

伸缩虚拟边界元法解二维 Helmholtz 外问题¹⁾

向 宇 黄玉盈

(华中科技大学土木工程与力学学院, 武汉 430074)

摘要 以位势理论为基础, 提出了求解 Helmholtz 外问题的伸缩虚拟边界元法, 给出了该方法在全波数域内获得唯一解的严格数学证明, 其核心是通过伸缩虚拟边界使对偶内问题的特征频率 (本征值) 避开与波数重合, 从而保证了解的唯一性, 同以往前人提出的几种解法途径相比, 该法简单得多; 通过诸多边界曲线形状和不同边界量的声辐射算例, 从计算精度、稳定性以及克服解的非唯一性等方面, 对该方法进行了检验. 计算结果表明: 对远场或近场辐射声压, 该方法都具有非常高的效率和精度.

关键词 Helmholtz 外问题, 唯一性, 边界积分方程, 伸缩虚拟边界元法, 声辐射

引 言

在研究可压缩流体与结构相互作用的声辐射和散射等问题中, 一个很重要的课题就是求解谐和声场的 Helmholtz 外问题. 边界积分方程 (BIE) 或边界元法 (BEM) 由于具有降维、特别适合解无限域问题以及远场计算精度高等特点, 在结构声辐射和散射问题中得到了广泛应用. 对于由一个简单闭合曲面 (曲线) 所包围的内域, 当前的多种边界积分方程都与 Helmholtz 方程的边值问题 (内问题) 等价, 但对于简单闭合曲面 (曲线) 外的无限域, 现有不少边界积分方程与原边值问题 (外问题) 不完全等价^[1,2]. 由 Kirchhoff 边界积分方程描述的 Helmholtz 外问题就是其中的一个, 这纯粹是一个数学问题. 因此, 当采用这些与原边值问题不完全等价的边界积分方程求解时, 会出现在某些激励波数 (与相应内问题的特征波数 (本征值) 重合) 时不能获得唯一解, 这种现象不是实际问题所固有的 (原边值外问题的解是存在的、唯一的且是无条件的), 而是由于采用了不等价边界积分方程所带来的.

为解决 Kirchhoff 边界积分方程在特征频率 (本征值) 处解的非唯一性问题, 目前已提出了多种方法, 其中最具代表性的是下列三种方法: (1) Schenck^[3] 提出的 CHIEF 法, 该方法是通过在内域中选取若干个点 (CHIEF 点) 而形成内点积分方程作为补充方程, 与边界积分方程联立形成超定方程组, 然后在最小二乘意义下求得问题的唯一解. 但由

于缺乏有效选择内点 (CHIEF 点) 的方法和稳定性极限分析的理论依据, 阻碍了 CHIEF 法的广泛应用.

(2) Burton-Miller 法^[4], 由 Burton, Miller 提出的 Burton-Miller 法是将常规边界积分方程与其对边界法向求导后的边界积分方程进行线性组合形成新的边界积分方程, 解决了特征频率 (本征值) 处解的非唯一性问题. 但由于法向求导增加了积分核的奇异性, 数据积分处理十分繁杂, 而线性组合系数的选取对计算结果也有较大影响. (3) 采用新的 Green 函数代替常规边界积分方程中的基本解^[5], 该方法的关键点是在相应内问题的定解条件下用模态展开法求取新的 Green 函数, 但由于新 Green 函数的求和项数与特征频率 (本征值) 间存在某种关联关系, 实际应用时如何正确选取新 Green 函数的求和项数, 是一个有待解决的问题.

1984 年, Burgess 和 Mahajerin 等人首先根据叠加原理, 在求解问题的域外随意选择一些离散点, 并在其上配置未知的虚拟集中力 (虚拟源强), 再利用弹性力学拉梅 (Lame) 方程的 Kelvin 解, 提出了求解弹性力学问题的叠加法^[6]. 上世纪 90 年代以后, 国内孙焕纯等人发展了这一方法, 并将虚拟集中力 (虚拟源强) 连续配置在域外的某一虚拟边界上, 克服了 Burgess 等人提出的叠加法在虚拟源强配置点如何选择以及系统矩阵可能病态等方面出现的不足, 并已成功应用于解弹性力学问题^[7], 薄板弯曲的静、动力问题^[8]等. 在他们的文章中将该方法称为虚边界元法. 通过大量研究表明: 当选择虚拟边界

2001-10-30 收到第一稿, 2003-03-13 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10172038).

与真实问题的边界相似, 并相距一定距离时, 该方法具有较高的计算精度和稳定性. 文献 [9] 用虚边界元法求解了 Laplace(Poisson) 内问题, 文中在解的唯一性问题上几乎没有涉及. 然而, 在用边界积分方程解 Helmholtz 外问题时, 解的唯一性却是该方法成功与否的关键^[1~5]. 在讨论如柱型壳的声振特性时, 常需对纵向坐标域和波数域进行 Fourier 积分变换和数值逆变换^[10]. 因此, 精确、高效率地在全波数域内求解 Helmholtz 外问题具有非常重要的意义. 本文从 Helmholtz 方程的位势理论出发, 提出求解 Helmholtz 外问题的伸缩虚边界元法, 并以二维情况为例就该方法在计算精度、稳定性, 尤其是在对偶内问题的特征频率处能否克服解的非唯一性问题进行了探讨.

