

Duffing 系统随机分岔的全局分析¹⁾

贺 群^{*,**} 徐 伟^{*} 方 同^{*} 戎海武[†]

^{*}(西北工业大学数学与信息科学系, 西安 710072) ^{**}(武警工程学院, 西安 710086)

[†](佛山科技学院, 佛山 528000)

摘要 应用广义胞映射方法研究了在谐和与随机噪声联合作用下的 Duffing 系统的随机分岔现象. 对于随机 Duffing 系统, 以吸引子形态的突然变化, 描述一类随机分岔现象. 数值结果表明, 随着随机激励强度的逐渐增大, 当随机激励强度通过临界值时, 随机系统的吸引子与其吸引域边界 (吸引域) 上的鞍碰撞, 发生分岔现象. 比较结果表明, 在同样的参数区域内, Lyapunov 指数均为负值, 也就是说, 在 Lyapunov 指数意义下, 无法发现这种随机分岔现象.

关键词 随机分岔, 广义胞映射, 全局分析

引 言

近年来, 人们非常关注随机动力系统的分岔行为的研究^[1~12], 特别是受随机扰动的典型动力系统的分岔行为. 如何合理地描述随机分岔现象, 一直是工程和科学领域许多学者研究的内容和主题. 目前的描述主要是对局部分析提出的, 适合于遍历系统. 主要分为两大类, 一类是基于系统的稳态概率密度形状, 随参数的变化突然发生变化给出的定义, 例如从单峰突然变为双峰, 这类定义称为 P -分岔; 另一类是基于系统的最大 Lyapunov 指数随参数的符号变化给出的定义, 这类定义称为 D -分岔. 研究表明, 这两类定义给出的结果并不完全相同. 由于在动力系统中有随机干扰, 特别是噪声干扰的情形是比较普遍存在的现象. 因此, 研究随机分岔问题是具有实际意义的课题, 给出合适的随机分岔的描述, 无疑是具有理论价值和实际意义的. 本文试图在这一方面做一尝试, 对于 Duffing 系统, 提出以吸引子形态的突然变化来描述一类随机分岔现象.

广义胞映射方法是进行系统的全局分析的有力工具, 特别适合进行系统的相空间分析和吸引子分析. Hsu^[13] 对于动力系统, 提出广义胞映射方法 (GCM), Tongue 和 Gu^[14] 提出插值胞映射 (ICM), Guder 和 Kreuzer^[15] 提出 GCM 的自适应方法和自适应细化方法, Hsu^[16] 研究了广义胞映射图论方法, 徐健学, 洪灵^[17] 进一步研究了广义胞映射图论方法及其在激变现象研究中的应用. 值得指出的是

Sun^[18~20] 发表系列论文, 用广义胞映射方法研究了非线性随机系统的动力学行为, 做出了重要贡献. 但他的研究未涉及随机和谐和联合作用的系统, 没有讨论不稳定解的作用, 没有涉及随机分岔.

广义胞映射的图论方法除了可以确定吸引子、吸引域和边界外, 还可以确定状态空间不稳定 (非吸引) 的不变集, 称为鞍. 本文借助于这一方法, 对谐和与随机噪声联合作用下的 Duffing 系统进行了随机分岔分析, 分析计算研究表明, 在随机激励参数的一定范围内, 当随机激励参数逐渐增大时, 随机系统的吸引子逐渐变大, 并且逐渐向不稳定解 (鞍) 方向伸展, 当随机激励参数通过临界值时, 这个吸引子连同它的吸引域突然消失, 鞍也同时突然变大; 当随机激励参数进一步增大, 随机激励参数通过另一个临界值时, 另一个吸引子与鞍碰撞, 这个吸引子突然变大, 鞍突然消失. 从图中可以看出, 这两个突然变化, 均是当参数通过分岔临界值时, 吸引子碰撞鞍产生的. 本文的吸引子、吸引域、边界和鞍的定义均指对应的胞映射动力系统的相关概念, 胞映射动力系统相关概念的定义参见 Hsu^[16]. Arnold^[21] 对随机吸引子和随机吸引域给出了定义, Guder 和 Kreuzer^[22] 证明了胞映射动力系统的吸引子和吸引域收敛于原系统的吸引子和吸引域.

1 随机分岔与广义胞映射的方法

对于随机分岔的研究, Arnold^[1], Meunier^[3] 研

2002-05-18 收到第一稿, 2003-03-19 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10072049).

