p) - \mathbf{v}_p}{\tau_p} + \mathbf{F} + \mathbf{w} \quad (2)$$

式中, $\mathbf{R}_p$ 为颗粒位置; $\mathbf{v}_p$ 为颗粒速度; $\mathbf{u}$ 为颗粒位置处的水流速度; τ_p 为颗粒弛豫时间; $\mathbf{F}$ 为除阻力以外的其他相间力与重力之和; $\mathbf{w}$ 为颗粒布朗运动作用力, 是一连续随机过程.

将 Lagrange 方程转化成 Euler 变量的方程, 设想颗粒的瞬时 PDF

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_p, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) \quad (3)$$

式中, $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数, t 为时间, $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{v}$ 依次为颗粒相的空间坐标和速度.

对所有的紊流实现进行系综平均, 得到颗粒相平均的 PDF

$$\langle f \rangle = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) \rangle \quad (4)$$

2002-05-21 收到第一稿, 2003-05-26 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金委和水利部联合资助重大项目 (59890200), 清华大学骨干人才支持计划资助项目.

式中, $\langle \cdot \rangle$ 表示系综平均. 由平均 PDF, 可定义颗粒相的平均体积比浓度和速度

$$\langle C \rangle = \int \langle f \rangle dv, \quad \langle C \rangle \langle v \rangle = \int v \langle f \rangle dv \quad (5)$$

对式 (5) 求时间导数, 并模化沿颗粒轨道的水流素动与颗粒的作用项 $\langle u'_i f \rangle$, Derevich 和 Zaichik^[9] 导出了平均 PDF 的输运方程如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + v_i \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial v_i} \left\langle \frac{u_i - v_i + \tau_p F_i}{\tau_p} f \right\rangle = \\ G_p \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial^2 \langle f \rangle}{\partial x_i \partial v_k} + \frac{1}{\tau_p} \left\{ f_p \langle u'_i u'_k \rangle + \frac{D}{\tau_p} \delta_{ik} \right\} \frac{\partial^2 \langle f \rangle}{\partial v_i \partial v_k} \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $f_p = 1 - \exp(-T_E/\tau_p)$, $G_p = T_E/\tau_p - f_p$, T_E 为颗粒和水流素动载能涡的作用时间, D 为颗粒布朗运动扩散系数, $\langle u \rangle$ 和 u' 分别为水流平均与脉动速度, δ_{ik} 为二阶单位张量.

对方程 (6) 两边分别乘以 1, v 和 vv , 并对整个速度空间积分, 可获得颗粒相连续方程、动量方程和脉动速度二阶矩方程

$$\frac{d\langle C \rangle}{dt} + \langle C \rangle \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d\langle v_i \rangle}{dt} + \frac{\partial \langle v'_j v'_i \rangle}{\partial x_j} = \frac{\langle u_i \rangle - \langle v_i \rangle}{\tau_p} + \langle F_i \rangle - \frac{D_{p,ij}^t}{\tau_p} \frac{\partial \ln \langle C \rangle}{\partial x_j} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle v'_i v'_j \rangle}{dt} + \frac{1}{\langle C \rangle} \frac{\partial \langle C \rangle \langle v'_i v'_j v'_k \rangle}{\partial x_k} = \\ - \frac{D_{p,ijk}^t}{\tau_p} (\delta_{ij} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{ik}) \frac{\partial \langle v_m \rangle}{\partial x_k} + \\ \frac{2}{\tau_p} \left(f_p \langle u'_i u'_j \rangle + \frac{D \delta_{ij}}{\tau_p} - \langle v'_i v'_j \rangle \right) \end{aligned} \quad (9)$$

式中, $d/dt = \partial/\partial t + \langle v \rangle \partial/\partial x$, $v' = v - \langle v \rangle$ 为颗粒相脉动速度, $D_p^t = \tau_p (\langle v'v' \rangle + G_p \langle u'u' \rangle)$ 为颗粒扩散张量, 包括颗粒无规则脉动和水流素动扩散两部分.

2 二维恒定均匀流的悬沙浓度方程

二维明渠恒定均匀流中, $\partial/\partial t = 0$, $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$, x 为水平流向, z 为侧向, y 为垂向, 方向竖直向上. 由颗粒相连续方程和自由水面处的颗粒相零通量条件有: $\langle v_y \rangle = \langle u_y \rangle = 0$. 颗粒相垂向动量方程和垂向脉动速度二阶矩 $\langle v_y'^2 \rangle$ 的方程分别为

$$\frac{\partial \langle v_y'^2 \rangle}{\partial y} = \langle F_y \rangle - \frac{1}{\tau_p} D_{p,yyy}^t \frac{\partial \ln \langle C \rangle}{\partial y} \quad (10)$$

$$\frac{1}{\langle C \rangle} \frac{\partial \langle C \rangle \langle v_y'^2 \rangle}{\partial y} = \frac{2}{\tau_p} (f_p \langle u_y'^2 \rangle + D/\tau_p - \langle v_y'^2 \rangle) \quad (11)$$

方程 (10) 可作为研究悬沙垂线浓度分布的基本方程. 为与传统的泥沙扩散方程作比较, 引入挟沙水流中的沉速 ω_p , 它由阻力、重力和浮力之间的平衡获得^[5], 亦即

$$\omega_p = \tau_p (1 - \rho_f/\rho_s) g \quad (12)$$

式中, ρ_f , ρ_s 分别为水流和泥沙颗粒的密度; g 为重力加速度.