1 Helmholtz 外问题的虚拟边界积分方程

考虑一任意封闭曲线 Γ , 将全平面分隔为外域 Ω 和内域 Ω^c , 外域的外法线方向为 $\mathbf{n}$, 如图 1 所示. 由 Green 恒等式容易导出 Kirchhoff 积分公式 (不计体积声源)

$$-\alpha(Q)\phi(Q) = \int_{\Gamma} \phi(P) \frac{\partial \phi^*(Q, P)}{\partial n_P} d\Gamma(P) - \int_{\Gamma} \phi^*(Q, P) \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} d\Gamma(P) \quad (1)$$

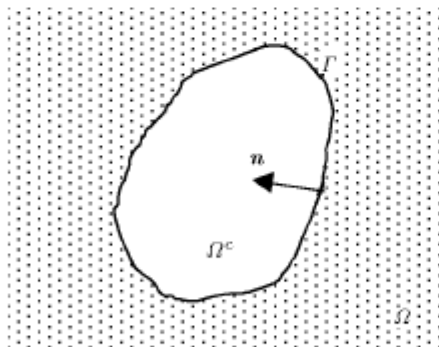


图 1 任意形状空穴

Fig.1 Cavity with arbitrary shape

二维 Helmholtz 方程的基本解是

$$\begin{aligned} \phi^*(Q, P) &= -\frac{j}{4} \cdot H_0^{(2)}(kr) \\ \frac{\partial \phi^*(Q, P)}{\partial n_P} &= \frac{jk}{4} \cdot H_1^{(2)}(kr) \cdot \frac{\partial r}{\partial n_P} = \\ &= \frac{jk}{4} \cdot H_1^{(2)}(kr) \cdot \frac{r_i}{r} (n_P)_i \end{aligned}$$

式中, ϕ 表示速度势或声压; $j = \sqrt{-1}$; $H_0^{(2)}(kr)$, $H_1^{(2)}(kr)$ 分别为 0, 1 阶第二类 Hankel 函数; $(n_P)_i$

为 Γ 上源点 P 的外法线方向 $\mathbf{n}_P$ 的坐标分量; $r = (r_i r_i)^{1/2}$, $r_i = P_i - Q_i$ (P_i, Q_i 分别是源点和场点坐标); $c(Q)$ 为场点 Q 的位置系数.

$$c(Q) = \begin{cases} 1, & Q \in \Omega \\ 1/2, & Q \in \Gamma \text{ (在 } Q \text{ 点光滑)} \\ 0, & Q \in \Omega^c \end{cases}$$

如果将积分曲线 Γ 取为外问题真实的振动边界, 场点 Q 取在真实边界上 ($c(Q) = 1/2$), 这时式 (1) 即成为真实边界积分方程

$$-\frac{1}{2}\phi(Q) = \int_{\Gamma} \phi(P) \frac{\partial \phi^*(Q, P)}{\partial n_P} d\Gamma(P) - \int_{\Gamma} \phi^*(Q, P) \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} d\Gamma(P) \quad (2)$$

从上式中解出未知边界值 $\phi(P)$ (或 $\frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P}$) 后, 代入式 (1) 即可得出场内任意一点 ($c(Q) = 1$) 的声压或速度势值. 但用式 (2) 来描述外问题时, 解的唯一性不能得到保证, 表现为对应于 Dirichlet 内问题的特征频率 (本征值), Neumann 外问题没有唯一解; 对应于 Neumann 内问题的特征频率 (本征值), Dirichlet 外问题没有唯一解, 这是真实边界上 Kirchhoff 积分方程的致命缺点^[11].

为了解决这个问题, 设在真实边界 Γ 的邻近范围内取另一条积分曲线 Γ' (虚拟边界), 如图 2 所示, 可得虚拟边界上的积分方程

$$-\phi(Q) = \int_{\Gamma'} \phi(P) \frac{\partial \phi^*(Q, P)}{\partial n_P} d\Gamma'(P) - \int_{\Gamma'} \phi^*(Q, P) \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} d\Gamma'(P), \quad Q \in \Gamma \quad (3)$$

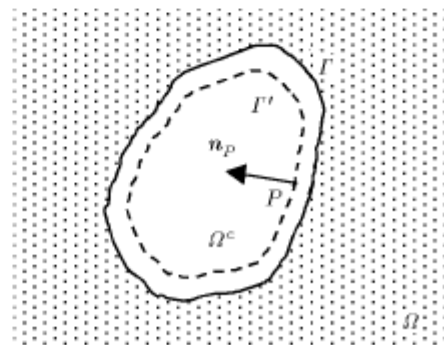


图 2 真实与虚拟边界

Fig.2 Actual and virtual boundary

为了简化计算和提高效率, 根据位势理论^[12], 这里提出直接采用只含一个未知函数的单层势或双层势单一积分形式.