究了在噪声干扰下的叉形分岔和鞍结分岔后,认为稳态概率密度的形状变化与随机干扰的变化联系并不密切。这种基于稳态概率密度形状变化的定义,有时很难说明系统的拓扑性质,在噪声干扰下是否发生了真正意义上的变化,即分岔。对于基于系统的最大 Lyapunov 指数随参数的符号变化给出的随机分岔定义,也有它的明显不足,其一,它要求系统满足乘法遍历性定理,即有很强的遍历性要求,其二,最大 Lyapunov 指数的计算仍是一个未解决的问题,目前虽然有一些算法^[23],但并不理想,这直接影响到最大 Lyapunov 指数是否为零的判断。这两类定义,均要求系统具有遍历性,而许多系统不满足这一要求,仅能进行局部分析。目前的文献,主要以平均方法进行讨论,通过平均方程的研究,得出原系统的有关结论,但对于许多系统,特别是一类非自治系统,平均方程与原系统的等价性无法保证,这时得出的关于平均方程的有关结论多少能反映原系统的性态,让人产生怀疑。此外,一般的数值计算,采用的是点映射方法,总要进行人为的有限步截断,这在许多讨论中,使得我们对于何时达到稳态产生异议,多少步可以认为是达到了最终的稳态,这对于稳态概率密度的讨论,对于随机跃迁的讨论至关重要。

综上所述,对于随机分岔的讨论,仍然存在许多困难和问题,既要表征系统轨线的拓扑性质,又要体现系统的随机特性,确实很困难。作者认为随机分岔描述的关键是如何表征随机系统的拓扑性质,找到随机系统的合适的相对不变量。同确定性系统的分岔描述一样,目前要给出非常一般的定义是很困难的,一种定义很难包括各种各样的情况。本文对于随机 Duffing 系统,提出以吸引子(包括不稳定解)的形态(包括大小、尺寸、周期等)的突然变化来表征随机系统的拓扑性质变化。

一般来说,系统的稳态运动可以用系统的吸引子及其相关形态来充分描述。利用吸引子(包括不稳定解)的形态来表征一个随机系统,这是因为它们既包含了系统的轨线性质又包含了系统的随机性质,进而以它们来表征随机系统的不变量,用它们进行系统随机分岔的全局分析是合适的。对于一类谐和激励作用的系统,可能会有多个稳态解,每个稳态解对应于相平面上的具有特定吸引域的一个吸引子,即对应系统的一种稳态运动。如果系统还存在随机激励,当随机激励强度通过某一临界值时,系统的全局特性可能发生根本变化,有可能使得某个吸引

子及其它的吸引域突然丧失,从而导致系统以另一种稳态形式运动,即发生了随机分岔。以往的随机分岔定义和研究方法,对于这一类系统几乎无法讨论。此外,直接的数值模拟需要计算轨道的长期行为,非常花费时间,而且总是有限步截断。借助于广义胞映射方法,结合上述的定义,可以有效地对随机系统进行全局分析,而且根据广义胞映射方法的性质,一步转移矩阵决定了最终性质,是无时间截断的,这对于最终稳态性质的讨论非常重要。它克服了以往数值分析方法有限步截断的不足。

胞映射的基本思想是把动力系统的状态空间离散化为大量状态胞的集合,用胞映射来描述原系统的动力学行为。Hsu 提出两类胞映射方法,一种称为简单胞映射(SCM),另一种称为广义胞映射(GCM)。广义胞映射与简单胞映射相比,每个胞可以具有多个象胞。广义胞映射方法将原动力系统对应于一个胞映射动力系统。对于一个胞映射动力系统的分析方法可分为两个发展阶段,在早期的分析过程中,Hsu 将胞映射动力系统等价于一个马尔可夫链。采用马尔可夫链的分析方法对相应的胞映射动力系统进行分析,这种分析方法可以计算出相应动力系统的吸引子和吸引域,边界集合,确定吸引子的极限概率分布,以及奇怪吸引子的空间概率特征。1992年,Hsu 对上述方法进一步改进,发现瞬态过程中有着规律性的精细层次结构。广义胞映射动力系统等价于一个马尔可夫链,其概率矢量在胞空间上的传播直接给出了系统的演化过程,所以广义胞映射是研究随机动力系统自然而有力的工具。第二阶段从1995年开始,Hsu 在以前的分析方法的基础上,借助于图论方法,对胞映射动力系统的分析方法进一步发展,突出了对系统的拓扑特性的分析。对于胞映射系统,将每个胞对应于一个有向图的顶点,如果两个胞之间存在一步可达关系,则相应的顶点之间存在一条有向边。因而胞映射动力系统就完全等价于一个有向图。进而,对一个胞映射动力系统的分析就变为对一个有向图的分析。在对有向图进行分析时,可以得到图的强连通子图,强连通子图是指有向图顶点集的一个子集合,该子集合中的任何两个顶点相互可达。强连通子图对应的是相应动力系统的稳定和不稳定解集,即系统的吸引子和鞍。而不稳定解集(鞍)是其他方法不易得到的。当有向图的某一顶点不属于强连通子图时,则其对应的胞称瞬胞。如果一个瞬胞可达某一永久自循环胞(闭的强连通子图)时,则称这个永久自循环胞为这个瞬胞

的一个驻处. 一个瞬胞可以有多个驻处, 按照瞬胞所具有的驻处的数目, 瞬胞被分为单驻处瞬胞和多驻处瞬胞, 仅具有一个驻处的瞬胞称为单驻处瞬胞, 具有多于一个驻处的瞬胞称为多驻处瞬胞. 单驻处瞬胞对应于吸引子的吸引域, 多驻处瞬胞对应于吸引域的边界.