在垂向作用力中, 除了颗粒所受有效重力 $(1 - \rho_f/\rho_s)g$ 以外, 还包括 Saffman 力、Magnus 力等升力, 将这些升力表示成综合升力 F_L , 则有

$$\langle F_y \rangle = F_L - \omega_p/\tau_p \quad (13)$$

因此有明渠二维恒定均匀流的泥沙浓度方程

$$D_{p,yyy}^t \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial y} = -\omega_p \langle C \rangle + \langle C \rangle \tau_p (F_L - \partial \langle v_y'^2 \rangle / \partial y) \quad (14)$$

方程 (14) 左端反映了挟沙水流中泥沙颗粒的扩散机理, 右一项反映了重力沉降作用, 右二项反映了颗粒相脉动强度梯度和升力所产生的垂向合力的影响. 如果忽略右二项, 则方程 (14) 即为传统的泥沙扩散方程 $\varepsilon_s \partial \langle C \rangle / \partial y = -\omega_p \langle C \rangle$.

3 浓度分布影响因素的分析

3.1 颗粒垂向扩散系数 $D_{p,yyy}^t$

由方程 (11) 知, $\langle v_y'^2 \rangle$ 与水流素动、颗粒布朗运动、颗粒相脉动速度三阶矩有关. 对于细颗粒, 局域平衡假设能够近似满足, 方程 (11) 中的扩散项可略去

$$\langle v_y'^2 \rangle = f_p \langle u_y'^2 \rangle + D/\tau_p \quad (15)$$

这样, 细颗粒泥沙的脉动将包括由于水流素动引起的颗粒脉动和无规则的布朗运动, 颗粒垂向扩散系数 $D_{p,yyy}^t = T_E \langle u_y'^2 \rangle + D$. 由方程 (14) 有细颗粒的浓度方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle C \rangle}{\partial y} = - \frac{\omega_p \langle C \rangle}{T_E \langle u_y'^2 \rangle + D} \left\{ 1 - \frac{1}{(1 - \rho_f/\rho_s)g} \right. \\ \left. (F_L - \partial \langle v_y'^2 \rangle / \partial y) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

在壁面附近的黏性底层中, $T_E \langle u_y'^2 \rangle \rightarrow 0$, 布朗运动扩散系数 D 为常数, 较 $T_E \langle u_y'^2 \rangle$ 的量级为大, 这样, 细颗粒泥沙以布朗运动为主, 扩散系数 $D_{p,yyy}^t$ 非零, 浓度梯度为有限值. 在黏性底层以

外, $T_E \langle u_y^2 \rangle \gg D$, 细颗粒泥沙以紊动扩散为主, $D_{pyy}^t \approx T_E \langle u_y^2 \rangle$. 因为细颗粒的“穿越轨道效应”并不明显, 颗粒与水流紊动作用时间尺度 T_E 与载能涡的时间尺度 T^t 近似相等, 则有: $D_{pyy}^t \approx T^t \langle u_y^2 \rangle = \varepsilon_m$, ε_m 为水流紊动扩散系数. 这样, 从理论上就得出细颗粒泥沙扩散系数与 ε_m 近似相等的结论, 与单相流体紊流扩散理论一致.

在传统的泥沙运动理论中, 用实测泥沙浓度分布资料反算出的泥沙扩散系数 ε_s 通常大于 ε_m , 即 Schmidt 数 $\beta = \varepsilon_s / \varepsilon_m \geq 1$. 据上述分析, 将方程 (16) 与传统泥沙扩散方程比较有

$$\varepsilon_s = \frac{-\omega_p \langle C \rangle}{\partial \langle C \rangle / \partial y} = D_{pyy}^t \left\{ 1 - \frac{1}{(1 - \rho_f / \rho_s)g} (F_L - \partial \langle v_y^2 \rangle / \partial y) \right\}^{-1} \quad (17)$$

或者

$$\beta = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_m} = \left[1 - \frac{1}{(1 - \rho_f / \rho_s)g} (F_L - \partial \langle v_y^2 \rangle / \partial y) \right]^{-1} \quad (17^*)$$

由此可见, 用已知泥沙浓度分布反算 ε_s 时, 传统扩散方程因为忽略了升力和颗粒相脉动强度梯度的影响, 导致了 ε_s 较真实的泥沙扩散系数 D_{pyy}^t 为大, 从而 β 取值通常大于 1. 而且, 由于 ε_s 取正值, 传统扩散方程预测的浓度梯度恒为负值, 不能预测浓度分布 I 型的存在. 两相流理论正确区分出悬沙运动的扩散、重力沉降、升力和脉动强度梯度作用等机理, 从而能与流体紊流扩散理论保持一致. 当颗粒有效重力小于升力和脉动强度梯度的合力时, 方程 (14) 中的浓度梯度为正值, 浓度 I 型分布出现 (此时的等式 (17*) 已经没有意义, 用传统扩散方程已经不能定义 ε_s). 因此, 方程 (14) 亦为传统扩散方程的修正方程.