单层势积分形式是

$$\phi(Q) = \int_{\Gamma'} \sigma(P) \phi^*(Q, P) d\Gamma'(P) \quad (4)$$

双层势积分形式是

$$\phi(Q) = \int_{\Gamma'} \gamma(P) \frac{\partial \phi^*(Q, P)}{\partial n_P} d\Gamma'(P) \quad (5)$$

式中, $\sigma(P), \gamma(P)$ 分别为虚拟边界 Γ' 上的单层势密度和双层势密度函数, 它们是待求的未知函数.

由于虚拟边界与真实边界间相隔一定的距离, 并可在一定范围内随意伸缩, 这就不仅避免了繁杂的奇异积分处理, 而且正如下面将指出的, 可通过伸缩虚拟边界使虚拟边界 Γ' 上对应内问题的特征波数 (本征值) 避开与所求外问题给出的波数相重合, 从而在全波数域内获得了 Helmholtz 外问题的唯一解.

2 伸缩虚拟边界积分法解的唯一性证明

Helmholtz 外问题 (图 1) 的控制微分方程为

$$\nabla^2 \phi(Q) + k^2 \phi(Q) = 0, \quad Q \in \Omega \quad (6)$$

∇^2 为 Laplace 算子, $k = \omega/c$ 为波数, ω 为固有频率或响应频率, c 为介质中声速, ϕ 为速度势或声压. Γ 上满足以下两类边界条件之一:

第一类边值条件 (Dirichlet 问题)

$$\phi(Q) = \bar{\varphi}, \quad Q \in \Gamma \quad (7a)$$

第二类边值条件 (Neumann 问题)

$$\frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} = \bar{q}, \quad Q \in \Gamma \quad (7b)$$

在无穷远处满足 Sommerfeld 辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + jk\phi \right) = 0 \quad (\text{二维}) \quad (8)$$

对于 Helmholtz 外问题解的唯一性有以下熟知的定理^[13]: 对任意实波数 k , 由控制微分方程 (6), 边界条件 (7) 和 Sommerfeld 辐射条件 (8) 所描述的问题, 存在唯一解.

限于篇幅, 本文仅以单层势 (4) 式描述的 Neumann 外问题为例, 证明通过伸缩虚拟边界借助方

程 (4) 可以获得式 (6)~(8) 边值问题全波数域的唯一解.

文献 [12] 证明了: 若式 (4) 中的密度函数 $\sigma(P)$ 是曲线 Γ' 上点 P 的连续函数, 则以单层势积分式 (4) 描述的 Neumann 外问题, 具有下列性质:

- (a) $\phi(Q)$ 在全平面 R^2 中连续;
- (b) 当 $Q \notin \Gamma'$ 时, 有

$$\nabla^2 \phi(Q) + k^2 \phi(Q) = 0$$

(c) $\phi(Q)$ 在无穷远处满足 Sommerfeld 辐射条件式 (8);

(d) 由式 (4) 所确定的单层势 $\phi(Q)$ 在任一点 $P_0 \in \Gamma'$ 有内法向导数 (由外域指向内域方向)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(P_0)}{\partial n_{P_0}^-} &= \lim_{\substack{Q \in \Omega_{P_0}^- \\ Q \rightarrow P_0 \in \Gamma'}} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n_{P_0}} = \\ &= \int_{\Gamma'} \sigma(P) \frac{\partial \phi^*(P_0, P)}{\partial n_{P_0}} d\Gamma'(P) - \frac{1}{2} \sigma(P_0) \quad (9) \end{aligned}$$

对以双层势积分形式 (5) 描述的 Dirichlet 内问题, 文献 [12] 还证明了: 若式 (5) 中的密度函数 $\gamma(P)$ 是曲线 Γ' 上点 P 的连续函数, 则双层势积分 (5) 式具有下列性质:

(a) 当 $Q = P_0$ 为曲线 Γ' 上的点时, 此位势积分收敛;

(b) 当 $Q \notin \Gamma'$ 时, 有

$$\nabla^2 \phi(Q) + k^2 \phi(Q) = 0$$

(c) 由式 (5) 所确定的双层势在任一点 $P_0 \in \Gamma'$ 有 (由内域趋向虚拟边界 Γ')

$$\begin{aligned} \phi_I(P_0) &= \lim_{\substack{Q \in \Omega_{P_0}^+ \\ Q \rightarrow P_0 \in \Gamma'}} \phi(Q) = \\ &= \int_{\Gamma'} \gamma(P) \frac{\partial \phi^*(P_0, P)}{\partial n_P} d\Gamma'(P) - \frac{1}{2} \gamma(P_0) \quad (10) \end{aligned}$$

由第一个性质 (b), (c) 得出单层势式 (4) 描述的解已自动满足了 Helmholtz 方程和 Sommerfeld 辐射条件. 因此, 如果在虚拟边界 Γ' 上存在唯一的密度连续函数 $\sigma(P)$ 使之在真实边界 Γ 上满足给定的边界条件 (7b) (Neumann 外问题), 即

$$\int_{\Gamma'} \sigma(P) \frac{\partial \phi^*(Q, P)}{\partial n_Q} d\Gamma'(P) = \bar{q}, \quad Q \in \Gamma \quad (11)$$

就能够保证解的唯一性.