2 谐和激励和随机激励共同作用下的 Duffing 系统与随机分岔

考虑如下谐和激励和随机激励共同作用下的 Duffing 系统

$$\alpha \ddot{x} + \beta \dot{x} + \delta x + \gamma x^3 = \eta \cos(\omega t) + \sigma \xi(t) \quad (1)$$

这里 $\xi(t)$ 表示标准高斯噪声, $\alpha = 2.56$, $\beta = 0.32$, $\delta = 1.0$, $\gamma = 0.05$, $\eta = 2.5$, $\omega = 1.05$. 用广义胞映射研究系统 (1), 即用广义胞映射来描述系统 (1) 的动力学行为. 取感兴趣的区域为

$$D = \{-12 \leq x \leq 12, -12 \leq \dot{x} \leq 12\}$$

对该区域构造胞映射, 区域以内的为正规胞, 区域

以外的所有胞看作一个胞, 称为陷胞. 把区域分为 $200 \times 200 + 1$ 个胞, 对于每个胞, 取 15×15 个均匀分布的内点. 对于每个内点产生 50 个随机样本, 运用 6 阶龙格 - 库塔方法, 求每个点所映射到的胞, 从而在庞加莱截面上确定每个胞的象胞, 则对每个胞有 $15 \times 15 \times 50 = 11250$ 个轨线出发来确定其象胞. 广义胞映射方法是否能成功地用于随机系统, 其关键是算法的有效实现. 本文的广义胞映射方法的实现参见 Hsu^[16].

当 $\sigma = 0.0$ 时, 即仅存在谐和激励时, 由图 1 可见, 除去陷胞的影响, 系统 (1) 有两个永久自循环胞集 (吸引子); 一个瞬态自循环胞集 (鞍); 两个单驻处瞬胞集 (吸引域) 和一个多驻处瞬胞集 (边界). 考虑随机参数 σ 的变化对随机系统全局特性产生的影响. 随着随机参数 σ 的增大, 吸引子及其吸引域的边界上的鞍变大, 图 2 给出当 $\sigma = 0.01$ 时的全局图. 随着随机参数 σ 的逐渐增大, 其中的一个吸引子逐渐伸向边界上的鞍, 见图 3 ($\sigma = 0.018$), 图 4 ($\sigma = 0.021$), 这时吸引子的指端即将接触边界上的鞍点. 当随机参数 σ 从 0.021 变到 0.022 时, 这个吸

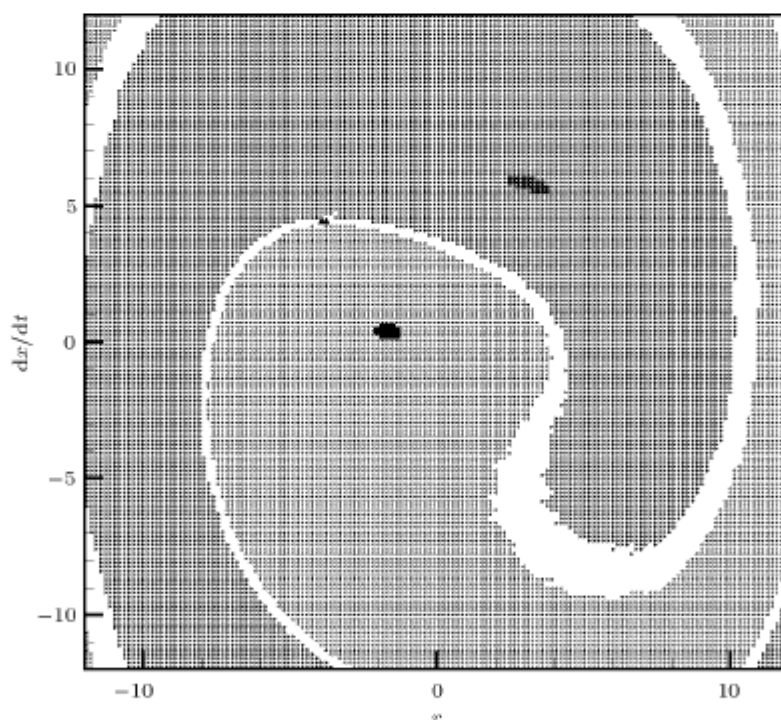
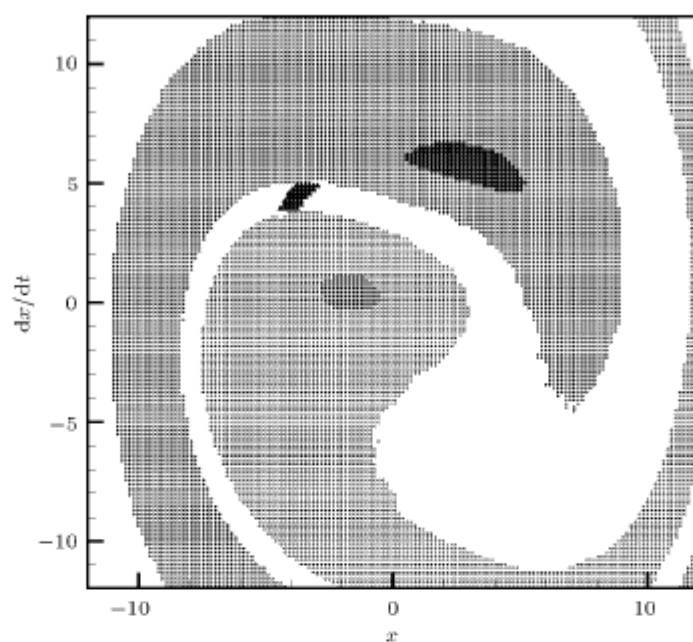
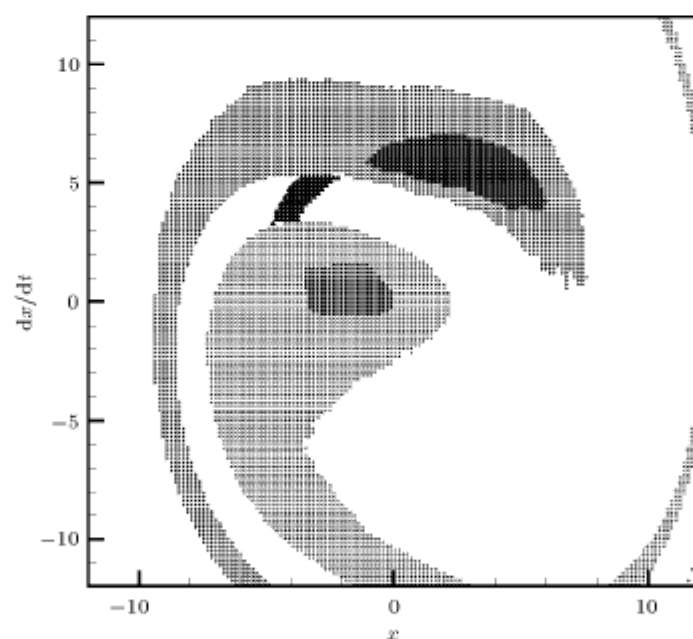