3.2 颗粒相脉动强度梯度和升力

实测资料表明, 壁面附近以外的区域, $\langle v_y^2 \rangle$ 沿垂向接近均匀分布, 或者呈现出水底大、水面小的分布形式, 亦即 $\partial \langle v_y^2 \rangle / \partial y \leq 0$. 由于泥沙颗粒密度较大, 其沿流向的速度分量通常小于水流的速度分量, 作用于颗粒上的升力将大于零, 且在边壁附近显著. 定义升力系数 α_L , 水流剪切流速 u_* , 粒径 d_p , 水流运动黏滞系数 ν_f , 流深 H , 无量纲垂向坐标 $\eta = y/H$, 作用于细颗粒上的升力 F_{Lf} 和粗颗粒上的升力 F_{Lc} 可分别表示为^[10]

$$F_{Lf} = \alpha_L \frac{d_p}{y} \frac{u_*^3}{\nu_f} \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_s} \sqrt{\frac{\nu_f}{u_* y}}, \quad F_{Lc} = \alpha_L \frac{\rho_f}{\rho_s} \frac{u_*^2}{y} \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (14), 有细颗粒的浓度方程

$$\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial y} = \frac{-\omega_p \langle C \rangle}{D_{pyy}^t} \left\{ 1 - \frac{\alpha_L}{\eta^{3/2}} \sqrt{\frac{d_p}{H}} \sqrt{\frac{u_* d_p}{\nu_f}} \frac{u_*^2}{gH} - \frac{u_*^2}{(1 - \rho_f / \rho_s)gH} \frac{-\partial \langle v_y^2 \rangle}{u_*^2 \partial \eta} \right\} \quad (19a)$$

和粗颗粒的浓度方程

$$\frac{\partial \langle C \rangle}{\partial y} = \frac{-\omega_p \langle C \rangle}{D_{pyy}^t} \left\{ 1 - \frac{\alpha_L}{\eta} \frac{1}{(\rho_s / \rho_f - 1)gH} \frac{u_*^2}{gH} - \frac{u_*^2}{(1 - \rho_f / \rho_s)gH} \frac{-\partial \langle v_y^2 \rangle}{u_*^2 \partial \eta} \right\} \quad (19b)$$

由式 (19) 可见, 若 $\partial \langle v_y^2 \rangle / \partial \eta \leq 0$ 沿垂向成立, 细颗粒的浓度分布类型与径深比 d_p/H , 沙粒雷诺数 $u_* d_p / \nu_f$, 水力坡降 u_*^2 / gH , 密度比 ρ_f / ρ_s 都有关, 它们的增加, 都将使 β 增大, 并促进浓度 I 型分布的出现; 对于粗颗粒, 其浓度分布类型与 u_*^2 / gH , ρ_f / ρ_s 也有关, 它们的增大也将促进浓度 I 型分布的出现. 本质上, 无论是对粗、细颗粒, 这些因素的增大都减小了重力沉降对浓度分布的影响, 从而增大 β , 也促进浓度 I 型分布的出现.

值得一提的是, 文献 [4] 中将细颗粒泥沙的扩散系数 ε_s 分解为 $\varepsilon_s = \varepsilon_m + \varepsilon_{pd}$, ε_{pd} 为漂移扩散系数, 并假定 ε_{pd} 与粒径 d_p 和水流垂向脉动强度 $\langle u_y^2 \rangle$ 成正比. 这样, β 在文献 [4] 中可表示为 $\beta = 1 + \varepsilon_{pd} / \varepsilon_m$. 结合后文的式 (22) 知, 粒径 d_p 和 u_* 的增大, 都将增大 β , 与本文分析一致.

4 试验资料分析

下面结合 Coleman^[11], Lyn^[12], Wang 和 Qian^[13], Einstein 和 Chien^[14] 的细颗粒泥沙试验资料来定量分析. 前三家试验的组次选择与文献 [4] 相同. 试验基本参数见表 1.

