

非结构动网格在三维可动边界问题中的应用¹⁾

郭 正 刘 君 瞿章华

(国防科技大学航天与材料工程学院, 长沙 410073)

摘要 研究用于非结构动网格的弹簧近似方法, 采用顶点弹簧描述, 导出并讨论了弹簧倔强系数的取值. 通过引入边界修正和扭转效应修正, 对标准弹簧近似方法进行了改进. 转动翼型算例的结果表明, 改进后的方法大大提高了网格变形能力和网格质量. 应用该动网格方法耦合求解基于 (Arbitrary Lagrangian-Eulerian, ALE) 描述的三维 Euler 方程, 模拟了作俯仰振动的矩形机翼绕流, 计算结果与实验数据及文献计算结果十分一致. 作为多个自由刚体与流体耦合运动问题的简单例证, 耦合刚体动力学方程, 模拟了激波与双立方体的相互作用, 得到了非定常流场结构. 研究表明, 基于弹簧近似的非结构动网格与有限体积格式流场解算器相结合, 是模拟包含运动边界的非定常流动问题的有效方法.

关键词 非结构动网格, 弹簧近似, 运动边界, 非定常流动, Euler 方程

引 言

耦合求解包含运动边界的非定常复杂流场, 如自由表面问题, 多体分离问题, 强迫振动以及流体与结构耦合问题等, 是计算流体力学中的一个难点. 非结构动网格技术 (DUT) 是在非结构网格框架下求解此类问题的关键. 根据边界运动的苛刻程度以及位移的大小, 实现非结构动网格可采用网格变形方法^[1]、层推进与网格变形分区结合方法^[2]以及变形加局部或全场重构网格 (remeshing) 方法^[3]等. 事实上, 工程实际中存在很大一部分动边界问题属于小变形问题, 例如振动、自由表面、气动弹性等, 单独应用网格变形方法就能解决此类问题, 无需重构. 提高网格的变形能力和网格质量是保持数值解的精度以及扩大纯变形方法的适用范围所必需的. 另外, 采用变形加重构的动网格方法求解诸如外挂物投放、级间分离等大变形问题时, 也应尽量减少重构网格的次数, 因为重构后的插值运算会导致额外的耗散误差^[3]. 因此, 变形能力强、网格质量高的变形方法是非结构动网格技术的重要组成部分, 对其进行深入研究具有重大应用价值. 可靠性较高的网格变形方法主要有弹簧近似方法^[1]和弹性体方法^[4], 弹性体方法的网格变形能力强且网格质量较高, 但计算工作量大; 弹簧近似方法则比较简单高效. 国外一些学者已将弹簧近似方法成功用于翼型

强迫振动绕流^[4], 气动弹性问题^[5], 外挂物投放问题^[6]等. 国内在非结构动网格技术及其应用方面的研究还处于起步阶段^[7,8]. 本文在前期工作^[7,8]的基础上, 对弹簧近似方法进行进一步研究并推广到三维, 通过对弹簧倔强系数的改进, 使改进后的弹簧近似方法在保持原有计算效率的前提下, 网格变形能力和网格质量达到弹性体方法的水平. 最后, 将动网格方法与 ALE 形式的流场解算器耦合起来求解了两个包含运动边界的三维非定常流场算例, 并对结果进行了分析.

1 弹簧近似模型

应用于三角形 / 四面体非结构网格的弹簧近似方法是将整个网格看作一个弹簧网络系统, 每一条边都认为是一根具有一定倔强系数的弹簧. 这里沿用 Blom^[9]的定义来区分两种不同的描述形式, 一种是弹簧的平衡长度等于边的原长, 称为棱边弹簧 (segment springs), 另一种是弹簧的平衡长度为零, 称为顶点弹簧 (vertex springs).

传统的顶点弹簧近似方法一般用于网格优化, 倔强系数取为常数, 本文对传统方法进行了推广, 使其更适于实现网格变形运动. 对于顶点弹簧, 网格点所受的合力可表示为

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{N_i} K_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (1)$$

2001-12-11 收到第一稿, 2002-07-02 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (A10176037, 90205027).