下面证明 $\sigma(P)$ 存在的唯一性. 由式 (9) 考虑齐次形式有

$$\sigma(P_0) = 2 \int_{\Gamma'} \sigma(P) \frac{\partial \phi^*(P_0, P)}{\partial n_{P_0}} d\Gamma'(P) = \int_{\Gamma'} \sigma(P) K(P_0, P) d\Gamma'(P) \quad (12)$$

这是一齐次的第二类 Fredholm 积分方程.

同样, 由式 (10) 考虑齐次形式有

$$\gamma(P_0) = 2 \int_{\Gamma'} \gamma(P) \frac{\partial \phi^*(P_0, P)}{\partial n_P} d\Gamma'(P) = \int_{\Gamma'} \gamma(P) K_1(P_0, P) d\Gamma'(P) \quad (13)$$

注意到基本解函数 $\phi^*(P_0, P) = \phi^*(P, P_0)$, 则核函数

$$K(P, P_0) = \frac{\partial \phi^*(P, P_0)}{\partial n_P} = \frac{\partial \phi^*(P_0, P)}{\partial n_P} = K_1(P_0, P)$$

因此, 式 (12) 和 (13) 是一对对偶积分方程, 根据 Fredholm 定理^[2,14] 容易证明:

式 (12) 和 (13) 具有相同的本征值, 且每一个本征值是实数并均是有限重的, 且重数相同, 即本征函数的空间维数相同; 如果有非零解, 它们解空间的维数也相同.

另外, 对于 Dirichlet 内问题解的唯一性, 也有如下熟知的定理^[14]:

当波数 k 不是 Dirichlet 内问题的本征值时, 齐次积分方程 (13) 式只有零解, 则非齐次 Dirichlet 内问题 (或在非齐次边界条件下) 必存在唯一解.

由上述定理容易推论出:

如果波数 k 不是虚拟边界 Γ' 对应的 Dirichlet 内问题的本征值, 则虚拟边界积分方程 (10) 式存在唯一解. 由于其与 Neumann 外问题的对偶性, 所以, 在虚拟边界上存在唯一的密度函数 $\sigma(P)$, 使得用单层势式 (4) 描述的 Neumann 外问题的解唯一.

人们还会问, 一旦选定了虚拟边界 Γ' 开始计算, 这时并不能保证它对应的 Dirichlet 内问题的本征值不与波数 k 相等. 但是由于本文方法中虚拟边界 Γ' 具有任选性, 对于任意给定的实波数 k 总可以选取适当的虚拟边界 Γ' 使其对应的 Dirichlet 内问题的本征值不与给定波数重合. 因此可以选择 2~3 条虚拟边界, 分别各自计算, 显然结果相似的一组答

案是正确解. 通过比较容易判断即使挑选几条不同的 Γ' 计算, 计算过程比起引言中提出的为了避免解的非唯一性出现前人采用的那三种方法还是简单, 而且计算量也少. 这主要是因为本文方法采用了单一的式 (4) 或式 (5) 积分表达式, 边界积分和基本解保留了原来边界元的简单格式, 而且不存在边界积分的奇异性问题.

同理可证明对于 Dirichlet 外问题, 通过伸缩虚拟边界也能获得全波数域的唯一解.

3 虚拟边界元法

求解虚拟边界积分方程式 (4) 或 (5), 一般情况下是不可能得出解析解的, 为此需将虚拟边界进行剖分, 对未知函数 $\sigma(P)$ 或 $\gamma(P)$ 进行变量插值, 将无限自由度问题转化为有限自由度问题进行数值求解. 本文单元插值选用二次单元. 由于这里不存在奇异积分, 因此在积分方程中采用奇异性较高的核函数, 有利于改善系数矩阵的性质, 以提高解的精度和稳定性. 实际问题中可根据不同边值问题采用不同的虚拟边界积分方程形式.