在黏性底层以外, 泥沙扩散系数 D_{pyy}^t 中布朗运动的贡献可以略去

$$D_{pyy}^t \approx T^t \langle u_y^2 \rangle = \varepsilon_m \approx \nu_f^t \quad (20)$$

对于低浓度、细颗粒试验条件, 用下式计算 ν_f^t 和 $\langle u_y^2 \rangle$ ^[4,15]

$$\frac{\nu_f^t}{u_* H} = \kappa (1 - \eta) \left[\frac{1}{\eta} + \pi \Pi \sin(\pi \eta) \right]^{-1} \quad (21)$$

$$\sqrt{\langle u_y^2 \rangle} = 1.23 u_* \exp(-0.67 \eta) \quad (22)$$

表 1 试验基本参数

Table 1 Basic parameters in experiments

Run number	U_{max} (cm/s)	u_* (cm/s)	H (cm)	d_p (mm)	C (0.1H) (%)	w_0 (cm/s)	w_{0c} (cm/s)	w_{0h} (cm/s)	Π
C22 ^[11]	102.4	4.1	17.0	0.21	0.05	2.76	1.3	1.25	0.0
C25 ^[11]	107.3	4.0	16.7	0.21	0.2	2.76	1.3	1.25	0.0
C30 ^[11]	109.3	4.1	16.8	0.21	0.5	2.76	1.3	1.25	0.1
L15 ^[12]	75.7	3.6	6.45	0.15	0.19	1.62	2.1	1.9	0.0
L19 ^[12]	77.7	3.8	6.51	0.19	0.11	2.38	2.5	2.5	0.0
L25 ^[12]	85.9	4.3	6.54	0.24	0.072	3.32	4.8	4.3	0.1
SQ1 ^[13]	207.8	7.4	8.0	0.15	1	1.61	1.6	1.61	0.1
SQ2 ^[13]	209.2	7.4	8.0	0.15	5	1.61	1.6	1.61	0.46
SQ3 ^[13]	203.8	7.4	8.0	0.15	6	1.61	1.6	1.61	0.56
S11 ^[14]	221.0	10.6	13.3	0.274	0.4	3.94		3.94	0.4

式中, κ 为 Karmann 常数, 取为 0.41; Π 为尾流强度, 取值在 0~0.9 之间^[11,15], 随流动条件变化. 文献 [4] 对式 (21) 在低浓度挟沙水流中的适用性作了简单分析, 认为对所考察的低浓度细颗粒试验条件, 颗粒运动仍受水流紊动扩散控制, 式 (21) 可以使用. 本文考察升力和颗粒相脉动强度梯度对浓度分布和传统扩散方程的影响, 采用式 (21) 对结果没有本质影响.

对 0.1~1.0 mm 的颗粒, 清水中的单颗粒静水沉速 ω_0 (Zanke 公式) 和挟沙水流中的沉速 ω_p ^[3,4]

$$\omega_0 = 10 \frac{v_f}{d_p} [(1 + 0.01(\rho_s/\rho_f - 1)gd_p^3/v_f^2)^{0.5} - 1] \quad (23)$$

$$\omega_p/\omega_0 = (1 - \langle C \rangle)^5 \quad (24)$$

用方程 (17), (19a), (20)~(24) 就可以计算细颗粒的浓度分布和 β 的变化规律. 其中, 浓度方程 (19a) 的边界条件采用实测点的浓度值, 细颗粒升力系数 α_L 用 Saffman 力估计

$$F_{\text{saffman}} = 1.62\rho_f d_p^2 \sqrt{v_f} (\langle u_x \rangle - \langle v_x \rangle) \sqrt{\frac{d\langle u_x \rangle}{dy} / \left(\frac{1}{6} \pi \rho_s d_p^3 \right)} \quad (25)$$

据文献 [10], 对于含细颗粒的低浓度挟沙水流, 在黏性底层以外近似有

$$\langle u_x \rangle - \langle v_x \rangle \sim u_* \tau_s \frac{d\langle u_x \rangle}{dy}, \quad \frac{d\langle u_x \rangle}{dy} \sim \frac{u_*}{\kappa y}$$

其中, $\tau_s = \frac{1}{18} (d_p^2/v_f)(\rho_s/\rho_f - 1)$ 为 Stokes 弛豫时间. 这样有

$$F_{\text{saffman}} \sim \frac{1.62}{3\pi\kappa\sqrt{\kappa}} \frac{d_p}{y} \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s} \right) \frac{u_*^3}{v_f} \sqrt{\frac{v_f}{u_* y}}$$

若用 Saffman 力作为 F_L 的近似, 则 $\alpha_L \sim 1.62/(3\pi\kappa^{1.5}) = 0.7$. 实际上, 除了 Saffman 力以外, 颗粒可能还受其他升力的影响, 在本文计算中, 均取 $\alpha_L = 0.8$.

计算与试验资料的对比表明, 试验组次 C22~SQ3 的尾流强度 Π 与文献 [4] 相同, S11 组次的 Π 为 0.4. 按照式 (23) 计算的静水沉速 ω_0 对于 Coleman^[11], Lyn^[12] 资料并不适合, ω_0 和本文率定的沉速 ω_{0h} , 文献 [4] 率定的 ω_{0c} 的比较见表 1. 对此, 文献 [4] 认为有两种可能, 一是水流纵向流速影响颗粒沉速, 且纵向流速越大, 颗粒沉速越小; 二是式 (24) 在紊动挟沙水流中不正确. 对此, 作者认为静水沉速的变化与 v_f^2 的计算也可能有关. 由方程 (19a) 知, 在浓度梯度一定的前提下, 静水沉速的增大或减小分别相当于 v_f^2 的减小或增大. 而对于挟沙水流, 即使是浓度较低的情形, 其流速分布与清水流速分布也可能存在较大差异. 因此, 深入的研究还需要考虑泥沙存在对水流结构的影响.