图 1 系统在 $\sigma = 0.0$ 时的吸引子、吸引域和鞍

图 1~图 8 中, 吸引子 I 的标记符号为 “●”; 它的吸引域标记符号为 “>”; 吸引子 II 的标记符号为 “■”; 它的吸引域标记符号为 “<”; 鞍的标记符号为 “▲”; 吸引域的边界用空白表示

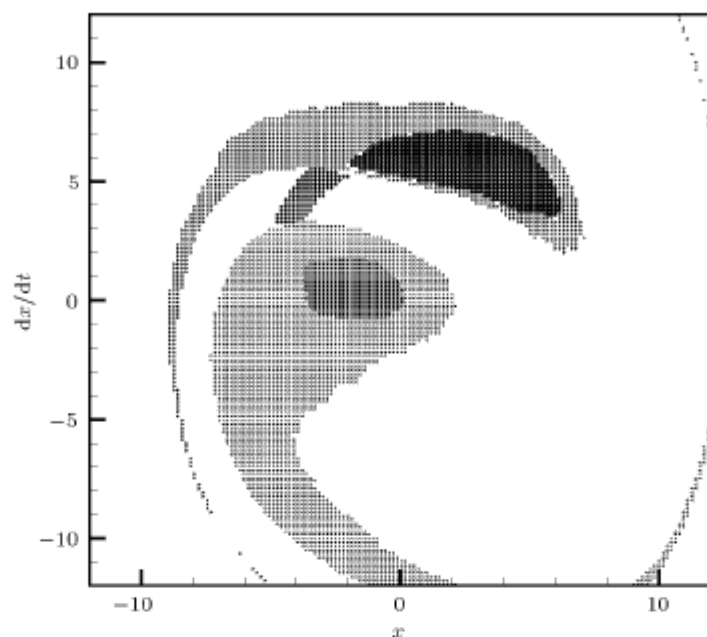
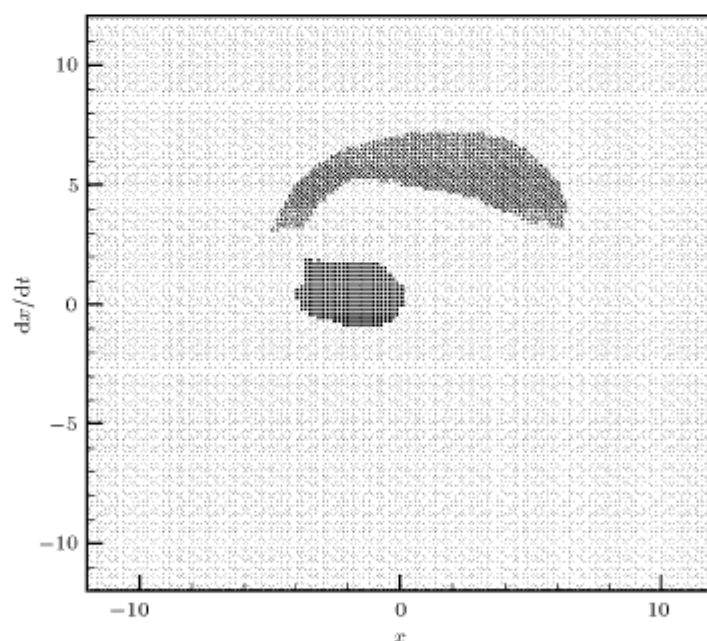
Fig.1 The attractor, basins of attractor and the saddle for the (1) with $\sigma = 0.0$