其中 K_{ij} 为连结节点 i, j 的弹簧的倔强系数, x_i 是节点 i 的位置矢量, N_i 是与节点 i 相连的节点数. 对于所有节点, 式 (1) 可表示为线性系统 $Ax = b$, 其中 A 是由倔强系数构成的矩阵且对角占优. 不同于用于网格优化的情况, 推广后的顶点弹簧方法认为网格点的受力始终等于初始状态所受的合力. 动网格节点坐标可以通过迭代求解弹簧系统进行更新.

当边界运动时, 固定边界点和主动边界点的位置解已知, 因此弹簧系统的边界条件为 Dirichlet 型.

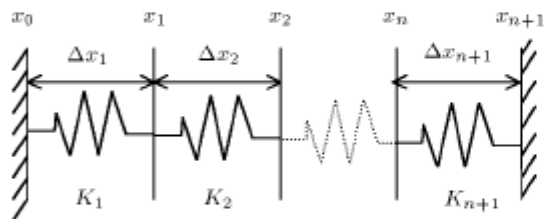
$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & & & \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & & \\ & & \dots\dots & & \\ & 0 & & -K_n & K_n + K_{n+1} & -K_{n+1} \\ & & & -K_{n+1} & K_{n+1} & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (2)$$


图 1 一维弹簧系统示意图

Fig.1 Configuration of 1-D springs

由式 (2) 对于内部节点 i 有

$$-K_i x_{i-1} + (K_i + K_{i+1})x_i = K_{i+1} x_{i+1} \quad (3)$$

令 $x_0 = 0$, 则对于 $1 \leq i \leq n$, 节点 $i+1$ 的坐标可由下面的式子确定 (可用数学归纳法证明)

$$x_{i+1} = \left(\sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{K_j} / \sum_{j=1}^i \frac{1}{K_j} \right) x_i \quad (4)$$

记节点 n 移动后的新坐标为 x_n^{new} , 由式 (4) 有

$$\left. \begin{aligned} x_n^{\text{new}} &= x_{n-1}^{\text{new}} \left(\frac{\sum_{j=1}^n \frac{1}{K_j}}{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{K_j}} \right) \\ \Delta x_n^{\text{new}} &= x_n^{\text{new}} - x_{n-1}^{\text{new}} = x_{n-1}^{\text{new}} \left(\frac{\frac{1}{K_n}}{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{K_j}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对弹簧系统的求解一般经过 3 至 4 次 Jacobi 迭代即可达到满意的精度.

2 倔强系数的选择

推广的顶点弹簧方法倔强系数不再取为常值, 在此采用顶点弹簧描述讨论倔强系数的取值. 考虑如图 1 所示的一维线性弹簧系统, 不失一般性, 假设内部节点初始受力为零, 则节点受力情况可表示为如下系统

将 x_{n-1}^{new} 表示为如下形式

$$x_{n-1}^{\text{new}} = (1 + \alpha)x_{n-1}^{\text{old}} = (1 + \alpha) \sum_{j=1}^{n-1} \Delta x_j \quad (6)$$

α 为适当的系数. 若选择弹簧的倔强系数为

$$K_i = \frac{1}{\Delta x_i} \quad (7)$$

则将 (6), (7) 式代入 (5) 式得

$$\Delta x_n^{\text{new}} = (1 + \alpha)\Delta x_n^{\text{old}} \quad (8)$$

即只要 $\alpha > -1$, 恒有 $\Delta x_n^{\text{new}} > 0$. 这说明对一维情况按 (7) 式选取弹簧倔强系数可避免网格点的相互碰撞, (7) 式与 Batina^[1] 对棱边弹簧方法采用的倔强系数表达式等价.

大量数值试验表明, 对于二维或三维网格, 弹簧倔强系数按下式选取比 (7) 式更能保持网格的疏密特征

$$K_{ij} = \frac{1}{l_{ij}^2} \quad (9)$$

其中 l_{ij} 是节点 i, j 之间的距离. 本文将由 (7) 式或 (9) 式表示倔强系数的弹簧近似方法称为标准方法.

