

三维非结构聚合多重网格法数值模拟研究¹⁾

吕宏强 伍贻兆 夏 健

(南京航空航天大学空气动力学系, 南京 210016)

摘要 在三维非结构网格上应用聚合式多重网格技术来加速 Euler 方程的收敛过程. 自行设计了一种高效率的网格聚合方法. 采用四重三维非结构网格, 在每一层网格上采用有限体积法进行计算. 通过对 M6 翼型的数值求解验证了多重网格加速收敛的高效性.

关键词 三维非结构网格, 聚合网格, 多重网格法, 有限体积法

引 言

在当今流体力学的数值模拟的领域中, 多重网格法被公认为一种有效的加速收敛技术. 在以前的应用中, 多重网格法大多被应用于结构网格, 因为结构网格各层之间的插值关系容易建立. 而对于非结构网格, 由于网格结构上的任意性造成了额外的困难. 对重叠法, 其难度在于求各层初始给定的网格之间的传递关系的求解和各层网格数目比的控制. 而对于聚合法^[1], 如何高效率地聚合高质量的粗网格是问题的关键, 特别对于三维情况, 对非结构网格聚合的控制需要更多的技巧. 本文将多重网格法推广到三维非结构网格的情况, 自行设计了一种高效的三维网格聚合方法, 采用四重网格进行三维 Euler 方程的数值求解. 通过与单重网格的计算效率进行的比较可以看出本文将多重网格法运用到三维非结构网格的尝试是非常成功的.

1 网格的聚合

本文自行设计了一种高效的三维网格聚合方法, 在保证网格质量的同时, 也充分考虑到聚合速度. 本文中初始四面体网格的单元数为 291 914, 在此基础上聚合三重粗网格所需要的时间不到 30 s (256 M 内存的 350 PC 计算机). 相邻的两重粗细网格的网格数比约控制在 1:8 左右, 三重粗网格的网格数分别为 50 325, 5 711, 797. 具体的聚合方法如下:

(1) 选内外边界的点组成待聚合点集合, 然后选其中一点为聚合点, 将所有包含此点的元素聚合为

一个粗元素. 然后从待聚合点集合中选取一个与原起始点相邻的点为聚合点, 将所有包含此点的元素聚合为一个粗元素. 如此反复, 直至待聚合点集合中的所有点都被聚合完为止. 用位于流场内部的新生成的一层粗网格表面的点来更新待聚合点集合, 然后选一点为聚合点……如此反复, 直到聚合完毕. 这样就由第 1 层细网格生成了第 2 层粗网格.

(2) 选第 2 层网格中边界上的元素组成起始聚合边界, 并在聚合边界上任意选择一元素作为待聚合元素. 将与此待聚合元素相邻的没有聚合过的密网格的元素全部聚合为一个粗网格, 同时将所有与刚聚合过的密网元素相邻的未聚合的密网元素记录到待聚合边界中. 然后选择聚合边界中与刚生成的这个粗网元素相邻的密网元素作为待聚合元素, 将与此待聚合元素相邻的没有聚合过的密网格的元素全部聚合为一个粗网格……如此反复, 直到聚合边界中所有的密网元素都聚合完毕. 然后将聚合边界更新为待聚合边界, 选取待聚合元素……重复以上步骤直到所有的密网元素都聚合完毕. 此时, 第 3 层粗网格生成完毕.

(3) 重复 (2) 步骤, 生成第 4 层粗网格.

从上述的聚合步骤可以看出, 本文提出的这种聚合思想具有较高的智能化和自适应特性. 内边界和外边界形状上的复杂度对聚合过程并无影响, 也就是说, 本文所设计的三维网格聚合方法具有相当好的通用性, 聚合过程中不会出现类似于单重网格生成中的网格生成失败的情况. 因此本文设计的三维网格聚合方法本身就是针对于任意的三维复杂外形.

2001-06-04 收到第一稿, 2002-11-20 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (19982009).

2 数值传递

相邻网格层之间的参数的传递采用体积加权^[2]的思想. 从细网格到粗网格的数值传递如下

$$W_c = \sum (W_f \times V_{fc}) / V_c \quad (1)$$

$$R_c = \sum (R_f \times V_{fc}) / V_f \quad (2)$$

其中 W 表示流动变量, R 表示残值, V 表示单元体积, 而 V_{fc} 则表示粗网格单元与细网格单元相交部分的体积. 下标 c 和 f 代表粗网格和细网格, 粗网格到细网格的修正量插值为

$$C_f = \sum (C_c \times V_{fc}) / V_f \quad (3)$$

C_c 与 C_f 分别表示粗网格和细网格的修正量.