3.1 Dirichlet 边值问题

Dirichlet 边值问题的边界条件是

$$\phi(Q) = \bar{\varphi}, \quad Q \in \Gamma \quad (14)$$

对于这类边值问题, 采用双层势积分形式 (5) 为宜. 现将虚拟边界剖分为 N_e 个单元, N 个节点, 每个单元用二次多项式插值逼近后, 式 (5) 变为

$$\begin{aligned} \phi(Q) &= \int_{\Gamma'} \gamma(P) \frac{\partial \phi^*(Q, P)}{\partial n_P} d\Gamma'(P) = \\ &= \int_{\Gamma'} \gamma(P) K(Q, P) d\Gamma'(P) = \\ &= \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Delta \Gamma'_i} [N_1(P) \gamma_i^{(1)} + N_2(P) \gamma_i^{(2)} + \\ &N_3(P) \gamma_i^{(3)}] K(Q, P) d\Gamma'(P), \quad Q \in \Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

式中, $N_1(P), N_2(P), N_3(P)$ 为二次单元形函数, $\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \gamma_i^{(3)}$ 为单元节点的双层势密度

$$K(Q, P) = \frac{\partial \phi^*(Q, P)}{\partial n_P} = \frac{jk}{4} \cdot H_1^{(2)}(kr) \cdot \frac{r_i}{r} (n_P)_i$$

将式 (15) 按节点合并重新排列后得

$$\phi(Q) = \sum_{\alpha=1}^N A_{\alpha}(Q) \cdot \gamma_{\alpha} = \mathbf{A}(Q) \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (16)$$

其中

$$A_{\alpha}(Q) = \begin{cases} \int_{\Delta\Gamma_1'} N_1(P)K(Q,P)d\Gamma'(P) + \\ \int_{\Delta\Gamma_{N_e}'} N_3(P)K(Q,P)d\Gamma'(P) \\ \alpha = 1 \\ \int_{\Delta\Gamma_1'} N_1(P)K(Q,P)d\Gamma'(P) + \\ \int_{\Delta\Gamma_{i-1}'} N_3(P)K(Q,P)d\Gamma'(P) \\ \alpha = 2i-1, i \neq 1 \\ \int_{\Delta\Gamma_i'} N_2(P)K(Q,P)d\Gamma'(P) \\ \alpha = 2i \end{cases}$$

3.2 Neumann 边值问题

Neumann 边值问题的边界条件是

$$\frac{\partial\phi(Q)}{\partial n_Q} = \bar{q}, \quad Q \in \Gamma$$

对于 Neumann 边值问题, 采用单层势积分公式 (4) 为宜, 将式 (4) 对真实边界 Γ 的外法线方向求导, 进行离散处理后得

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi(Q)}{\partial n_Q} &= \int_{\Gamma} \sigma(P) \frac{\partial\phi^*(Q,P)}{\partial n_Q} d\Gamma'(P) = \\ &= \int_{\Gamma} \sigma(P) K'(Q,P) d\Gamma'(P) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N A'_{\alpha}(Q) \sigma_{\alpha} = A'(Q) \cdot \sigma, \quad Q \in \Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

式中, $K'(Q,P) = \frac{\partial\phi^*(Q,P)}{\partial n_Q} = \frac{jk}{4} \cdot H_1^{(2)}(kr) \cdot \frac{r_i}{r} (n_Q)_i$, $r_i = Q_i - P_i$. 从上式与式 (15) 的比较可以看出, 除两积分的核函数不同以外, 两者的表达形式完全一样, 因此只需在式 (16) 中将核函数 $K(Q,P)$ 替换为 $K'(Q,P)$, 未知向量 γ 替换为 σ 就可容易地得到式 (17) 的离散结果.

这里需指出: 无论是单层势积分形式 (4) 或双层势积分形式 (5) 都可用于求解所有类型的边值问题.

4 与真实边界的联系方程

为了解出虚拟边界上应作用的源强向量 (双层或单单位势密度向量) γ 或 σ , 可将式 (16) 或式 (17)

用加权残数法与真实边界上的已知边界值相联系, 建立求解未知向量 γ 或 σ 的代数方程组. 本文仅以 Neumann 边值问题为例采用加权残数法中的最小二乘法逼近建立相应方程.

根据最小二乘法原理, 对于 Neumann 边值问题, 由式 (17) 定义方差泛函为

$$J(\sigma) = \int_{\Gamma} \left| \sum_{\alpha=1}^N A'_{\alpha}(Q) \sigma_{\alpha} - \bar{q}(Q) \right|^2 d\Gamma(Q) \quad (18)$$

展开上述方程得

$$\begin{aligned} J(\sigma) &= \int_{\Gamma} \left(|\bar{q}|^2 - \bar{q} \sum_{\beta=1}^N A'_{\beta} \sigma_{\beta} - \bar{q} \sum_{\alpha=1}^N \bar{A}'_{\alpha} \bar{\sigma}_{\alpha} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \bar{A}'_{\alpha} A'_{\beta} \bar{\sigma}_{\alpha} \sigma_{\beta} \right) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $\bar{q}, \bar{\sigma}_{\alpha}, \bar{A}'_{\alpha}$ 分别为 $\bar{q}, \sigma_{\alpha}, A'_{\alpha}$ 的共轭复数.