Fig.1 to Fig.8, ● — attractor I; > — the basin of attractor I; ■ — attractor II; < — the basin of attractor II; ▲ — the saddle; blank space — the basin boundary of attraction

图 2 系统在 $\sigma = 0.01$ 时的吸引子、吸引域和鞍Fig.2 The attractor, basins of attractor and the saddle for the (1) with $\sigma = 0.01$ 图 3 系统在 $\sigma = 0.018$ 时的吸引子、吸引域和鞍Fig.3 The attractor, basins of attractor and the saddle for the (1) with $\sigma = 0.018$

引子与在吸引域边界上的鞍发生碰撞, 导致这个吸引子连同它的吸引域突然消失, 在相空间原吸引子的位置留下一个鞍, 见图 5($\sigma = 0.022$), 此时, 在所关心的区域, 仅有一个吸引子, 也就是说, 当系统随

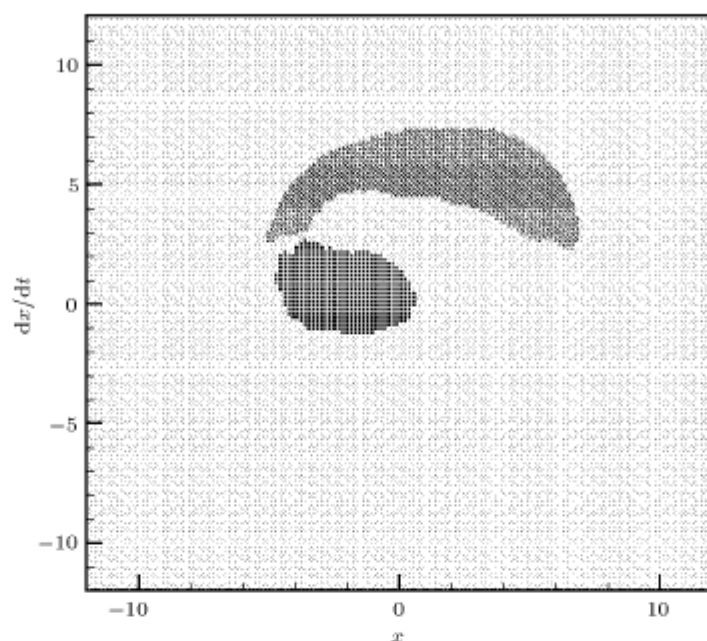
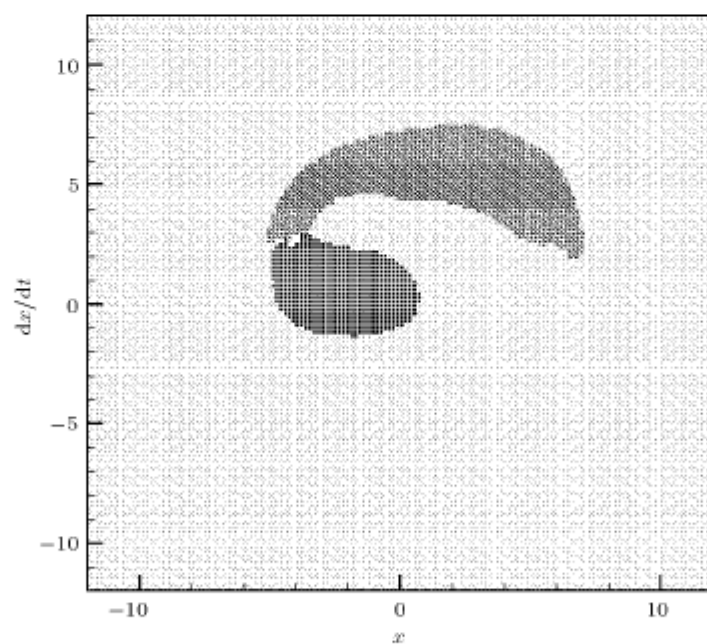
机参数 σ 从 0.021 变到 0.022 时, 系统发生随机分岔, 吸引子的数目由两个变为一个, 吸引子的形状发生了突然变化, 其中的一个吸引子变为鞍, 即稳定集变为不稳定集.