3 迭代算法

本文中在每一重网格上都采用四步显式 Runge-Kutta 法^[3,4]进行时间推进. 在最密的第 1 层网格上进行的迭代为

$$W^{(q)} = W^{(0)} - \alpha_q \Delta t R(W^{(q-1)}) \quad (4)$$

粗网格上进行迭代时, 需加一个强迫函数以修正传递误差

$$P = R' - R(W') \quad (5)$$

$$W^{(q)} = W^{(0)} - \alpha_q \Delta t [R(W^{(q-1)}) + P] \quad (6)$$

R' 和 W' 为从上一层网格传递过来的参数. 式 (5) 中 R' 和 W' 分别表示由密网格传递过来的残值和流动变量.

4 循环过程

本文采用 V 型循环. 首先在最细的第 1 层网格上进行一次显式 Runge-Kutta 迭代, 然后将数据传

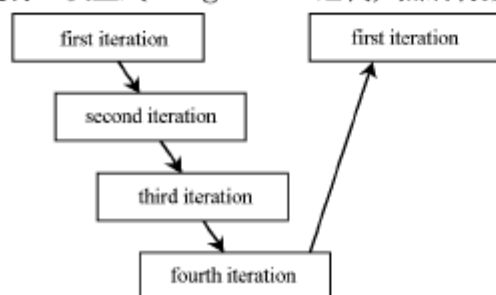


图 1 循环过程

Fig.1 Multigrid cycle

递到第 2 层网格, 在第 2 层网格上进行一次 Runge-Kutta 迭代... 直至第 4 层. 第 4 层上迭代完毕后, 将修正量直接传递到第 1 层网格. 如此反复, 直至收敛.

5 算例分析

本文对跨音速 ($M_\infty = 0.84$, $\alpha = 3.06^\circ$) 状态下 M6 翼型的绕流进行了数值模拟. 本文采用的第 1 到第 4 层网格的网格数基本上是按 8:1 递减的. 第 1 到第 4 层网格的单元数分别为: 291914, 50325, 5711, 797. 图 2 为三维 M6 机翼表面各层网格的比较.

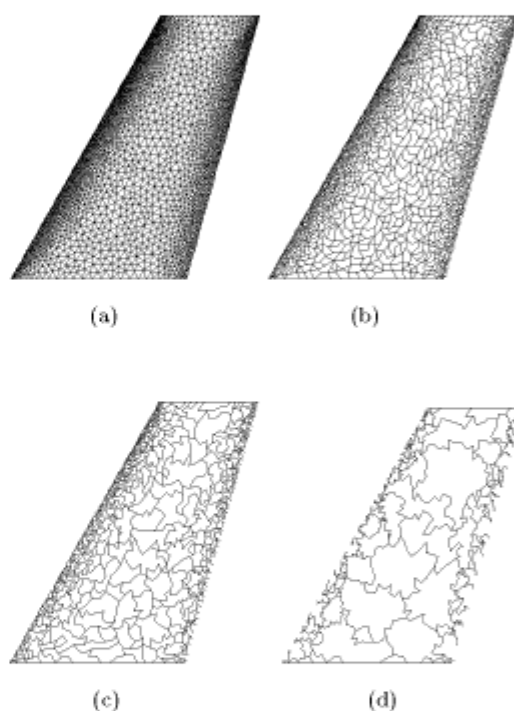


图 2 采用的网格

Fig.2 The adopted meshes

本文对单重算法及上文提到的 V 型多重网格算法的收敛速度进行了比较, 结果如图 3, 其中横坐标表示循环数, 纵坐标表示残值误差的对数 (以 10 为底取对数), 即收敛的量级.

由图 3 可见, 跨音速 ($M_\infty = 0.84$, $\alpha = 3.06^\circ$) 状态下 M6 翼型用多重算法只需 130 个循环便可以收敛到 10^{-5} 量级, 而单重算法需 1220 步以上. 由于各层网格数基本上是按照 8:1 的比例递减, 因此在粗网格上迭代花费的时间相对于第一层密网格要少得多. 因此用多重网格法比单重算法能大大地节约机时. 另外, 为了验证多重网格法加速收敛的高效