3 方法改进

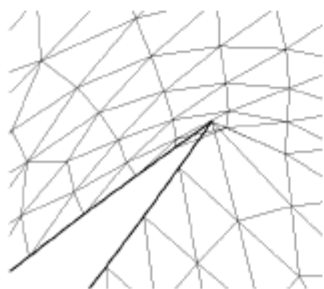
标准的弹簧近似方法仅仅考虑了弹簧所在直线方向的伸缩作用, 在二维或三维时并不能保证避免

网格边的互相交叉. 一些文献通过与椭圆型结构网格生成方法的比较认为, 采用弹簧近似方法调整网格点的位置也具有椭圆型方程的性质, 即局部的扰动只在局部产生影响. 计算实践也证明了这一点, 扭曲最严重也是最早出现变形失败的单元一般位于运动边界附近. 为减小这一性质的影响将运动边界附近的弹簧倔强系数增大, 使边界的扰动向网格内部传播, 本文称之为边界修正. 弹性体方法^[4]因为同时考虑了网格边的伸缩和扭转作用, 使网格具有较强的变形能力, 在弹簧近似方法中加入表示扭转弹簧效应的修正因子, 使网格边的扭转也受到约束, 同样可以提高网格的质量和变形能力, 这就是扭转效应修正. 引入了上述两种修正的弹簧倔强系数可具体表示为

$$K_{ij} = \frac{\phi}{\beta} (l_{ij})^\psi \quad (10)$$

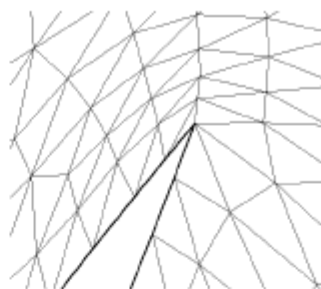
ϕ 为边界加强因子, 是空间位置的函数. β 表示扭转效应, 其意义为与该边相对的最小的三角形内角的角度. 当 $\phi = 1$, $\beta = 1$, $\psi = -2$ 时 (10) 式就是 (9) 式. 尽管扭转效应需要及时计及, 但为了避免非线性效应导致弹簧系统的求解发散, (10) 式的刷新频度要根据具体问题试定.

改进后的方法与标准方法的对比结果示于图 2. 图 2(a) 是标准方法的结果, NACA0012 翼型绕 1/4 弦点偏转 45°, 尾部已经出现失败. 图 2(b) 是对同一问题同时进行边界修正和扭转效应修正后的结果, 对于紧靠壁面边界的一层网格单元 $\phi = 5$, $\psi = -2$, 对于内部单元 $\phi = 1$, $\psi = -2$. 此时翼型偏转到 60°, 网格质量仍然较好. 对比文献 [2] 中所列的弹性体方法的结果可知, 经过改进的弹簧近似方法所能实现的网格变形能力, 已经达到了弹性体方法的水平. 图 2(b) 的计算中, 翼型每转动 12° 刷新一次倔强系数, 与标准方法对比几乎没有增加额外计算量.



(a) 标准方法

(a) Standard method



(b) 改进方法

(b) Improved method

图 2 转动翼型动网格比较

Fig. 2 Comparison of dynamic airfoil grids

4 动网格方法的应用

4.1 控制方程

ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 有限体积描述下的三维可压缩非定常 Euler 方程可表示为如下积分形式

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} Q dV + \iint_{\partial\Omega} F(Q) \cdot n dS = 0 \quad (11)$$

Ω 是控制体, $\partial\Omega$ 是控制体边界, n 为控制体边界外法向单位向量, 守恒变量 Q 和对流项为

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad F(Q) \cdot n = (U \cdot n) \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e + p \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \\ a_t \end{pmatrix}$$

其中 U 为流体相对于网格的速度, a_t 为网格运动的法向速度, n_x, n_y, n_z 是 n 的 3 个分量

$$U = \{(u - x_t), (v - y_t), (w - z_t)\} \quad (12)$$

$$a_t = x_t n_x + y_t n_y + z_t n_z \quad (13)$$

x_t, y_t, z_t 分别是网格运动速度的 3 个分量.