方差泛函的驻值条件是

$$\frac{\partial J(\sigma)}{\partial \bar{\sigma}_{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

用式 (19) 代入上式可得线性方程

$$B \cdot \sigma = \bar{q} \quad (21)$$

式中, B 为 $N \times N$ 阶对称方阵, $\bar{q}$ 为 N 阶向量, 它们的元素分别为

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \int_{\Gamma} \bar{A}'_i(Q) A'_j(Q) d\Gamma(Q) \\ \bar{q}_i &= \int_{\Gamma} \bar{A}'_i(Q) \bar{q}(Q) d\Gamma(Q) \end{aligned}$$

由式 (21) 解出未知向量 σ , 将其回代到离散后的式 (4) 即可得分析域内任意一点的声压或速度势.

5 数值算例

5.1 脉动、摆动空穴的声辐射

无限平面介质内, 有一半径为 a 的圆形空穴, 周边分别产生均匀径向振速幅值 v_0 以及径向振速幅值 $v_0 \cos \theta$, 试用本文方法求这两种情况下的空穴表面声压. 已知解析解分别为 [15]

$$\frac{p(a)}{\rho c v_0} = j \cdot \frac{H_0^{(2)}(ka)}{H_1^{(2)}(ka)} \quad (\text{第一种情况}) \quad (22)$$

$$\frac{p(a)}{\rho c v_0} = j \cdot \frac{2H_1^{(2)}(ka) \cos \theta}{H_2^{(2)}(ka) - H_0^{(2)}(ka)} \quad (\text{第二种情况}) \quad (23)$$

式中, ρ 为介质密度, c 为介质中声速. 这里选用虚拟边界与实际边界相似, 半径取为 $a' = 0.75a$, 虚拟边界离散为 30 个单元. 表 1 和表 2 分别给出

了两种情况下表面声压的数值解并与理论解作了比较. 由此可以看出: 对于 Helmholtz 外问题, 在特征波数处, 应用本文方法求解不存在解的非唯一性问题.

表 1 脉动空穴表面声压计算结果 $p(a)/\rho cv_0$ (* 特征波数)

Table 1 The presses on the surface of a pulsating circle cavity $p(a)/\rho cv_0$ (* eigenvalue)

ka	Analytical solution	Present formulation
1	0.791 876 712 1 + j 0.333 083 174 9	0.791 876 712 1 + j 0.333 083 174 9
2	0.925 138 052 3 + j 0.216 517 483 2	0.925 138 052 3 + j 0.216 517 483 2
*2.41	0.945 413 539 6 + j 0.186 741 040 6	0.945 413 539 6 + j 0.186 741 040 6
3	0.962 936 409 7 + j 0.155 102 434 8	0.962 936 409 7 + j 0.155 102 434 8
4	0.978 171 448 6 + j 0.119 773 508 6	0.978 171 448 7 + j 0.119 773 508 6
5	0.985 696 189 6 + j 0.097 224 244 9	0.985 696 189 6 + j 0.097 224 244 9
*5.52	0.988 170 708 8 + j 0.088 490 775 3	0.988 170 708 8 + j 0.088 490 775 3
6	0.989 930 429 1 + j 0.081 691 820 2	0.989 930 429 1 + j 0.081 691 820 2

表 2 摆动空穴表面声压计算结果 $p(a)/\rho cv_0$ (* 特征波数)

Table 2 The presses on the surface of a oscillating circle cavity $p(a)/\rho cv_0$ (* eigenvalue)

ka	Analytical solution($\theta = 0$)	Present formulation($\theta = 0$)
1	0.738 796 559 1 + j 0.622 212 837 1	0.738 796 559 1 + j 0.622 212 837 1
2	0.988 139 079 6 + j 0.302 787 408 3	0.988 139 079 6 + j 0.302 787 408 3
3	1.004 091 319 2 + j 0.185 848 303 4	1.004 091 319 2 + j 0.185 848 303 4
*3.82	1.004 631 123 4 + j 0.140 819 476 2	1.004 631 123 4 + j 0.140 819 476 2
4	1.004 511 423 7 + j 0.133 733 200 3	1.004 511 423 7 + j 0.133 733 200 3
5	1.003 600 590 7 + j 0.104 642 596 4	1.003 600 590 7 + j 0.104 642 596 4
6	1.002 783 121 4 + j 0.086 078 111 5	1.002 783 121 3 + j 0.086 078 111 7
*7.02	1.002 163 656 8 + j 0.072 962 221 4	1.002 163 656 7 + j 0.072 962 221 4

题, 并具有很高的精度.

5.2 椭圆空穴的声辐射

如图 3 所示椭圆空穴以均匀法向振速 v_0 脉动, 短半轴 $a = 1\text{m}$, 虚拟边界的短半轴取为 $a' = 0.75a$, 虚拟边界离散为 30 个单元. 如图 4, 图 5, 图 6 分别给出了观察点 $(5, 0.0)$, $(5, \pi/4)$, $(5, \pi/2)$ 处的声压幅值随波数 ka 的变化关系.