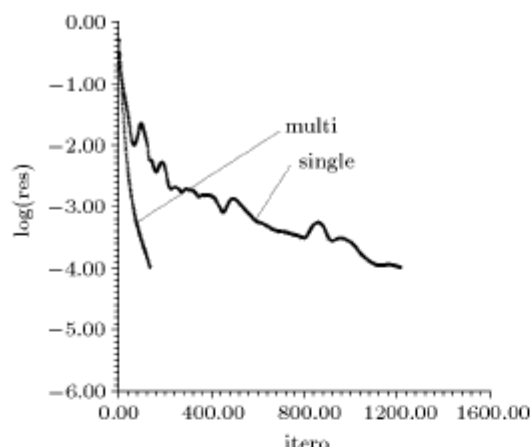


图 3 收敛率比较

Fig.3 Convergence rate of agglomeration multigrid algorithm compared with single-grid algorithm

($M_\infty = 0.84, \alpha = 3.06^\circ$)

性, 本文中除了多重网格法之外, 没有采用其它任何加速收敛的措施(如残值光顺等).

图 4 为跨音速 ($M_\infty = 0.84, \alpha = 3.06^\circ$) 状态下 M6 翼型用多重网格算法得到的机翼表面的等压线图. 由图可见, “ λ ” 波形非常明显. 图 5 给出了单重网格法和多重网格法计算的 44% 截面处的 C_p 分布的比较, 可见, 结果完全重合. 由于多重网格法中, 在所有粗网格层上进行的迭代只是为了更快地消除密网格上的低频误差, 多重网格算法是否达到收敛仍以密网格上的残值误差为标准, 因此, 事实上多重网格法计算的结果与单重算法是一致的, 只是收敛速度差别很大.



图 4 等压线

Fig.4 Pressure contours

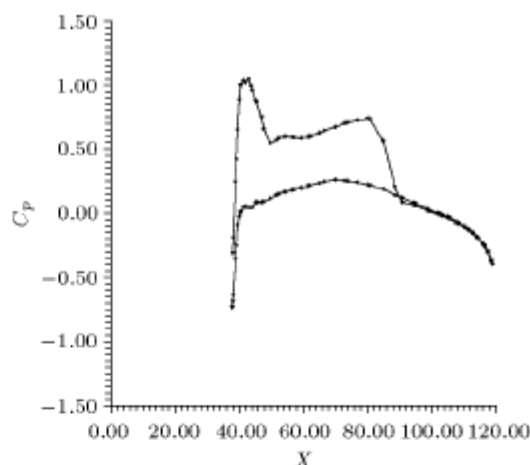
图 5 C_p 分布 (44%)

Fig.5 Distribution of C_p (44%)

6 结 论

本文设计了一种新的三维网格聚合方法, 将多重网格的思想成功的运用到了三维非结构网格上. 此方法的基本思想是以点或单元为基本元素组成待聚合边界进行推进式的聚合. 此方法的优点在于能够保证相邻两层网格的单元数比约为 8:1, 并且聚合的网格具有较好的质量, 从而保证了误差的消除效果. 另外, 本文采用了 V 型循环, 通过以上算例, 达到了用此种多重网格法加速收敛的效果, 大大节约了计算时间.

参 考 文 献

- 1 Mavriplis DJ. Multigrid techniques for unstructured meshes. NASA Contractor Report 195070. ICASE Report No.95-27
- 2 Mavriplis DJ. Multigrid solution of the two-dimensional Euler equations on unstructured triangular meshes. *AIAA Journal*, 1988
- 3 Stolcis L, Johnston LJ. Solution of the Euler equations on unstructured grids for two-dimensional compressible flow. *Aeronautical Journal*, June/July 1990
- 4 Jameson A, Scgmidt W, Turkel E. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. AIAA Paper 81-1259, June 1981

NUMERICAL SIMULATION OF FLOWFIELDS WITH THREE-DIMENSIONAL UNSTRUCTURED AGGLOMERATION MULTIGRID ALGORITHM¹⁾

Lu Hongqiang Wu Yizhao Xia Jian

(Dept. of Aerodynamics., Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract An agglomeration multigrid algorithm has been developed to accelerate the convergence of the Euler equations to a steady state on three-dimensional unstructured meshes. In the present work, an efficient method has been designed to agglomerate three-dimensional unstructured meshes, by which we can generate coarse meshes good of quality. The finite volume method is adopted on each layer. The high efficiency of this multigrid algorithm has been verified by simulating flows around M6 airfoil.

Key words three-dimensional unstructured mesh, agglomeration of meshes, multigrid, finite volume

Received 4 June 2001, revised 20 November 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19982009).