用无量纲数 B_L 和 B_v 分别表示升力和颗粒脉动强度梯度对浓度分布和 β 的贡献

$$\left. \begin{aligned} B_L &= \frac{\alpha_L}{\eta^{3/2}} \sqrt{\frac{d_p}{H}} \sqrt{\frac{u_* d_p}{v_f}} \frac{u_*^2}{gH} \\ B_v &= \frac{u_*^2}{(1 - \rho_f/\rho_s)gH} \frac{-\partial\langle v_y^2 \rangle}{u_*^2 \partial\eta} \\ \beta &= \frac{1}{1 - B_L - B_v} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

图 1 为计算的 B_L , B_v 和 $B_L + B_v$ 沿水深的变化. 由图可见, B_L 随着 η 增大而减小, 在近壁区较大, 而在主流区很小, 这说明升力使 $\beta > 1$, 并在近壁区对浓度分布和 β 影响较大. 除壁面附近以外, B_v 也随着 η 增大而减小; 在壁面附近, 由于颗粒相脉动强

度 $\langle v_y^2 \rangle$ 向壁面递减, B_v 出现小于零的情形, 在所有的试验组次中, 该位置均在 $\eta < 0.07$ 以内. 这说明在壁面附近, 颗粒相脉动强度梯度使 β 趋向小于 1; 而在离开壁面附近区域, 颗粒相脉动强度梯度使

$\beta > 1$. 升力和颗粒相脉动强度梯度对浓度分布的综合影响体现在 $B_L + B_v$ 的变化上. $B_L + B_v$ 基本上是随 η 增大而减小, 在近壁区主要受升力控制, 而在主流区以颗粒相脉动强度梯度的影响为主.

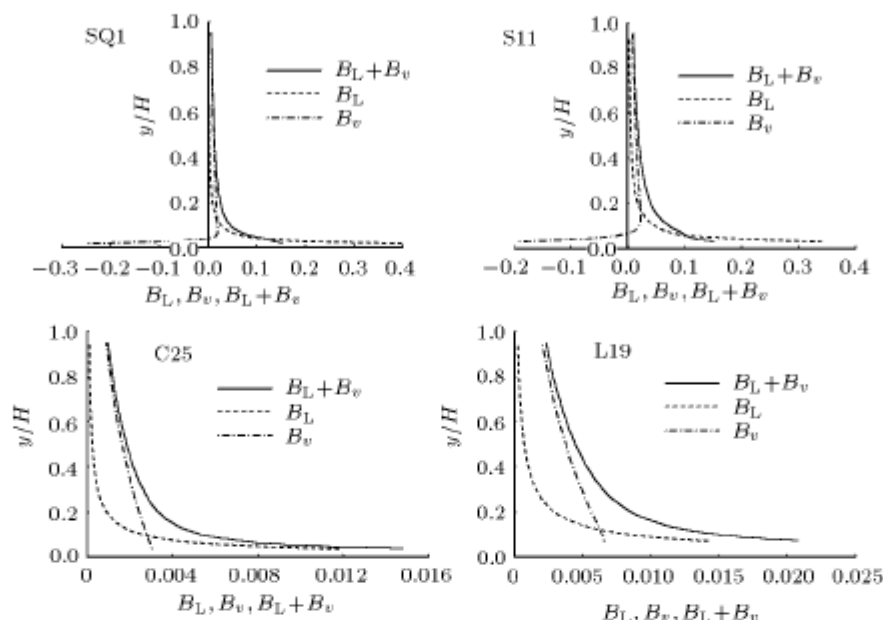


图 1 参数 B_L, B_v 的垂线分布

Fig.1 Vertical distribution of B_L and B_v

图 2 为 β 随相对水深的变化, Coleman^[11] 试验组次的分布因为近乎重合, 仅绘出了 C25 的曲线. 图中表明 β 与 $B_L + B_v$ 的分布类似, 在壁面附近取值较大, 而在主流区较小, 且随着 η 增大而减小. 对于 Coleman^[11] 和 Lyn^[12] 试验, 图中绘出的曲线上最大值不超过 1.04, 可见升力和脉动强度梯度对 β 影响不大. 而在 Wang, Qian^[13] 和 Einstein, Chien^[14]

试验中, β 均较大, 图中的最大值接近 1.4, 这表明升力和脉动强度梯度对 β 分布影响显著.

由前文的分析知道, 升力和颗粒相脉动强度梯度对 β 的影响程度由两相物理属性和水流条件决定, 与 $d_p/H, u_* d_p/\nu, u_*^2/gH, \rho/\rho_s$ 等参数均有关. 表 2 给出了不同试验组次中这些参数的大小. Coleman^[11] 试验中, 3 个组次的参数均接近, 所以 β 彼此接近.