图 4 系统在 $\sigma = 0.021$ 时的吸引子、吸引域和鞍Fig.4 The attractor, basins of attractor and the saddle for the (1) with $\sigma = 0.021$ 图 5 系统在 $\sigma = 0.022$ 时的吸引子和吸引域Fig.5 The attractor, basins of attractor and the saddle for the (1) with $\sigma = 0.022$

随着随机激励参数 σ 的进一步增大, 鞍逐渐变大, 并向另一个吸引子伸展, 见图 6 ($\sigma = 0.03$), 图 7 ($\sigma = 0.032$). 当随机激励参数 σ 由 0.032 变到 0.033 时, 这个吸引子与鞍相碰撞, 合二为一, 突然形成一个大的吸引子, 见图 8 ($\sigma = 0.033$), 即吸引子的形状

突然发生变化, 被认为发生了随机分岔. 此时, 鞍变为吸引子, 即不稳定集变为稳定集. 表 1 给出了系统的吸引子, 吸引域, 鞍的胞随参数变化而变化的情况.

为了同 Lyapunov 指数意义下的分岔讨论相比

图 6 系统在 $\sigma = 0.03$ 时的吸引子和吸引域Fig.6 The attractor, basins of attractor and the saddle for the (1) with $\sigma = 0.03$ 图 7 系统在 $\sigma = 0.032$ 时的吸引子和吸引域Fig.7 The attractor, basins of attractor and the saddle for the (1) with $\sigma = 0.032$

较, 下面采用 Wolf^[11] 算法计算系统的 Lyapunov 指数, 分别采用初值为 $x(0) = 0.0$, $\dot{x}(0) = 0.0$ 和 $x(0) = 0.0$, $\dot{x}(0) = 8.0$. 结果见表 2 和表 3, 表中 $\lambda_i (i = 1, 2)$ 表示 Lyapunov 指数. 计算结果表明, 当

参数 σ 从 0.019 变到 0.034 时, Lyapunov 指数均为负值. 也就是说在 Lyapunov 指数意义下, 无法发现上述分岔现象.

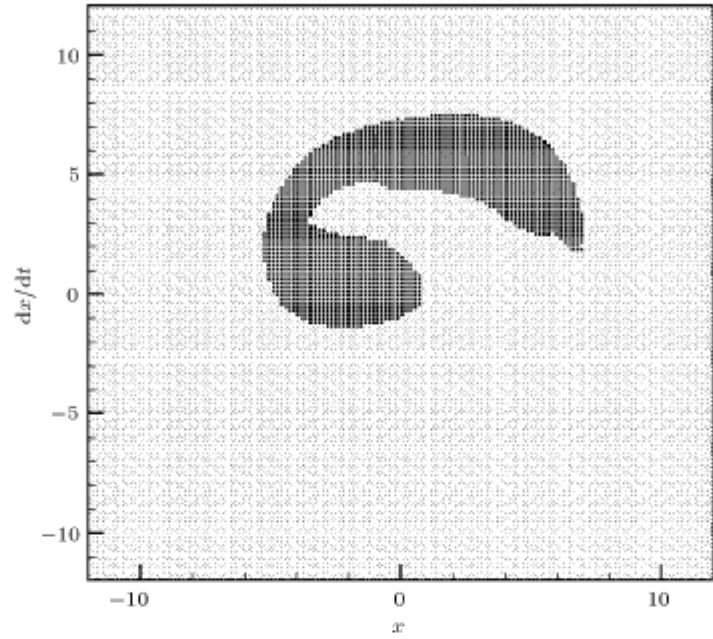


图 8 系统在 $\sigma = 0.033$ 时的吸引子
Fig.8 The attractor for the (1) with $\sigma = 0.033$

表 1 随参数 σ 的变化吸引子、吸引域和鞍的胞数目的变化

Table 1 The number of the attractor, the basins of attractor, and the saddle

σ	attractor I	basin of attractor I	attractor II	basin of attractor II	saddle
0.000	25	13 347	12	19 490	2
0.010	231	8 309	111	11 324	38
0.018	501	3 337	262	4 236	93
0.020	605	2 014	295	3 615	110
0.021	639	1 288	321	3 238	125
0.022	0	0	369	36 582	924
0.030	0	0	623	35 746	1 277
0.032	0	0	718	35 473	1 393
0.033	0	0	2 208	35 358	0

表 2 随参数 σ 的变化 Lyapunov 指数的平均值和标准差值 ($x(0) = 0.0, \dot{x}(0) = 0.0$)

Table 2 The means and STD of Lyapunov exponents ($x(0) = 0.0, \dot{x}(0) = 0.0$)