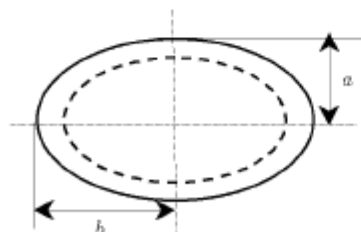


图 3 椭圆空穴与虚拟边界

Fig.3 Elliptical cavity and virtual boundary

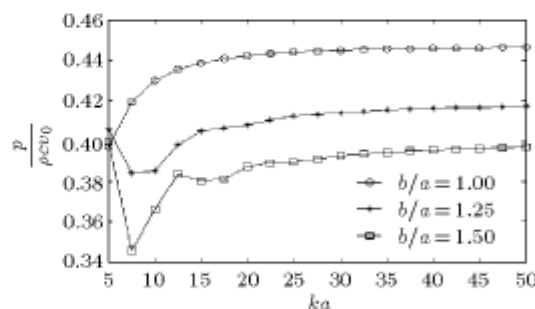


图 4 观察点 $(5, 0.0)$ 处声压

Fig.4 The presses at observation position $(5, 0.0)$

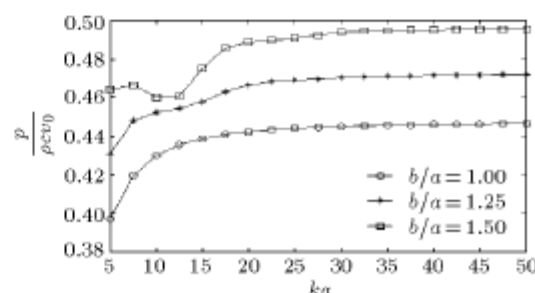
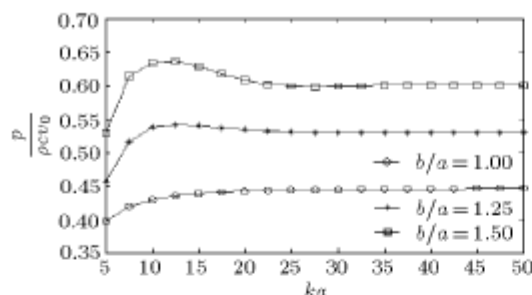


图 5 观察点 $(5, \pi/4)$ 处声压

Fig.5 The presses at observation position $(5, \pi/4)$

图 6 观察点 $(5, \pi/2)$ 处声压Fig.6 The presses at observation position $(5, \pi/2)$

5.3 四圆角矩形空穴的声辐射

如图 7 所示四圆角矩形空穴以均匀法向振速 v_0 脉动, $A_1 = 1\text{m}$, $R_1 = A_1/M$, 虚拟边界取为 $A'_1 = 0.75A_1$, 虚拟边界离散为 30 个单元. 图 8 和图 9 分别给出了观察点 $(5, 0.0)$, $(5, \pi/4)$ 处的声压幅值随波数 ka 的变化关系.

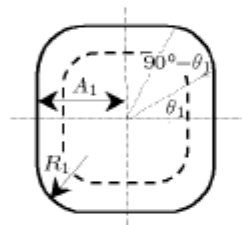
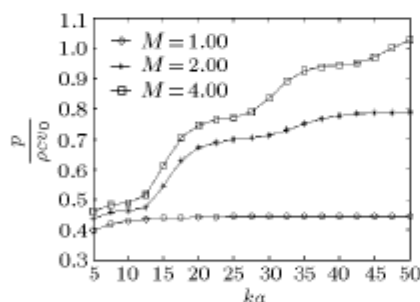
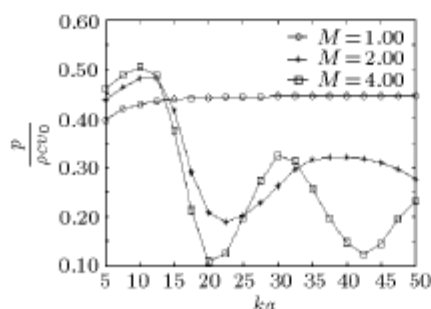


图 7 四圆角矩形空穴与虚拟边界

Fig.7 Four lobed cavity and virtual boundary

图 8 $(5, 0.0)$ 处声压Fig.8 The presses at observation position $(5, 0.0)$ 图 9 $(5, \pi/4)$ 处声压Fig.9 The presses at observation position $(5, \pi/4)$

6 结束语

对于 Helmholtz 外问题, 由于其具有非常重要的工程背景, 对它如何高效和较精确地求解一直是科技工作者十分关心的课题. 本文基于位势理论, 采用伸缩虚拟边界元技术, 不仅成功地克服了这类问题在某些特征频率(本征值)处求解结果不唯一, 而且由于该方法不存在繁杂的奇异积分处理, 因此无论是近场或远场辐射声压都具有非常高的计算效率和精度, 同时编程十分容易. 虽然本文的理论推导和计算实例以二维为例, 但其基本思想和方法可以很方便地推广到三维 Helmholtz 外问题.