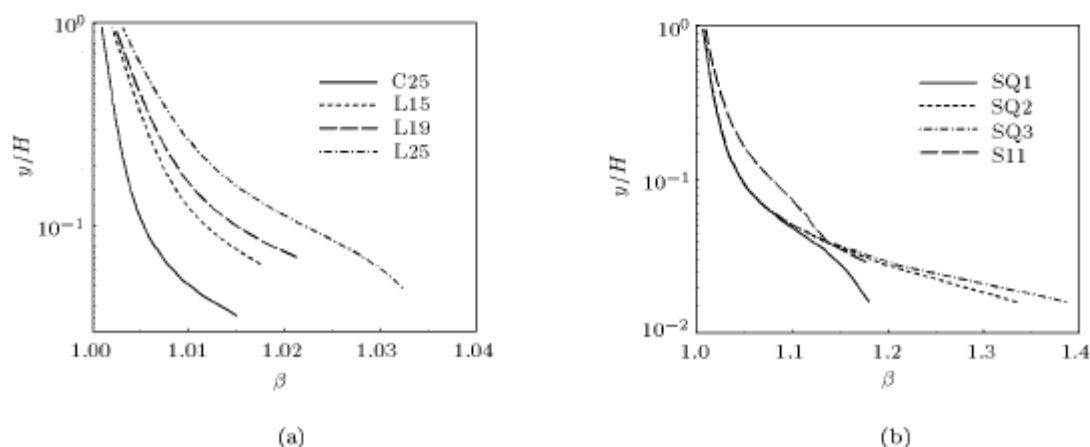


图 2 不同试验条件下 β 的垂线分布

Fig.2 Vertical distribution of β in different experiments

表 2 试验中的无量纲参数

Table 2 Dimensionless parameters in experiments

Run number	C22	C25	C30	L15	L19	L25	SQ1	SQ2	SQ3	S11
$u_*^2/gH(10^{-3})$	1.01	0.98	1.02	2.05	2.26	2.88	6.98	6.98	6.98	8.62
$d_p/H(10^{-3})$	1.24	1.26	1.25	2.33	2.92	3.67	1.88	1.88	1.88	2.06
$u_* d_p/\nu_f$	8.58	8.37	8.58	5.38	7.20	10.3	11.1	11.1	11.1	29.0
ρ_f/ρ_s	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	2.64	2.64	2.64	2.65

Lyn^[12] 试验中, 粒径 d_p 的变化是引起 β 变化的主要因素, d_p 越大, β 越大. Wang, Qian^[13] 试验中, 由于 3 个组次仅在浓度上存在差异, 不同试验组次之间的 β 变化主要由浓度引起. 较高的浓度引起颗粒沉速和水流尾流强度的变化, 使得颗粒 Stokes 数 τ_p/T_E 减小, 导致 f_p 在近壁区的正梯度减小, 增大了颗粒相脉动强度梯度对近壁区 β 的贡献. 而对于 Einstein, Chien^[14] 试验, 由于 d_p 和 u_* 均较大, 造成 β 在所有试验中为最大. 四家试验条件相比, Wang, Qian^[13] 和 Einstein, Chien^[14] 试验的 $u_* d_p/\nu_f$, u_*^2/gH 较大, 故 β 均较大.

升力和颗粒相脉动强度梯度对 β 的影响, 导致了方程 (19a) 和传统扩散方程所预测的浓度分布的差异. β 越大, 差别就越大. 但是, 决定浓度分布形状的重要参数还有颗粒静水沉速 ω_0 和颗粒浓度 $\langle C \rangle$. 在 β 相等时, ω_0 越大, 方程 (19a) 和传统扩散方程的解的差别越明显, 升力和颗粒相脉动强度梯度对浓度分布的影响就越大. 图 3~图 5 为计算的浓度分布和实测资料的比较. 图中分别给出了方程 (19a) 及其在不考虑升力与颗粒相脉动强度梯度情形下 (或传统泥沙扩散方程) 的解. 在 Coleman^[11] 试验条件下, 由于 $\beta \rightarrow 1$, 考虑升力和颗粒相脉动

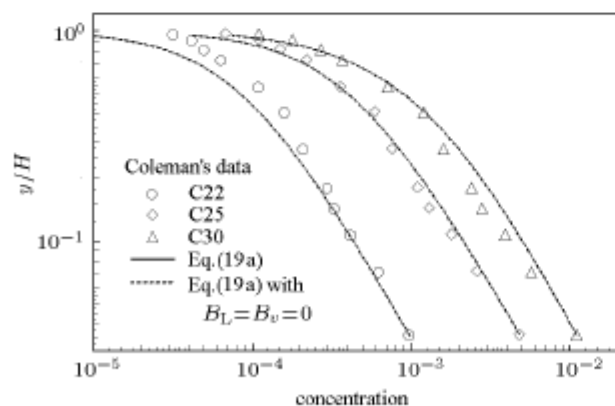
图 3 悬沙浓度垂线分布: 计算与 Coleman^[11] 数据的比较

Fig.3 Vertical profiles of suspended sediment: Comparison between the calculations and Coleman's data