σ	the mean of λ_1	STD of λ_1	the mean of λ_2	STD of λ_2	σ	the mean of λ_1	STD of λ_1	the mean of λ_2	STD of λ_2
0.019	-0.090 3	0.001 2	-0.090 3	0.000 9	0.027	-0.090 4	0.001 6	-0.090 5	0.001 3
0.020	-0.090 3	0.001 2	-0.090 3	0.000 9	0.028	-0.090 3	0.001 8	-0.090 5	0.001 3
0.021	-0.090 2	0.001 3	-0.090 3	0.001 0	0.029	-0.090 4	0.001 8	-0.090 5	0.001 4
0.022	-0.090 4	0.001 3	-0.090 4	0.000 9	0.030	-0.090 3	0.001 8	-0.090 6	0.001 5
0.023	-0.090 3	0.001 4	-0.090 4	0.001 1	0.031	-0.090 4	0.001 9	-0.090 7	0.001 5
0.024	-0.090 4	0.001 5	-0.090 3	0.001 2	0.032	-0.090 3	0.002 0	-0.090 7	0.001 6
0.025	-0.090 3	0.001 5	-0.090 4	0.001 1	0.033	-0.090 5	0.002 0	-0.090 7	0.001 6
0.026	-0.090 3	0.001 6	-0.090 5	0.001 2	0.034	-0.090 4	0.002 1	-0.090 8	0.001 7

表 3 随参数 σ 的变化 Lyapunov 指数的平均值和标准差值 ($x(0) = 0.0, \dot{x}(0) = 8.0$)Table 3 The means and STD of Lyapunov exponents ($x(0) = 0.0, \dot{x}(0) = 8.0$)

σ	the mean of λ_1	STD of λ_1	the mean of λ_2	STD of λ_2	σ	the mean of λ_1	STD of λ_1	the mean of λ_2	STD of λ_2
0.019	-0.090 9	0.0025	-0.089 7	0.0022	0.027	-0.089 9	0.0033	-0.091 0	0.003 1
0.020	-0.090 9	0.0025	-0.089 7	0.0024	0.028	-0.089 7	0.0032	-0.091 1	0.0032
0.021	-0.090 7	0.0028	-0.090 0	0.0026	0.029	-0.089 7	0.0035	-0.091 3	0.0032
0.022	-0.090 4	0.0029	-0.090 3	0.0027	0.030	-0.089 4	0.0035	-0.091 6	0.0034
0.023	-0.090 4	0.0029	-0.090 3	0.0028	0.031	-0.089 3	0.0035	-0.091 7	0.0033
0.024	-0.090 4	0.0030	-0.090 4	0.0028	0.032	-0.089 0	0.0038	-0.092 0	0.0037
0.025	-0.090 2	0.0030	-0.090 6	0.0030	0.033	-0.089 1	0.0038	-0.091 9	0.0036
0.026	-0.090 0	0.0032	-0.090 9	0.0030	0.034	-0.088 6	0.0038	-0.091 9	0.0037

3 结 论

对于谐和激励和随机激励共同作用下的 Duffing 系统, 讨论了全局随机分岔现象. 证实了随机分岔是由于吸引子与鞍相碰撞产生的, 当随机激励参数通过临界值时, 这个吸引子连同它的吸引域突然消失, 在原来这个吸引子的位置上留下了一个鞍, 这个稳定集变为不稳定集; 当随机激励参数进一步增大, 通过另一个临界值时, 另一个吸引子与这个鞍碰撞, 鞍突然消失, 这个吸引子突然变大, 不稳定集变为稳定集. 同 Lyapunov 指数意义下的分岔讨论进行了比较研究, 数值计算结果表明, Lyapunov 指数在对应的参数区域内均为负值, 无法发现上述的分岔现象.

参 考 文 献

- 1 Arnold L. Random Dynamical Systems. Springer, 1998
- 2 To CW, Li DM. Degenerated Hopf bifurcations in a stochastically distured non-linear system. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 219(2): 359~369
- 3 Meunier C, Verga AD. Noise and bifurcation. *Journal of Statistical Physics*, 1988, 50(2): 345~375
- 4 Leung HK. Stochastic Hopf bifurcation in a biased van der Pol model. *Physical A*, 1998, 254 (1): 146~155
- 5 Namachchivaya NS. Stochastic bifurcation. *Applied Mathematics and Computation*, 1990, 38 (2): 101~159
- 6 Ariaratnam ST. Some illustrative examples of stochastic bifurcation. In: Thompson JMT, Bishop SR, eds. *Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics* (IUTAM Symposium 1994), New York: Wiley, 1994. 267~274
- 7 Schenk-Hoppe KR. Bifurcation scenarios of the noisy Duffing-van der Pol oscillator. *Nonlinear Dynamics*, 1996, 11: 255~274
- 8 Crauel H, Flandoli F. Additive noise destroys a pitchfork bifurcation. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 1998, 10: 259~274
- 9 Xu Kedai. Bifurcation of random differential equations in dimensions one. *Random and Computational Dynamics*, 1993, 1: 277~305