参 考 文 献

- 1 胡海昌. 论 Helmholtz 方程的一类边界积分方程的合理性. 振动工程学报, 1992, 5(3): 183~192 (Hu Haichang. On the rationality of a class of boundary integral equations for Helmholtz equation. *Journal of Vibration Engineering*, 1992, 5(3): 183~192 (in Chinese))
- 2 王清, 徐博侯. 关于 Helmholtz 外问题的边界积分方程解的唯一性问题. 应用数学与力学, 1990, 11(10): 903~909 (Wang Qing, Xu Bohou. On the uniqueness of boundary integral equation for exterior Helmholtz problem. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, 11(10): 903~909 (in Chinese))
- 3 Schenck HA. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *J Acoust Soc Am*, 1968, 44(1): 41~58
- 4 Burton AJ, Miller GF. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems. *Proc Roy Soc London*, 1971, A323: 201~210
- 5 Kleinman RE, Roach GF, Schuetz LS, et al. An iterative solution to acoustic scattering by rigid objects. *J Acoust Soc Am*, 1988, 84(1): 385~391
- 6 Burgess GJ, Mahajerin EA. A comparison of the boundary element and superposition methods. *Comput & Struc*, 1984, 19(5-6): 697
- 7 孙焕纯, 张立洲, 李性厚. 弹性力学问题的虚边界元 - 配点法. 计算结构力学及其应用, 1991, 8(1): 15~23 (Sun Huancun, Zhang Lizhou, Li Xinghou. A virtual boundary element-collocation method for solving problems of elasticity. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1991, 8(1): 15~23 (in Chinese))
- 8 孙焕纯, 杨海天, 吴京宁等. 虚边界元法的应用及其求解方法. 应用力学学报, 1994, 11(1): 28~36 (Sun Huancun, Yang Haitian, Wu Jingning, et al. Virtual boundary element method application and strategies for solution. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1994, 11(1): 28~36 (in Chinese))
- 9 邹广德, 孙焕纯, 柴山等. 求解位势问题的虚边界元法. 计算结构力学及其应用, 1994, 11(3): 271~277 (Zou Guangde, Sun

- Huancun, Chai Shan, et al. The virtual boundary element method for the potential problems. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1994, 11(3): 271~277 (in Chinese))
- 10 Cuschieri JM, Felt D. Response Green's function and acoustic scattering from a fluid-loaded cylindrical shell with discontinuities. *Comput & Struct*, 1997, 65(3): 337~384
 - 11 Gennaretti M, Giordani A. A third-order boundary element method for exterior acoustics with applications to scattering by rigid and elastic shells. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 222(5): 699~722
 - 12 陈传璋, 侯宗义, 李明忠. 积分方程论及其应用. 上海: 上海科学技术出版社, 1987 (Chen Chuanshang, Hou Zongyi, Li Mingzhong. Theory and Application of Integral Equations. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1987 (in Chinese))
 - 13 斯米尔诺夫 В.И. 高等数学教程, 第 4 卷, 第 2 分册. 谷超豪, 金福临译. 北京: 人民教育出版社, 1958 (Смирнов В.И. Advanced Mathematics Tutorial, Vol.4, No.2. Gu Chaohao, Jin Fulin trans. Beijing: People's Education Press, 1958 (in Chinese))
 - 14 薛兴恒. 数学物理偏微分方程. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1995 (Xue Xingheng. Partial Differential Equations in Mathematics and Physics. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1995 (in Chinese))
 - 15 沈杰罗夫 Е.Д. 水声学波动问题, 何祚辅, 赵晋英译. 北京: 国防工业出版社, 1983 (Шенстеров Е.Д. The Wave Problems of Hydroacoustics. He Zuoyong, Zhao Jinying trans. Beijing: National Defence Industry Press, 1983 (in Chinese))

THE EXPANDING-CONTRACTING VIRTUAL BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR 2D-HELMHOLTZ EXTERIOR PROBLEMS¹⁾

Xiang Yu Huang Yuying

(College of Civil Engineering & Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract Based on potential theory, an expanding-contracting virtual boundary element method (ECVBEM) is presented for solving 2D-Helmholtz exterior problems in this paper. The strict mathematics proof for existence of a unique solution by this method in whole wave number range is given. Since the shape of virtual boundary may arbitrarily change in a certain extent, so the eigenfrequency (eigenvalue) of corresponding Helmholtz interior problem on virtual boundary may arbitrarily change too. The main advantage of the method is to keep the eigenfrequency of corresponding interior problem away from the given wave number of the original Helmholtz exterior problem. In this way, the unique solution can be ensured. As compared with other methods proposed before, the method presented by this paper is simpler. Tests of the ECVBEM are carried out to explore calculation precision and stability as well as ability to overcome the non-uniqueness of solution through several examples for two-dimension Helmholtz exterior problem. The calculated results of the different shapes of cavities under the various boundary conditions show that the sound pressures by the present effective method in both far and near fields are of high accuracy.

Key words exterior Helmholtz problem, uniqueness, boundary integral equation, expanding-contracting virtual boundary element method (ECVBEM), acoustic radiation

Received 30 October 2001, revised 13 March 2003.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10172038).