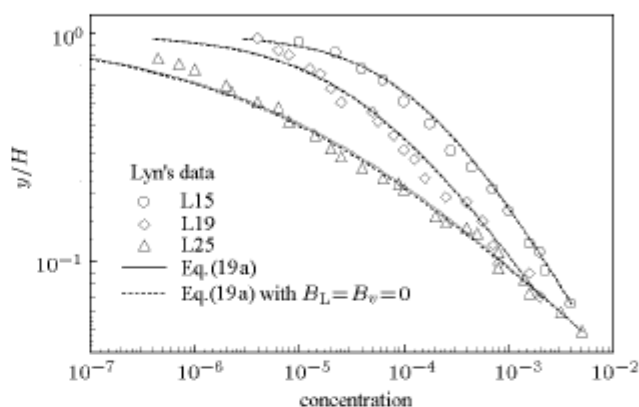
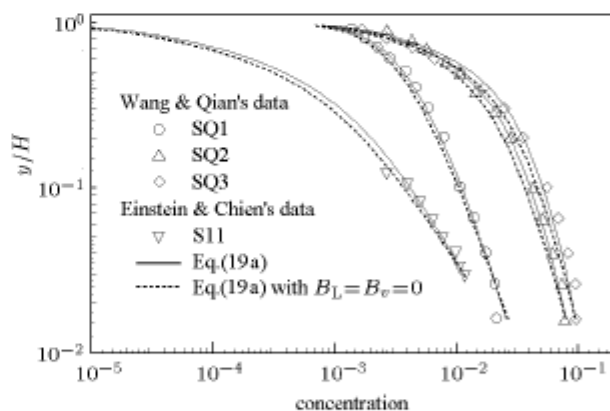
图 4 悬沙浓度垂线分布: 计算与 Lyn^[12] 数据的比较

Fig.4 Vertical profiles of suspended sediment: Comparison between the calculations and Lyn's data

图 5 悬沙浓度垂线分布: 计算与 Wang 和 Qian^[13], Einstein 和 Chien^[14] 数据的比较Fig.5 Vertical profiles of suspended sediment: Comparison between the calculations with the data of Wang & Qian^[13] and Einstein & Chien^[14]

强度梯度效应对解的影响不大, 不同条件下的解的相对差别都在 1.7% 以下. 在 Lyn^[12] 试验中, 虽然 β 也接近于 1, 但由于颗粒沉速较大而导致的浓度梯度绝对值较大, 粒径最大的 L25 组次的相对差别高达 13%, 另外两个组次在 5% 以下. 而在 Wang, Qian^[13] 和 Einstein, Chien^[14] 试验中, 方程 (19a) 与传统泥沙扩散方程的解的最大相对差异分别达到

18%(SQ3) 和 24%(S11). 由此可见, 即使对于含细颗粒的低浓度挟沙水流, 在一定流动条件下, 传统扩散方程也可能存在较为明显的误差, 需要对其进行修正.

5 结 论

从颗粒运动的 PDF 输运方程出发, 建立了新的泥沙扩散方程, 分析了水沙两相物理属性和水流条件对浓度分布特征、泥沙扩散系数的影响. 结论如下:

(1) 传统扩散方程仅包括悬沙运动的重力沉降和紊流扩散机制. 新建的泥沙扩散方程不仅反映了重力沉降和紊动扩散, 还反映了颗粒布朗运动、升力和颗粒相脉动强度梯度等影响. 布朗运动对壁面附近黏性底层的细颗粒运动起作用, 使得该处浓度分布趋向均匀. 升力和颗粒相脉动强度梯度对不同颗粒的浓度分布都有影响, 是浓度 I 型分布形成的内在机制.

(2) 细颗粒的紊动扩散系数在黏性底层以外与水流紊动扩散系数近似相等, $\beta = 1$. 根据实测浓度分布资料, 用传统扩散方程反算泥沙扩散系数 ε_s , 获得 $\beta > 1$, 原因在于忽略了升力和颗粒相脉动强度梯度的影响、过高估计了重力沉降的作用. 水沙两相物理属性和水流条件通过影响升力与颗粒相脉动强度梯度, 影响 ε_s 和 β . 径深比、沙粒雷诺数、水沙密度比和水流能坡的增大, 都将削弱重力沉降对浓度分布的影响, 增大 β 和 ε_s .

(3) 对于含细颗粒挟沙水流, β 沿垂线的分布呈现出“上小下大”的特征, 在近壁区主要受升力的影响, 在主流区以颗粒相脉动强度梯度的影响为主. 升力对 β 的贡献在近壁区较大, 并向水面迅速衰减. 颗粒相脉动强度梯度在壁面附近取正值, 使 β 减小; 离开壁面附近的区域, 颗粒相脉动强度梯度为负值, 向水面衰减较慢, 增大 β .