- 10 Zhu WQ, Huang ZL. Stochastic Hopf bifurcation of quasi-non-integrable-Hamiltonian systems. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 1999, 34: 437~447
- 11 Zhu WQ, Lu MQ, Wu QT. Stochastic jump and bifurcation of a Duffing oscillator under narrow-band excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 1993 165: 285~304
- 12 Roy RV. Noise-induced transitions in weakly nonlinear oscillators near resonance. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1995, 62: 496~504
- 13 Hsu CS. A generalized theory of cell to cell mapping for nonlinear dynamical systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1981, 53: 695~701
- 14 Tongue BH, Gu KQ. A higher order method of interpolated cell mapping. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 125: 169~179
- 15 Guder R, Kreuzer E. Control of an adaptive refinement technique of generalized cell mapping by system dynamics. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 20(1): 21~32
- 16 Hsu CS. Global analysis of dynamical systems using posets and digraphs. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1995, 5(4): 1085~1118
- 17 Ling Hong, Jianxue Xu. Crises and chaotic transient by the generalized cell mapping digraph method. *Phys Lett A*, 1999, 262: 361~375
- 18 Sun JQ. A nonuniform cell partition for the analysis of nonlinear stochastic system. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1998, 65(4): 867~869
- 19 Sun JQ. Rand vibration analysis of a non-linear system with dry friction damping by the short-time gaussian cell mapping method. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 180(5): 785~795
- 20 Sun JQ, Hsu CS. The generalized cell mapping method in nonlinear random vibration based upon short-time gaussian approximation. *Journal of Applied Mechanics*, 1990, 57: 1018~1025
- 21 Arnold L, Schmaifub B. Fixed points and attractors for random dynamical systems. In: Naess A, Krenk S, eds. *IUTAM Symposium on Advances in Nonlinear Stochastic Mechanics*, Dordrecht: Kluwer, 1996. 19~28
- 22 Guder R, Kreuzer E. Using generalized cell mapping to approximate invariant measures on compact manifolds. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1997, 7: 2487~2499

GLOBAL ANALYSIS OF STOCHASTIC BIFURCATION FOR DUFFING SYSTEMS¹⁾

He Qun^{*,**} Xu Wei^{*} Fang Tong^{*} Rong Haiwu[†]

^{*}(Department of Mathematics and Information Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

^{**}(Engineering College of Armed Police Force, Xi'an 710087, China)

[†](Foshan University, Foshan 528000, China)

Abstract Since random disturbance or noise always exists in a physical system, the influence of random disturbance on the dynamical behavior, especially bifurcation phenomena of a nonlinear dynamical system has attracted much attention by many researchers. However, the theory of stochastic bifurcation is still in its infancy. In fact, it is much more harder to deal with stochastic bifurcation problems than to deal with deterministic bifurcation problems. The definition of deterministic bifurcation can be based upon the sudden change of topological properties of the portrait of phase trajectories. At present, there are mainly two kinds of definitions for stochastic bifurcation available. One is based on the sudden change of shape of the stationary probability density function—the so-called *P*-bifurcation (Arnold, 1998); and the other is based on the sudden change of sign of the largest Lyapunov exponent—the so-called *D*-bifurcation (Arnold, 1998). Lack of certain relationship between the shape variation of the stationary probability density function of the random response and the quantitative variation of the random excitation is the difficulty encountered by *P*-bifurcation. Lack of efficient and accurate algorithm for calculating Lyapunov exponent is the difficulty encountered by *D*-bifurcation. Besides, several studies have shown that sometimes these two kinds of definitions may lead to different results (Baxendale, 1986, Meunier et al., 1988, Craud et al., 1998, Arnold, 1998). For instance, Baxendale (1986) provided an example in which the shape of stationary probability density does not depend on the bifurcation parameter, while the largest Lyapunov exponent changes its sign. On the contrary, Crauel and Flandoli (1998) presented an example in which the stationary probability density function does change its shape from mono-peak one into double-peak one at a critical parameter value, while the largest Lyapunov exponent does not change its sign. Thus, one cannot help thinking about what is really happened for stochastic bifurcation, what is the topological property of a stochastic system, what kind of invariance is suitable for predicting stochastic bifurcation, and so on.

Stochastic bifurcation of a Duffing system subject to a combination of a deterministic harmonic excitation and a white noise excitation is studied in detail by the generalized cell mapping method using digraph. It is found that under certain conditions there exist two stable invariant sets in the phase space, associated with the randomly perturbed steady-state motions, which may be called stochastic attractors. Each attractor owns its attractive basin, and the attractive basins are separated by boundaries. Along with attractors there also exists an unstable invariant set, which might be called a stochastic saddle as well, and stochastic bifurcation always occurs when a stochastic attractor collides with a stochastic saddle. As an alternative definition, stochastic bifurcation may be defined as a sudden change in character of a stochastic attractor when the bifurcation parameter of the system passes through a critical value. This definition applies equally well either to randomly perturbed motions, or to purely deterministic motions. This study reveals that the generalized cell mapping method with digraph is also a powerful tool for global analysis of stochastic bifurcation. By this global analysis the mechanism of development, occurrence, and evolution of stochastic bifurcation can be explored clearly and vividly.

Key words stochastic bifurcation, the generalized cell mapping, global analyses

Received 18 May 2002, revised 19 March 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10072049).