(4) β , 浓度和 ω_0/u_* 的大小共同决定了浓度分布的具体形状. 在 β 和 ω_0/u_* 较大、浓度较高的流动中, 升力和颗粒相脉动强度梯度对浓度分布形状的影响比较明显, 传统扩散方程带来的误差较大.

参 考 文 献

1 倪晋仁, 王光谦, 张红武. 固液两相流基本理论及其最新应用. 北

- 京: 科学出版社, 1991 (Ni Jinren, Wang Guangqian, Zhang Hongwu. Basic Theories of Solid-Liquid Two-Phase Flow and Their Recent Applications. Beijing: Science Press, 1991 (in Chinese))
- 2 钱宁, 万兆惠. 泥沙运动力学. 北京: 科学出版社, 1983 (Qian Ning, Wan Zhaohui. Mechanics of Sediment Transport. Beijing: Science Press, 1983 (in Chinese))
- 3 Van Rijn LC. Sediment transport. II: Suspended load transport. *J Hydr Engrg, ASCE*, 1984, 110(11): 1613 ~ 1641
- 4 Czernuszkenko W. Drift velocity concept for sediment-laden flows. *J Hydr Engrg, ASCE*, 1998, 124(10): 1026~1033
- 5 刘大有. 从二相流方程出发研究平衡输沙——扩散理论和泥沙扩散系数的讨论. 水利学报, 1995 (4): 62~67 (Liu Dayou. A study of sediment transport from the equations of turbulent two-phase flows—A discussion on diffusion theory and diffusion coefficient of sediment. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1995 (4): 62~67 (in Chinese))
- 6 Wang GQ, Ni JR. Kinetic theory for particle concentration distribution in two-phase flow. *Journal of Engineering Mechanics*, 1990, 116(12): 2738~2748
- 7 刘大有. 现有泥沙理论的不足和改进——扩散模型和费克定律适用性的讨论. 泥沙研究, 1996 (3): 39~45 (Liu Dayou. A comment on the defect of sediment theory—A discussion on the suitability of the diffusion model and the Fick's law. *Journal of Sediment Research*, 1996 (3): 39~45 (in Chinese))
- 8 刘大有. 关于颗粒悬浮机理和悬浮功的讨论. 力学学报, 1999, 31(6): 661~670 (Liu Dayou. Discussion on particle suspension mechanism and suspension work. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 31(6): 661~670 (in Chinese))
- 9 Derovich IV, Zaichik LI. Particle deposition from a turbulent flow. *Fluid Dyn*, 1988, 23(5): 722~729
- 10 夏震寰. 现代水力学 (III): 紊动力学. 北京: 高等教育出版社, 1992 (Xia Zhenhuan. Modern Hydraulics (III): Mechanics of Turbulence. Beijing: Chinese Higher Education Publishing House, 1992 (in Chinese))
- 11 Coleman NL. Effects of suspended sediment on the open-channel velocity distribution. *Water Resources Res*, 1986, 22(10): 1377~1384
- 12 Lyn DA. A similarity approach to turbulent sediment-laden flows in open channels. *J Fluid Mech*, 1988, 193: 1~26
- 13 Wang XK, Qian N. Turbulence characteristics of sediment-laden flow. *J Hydr Engrg, ASCE*, 1989, 115(6): 781~800
- 14 Einstein A, Chien N. Effects of heavy sediment concentration near the bed on velocity and sediment distribution. Univ of Cal, Berkeley, and US Army Corps of Engr, Missouri River Div, Rept No 8, 1955
- 15 Nezu I, Rodi W. Open-channel flow measurements with a laser Doppler anemometer. *J Hydr Engrg, ASCE*, 1986, 112(5): 335~355

ANALYSIS OF VERTICAL DISTRIBUTION OF SUSPENDED SEDIMENT USING THE PDF EQUATION METHOD¹⁾

Fu Xudong Wang Guangqian

(Key Laboratory of Water and Sediment Sciences of Ministry of Education, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract Based on the PDF transport equation for particles in turbulent sediment-laden flows, the equations of mass, momentum and second moments for particulate phase were derived. A new theoretical model for particle concentration distribution was developed for two-dimensional, steady and uniform open-channel flows. The new model takes into account the effects of the lift force and the vertical gradient of particle velocity fluctuation, as well as the effects of sediment gravitational settling and turbulent diffusion which are successfully described by the traditional sediment diffusion theory. Comparison with experimental data shows that: (1) both the Schmidt number, β , and the sediment diffusion coefficient, ε_s , given in traditional theories increase with the diameter-to-depth ratio, particle Reynolds number, the density ratio of water-to-sediment, and the energy slope; (2) β decreases vertically from bottom to top for flows with fine sediments; and (3) the traditional diffusion equation may have large errors for flows with high values of β and ω_0/u_* and high concentration.

Key words PDF equation, sediment-laden flows, sediment diffusion equation, concentration distribution, diffusion coefficient

Received 21 May 2002, revised 26 May 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (59890200), the Ministry of Water Resources of China (59890200) and the Support Program for Skeleton Staff of Tsinghua University.