4.2 数值离散方法

在控制体 (三维网格单元) 内积分 (11) 式, 有

$$\left(V^{m+1} \frac{dQ}{dt} + Q^m \frac{dV}{dt} \right) = - \sum_{k=1}^4 F_k \cdot S_k \quad (14)$$

其中 m 表示时间层, S_k 是第 k 个积分面的矢量面积. 为得到积分面上通量的二阶近似, 首先采用泰勒展开法由单元中心处向积分面上重建守恒变量, 然后用通矢量分裂方法 (Van-Leer 或 Steger 分裂法)

解决积分面上的 Riemann 问题.

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^+(\mathbf{Q}_L) + \mathbf{F}_k^-(\mathbf{Q}_R) \quad (15)$$

其中重建守恒变量由下式计算.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_L &= \mathbf{Q}_i + \phi_{ik}(\nabla \mathbf{Q})_i \cdot \mathbf{r}_{ik} \\ \mathbf{Q}_R &= \mathbf{Q}_j + \phi_{jk}(\nabla \mathbf{Q})_j \cdot \mathbf{r}_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 ϕ 是限制器. 用传统的格林公式方法求解变量梯度需要为变量梯度开辟存储空间, 内存占用量极大. 本文借鉴 Frink^[10] 的方法, 采用三角形 / 四面体单元固有的几何关系计算变量梯度, 大大节省了内存空间. 应用这一关系, (16) 式第一式可写为

$$\mathbf{Q}_L = \mathbf{Q}_i + \phi_{ik}\{(\mathbf{Q}_{p1} + \mathbf{Q}_{p2} + \mathbf{Q}_{p3})/3 - \mathbf{Q}_{p4}\}/4 \quad (17)$$

(16), (17) 式中的变量定义, 见图 3. 单元顶点上的变量值由周围中心值加权平均得到. 这种平均具有一定的耗散性^[10], 所以本文构造了一种限制性较弱的通量限制器, 即

$$\phi_{ik} = \phi\left(\frac{\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i}{\nabla \mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{r}_{ik}}\right) \quad (18)$$

$$y\phi\left(\frac{x}{y}\right) = \Psi(x, y) \quad (19)$$

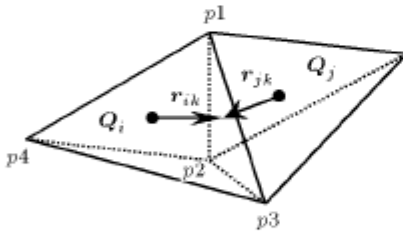


图 3 变量定义方式示意

Fig.3 The definition of variables

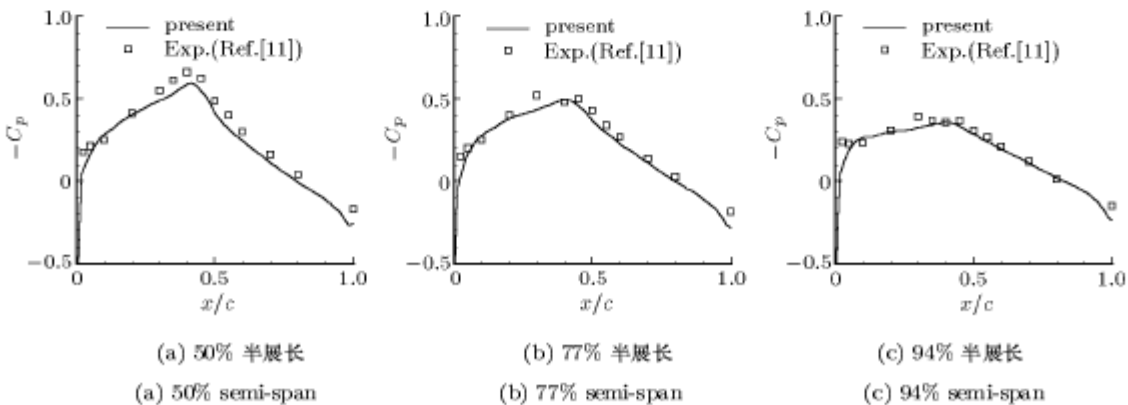


图 4 定常压力系数分布比较

Fig.4 Comparison of steady pressure coefficients

$$\Psi(x, y) = \min \text{mod}(x, y) =$$

$$0.5[\text{sign}(x) + \text{sign}(y)]\min(|x|, |y|) \quad (20)$$

时间离散采用 4 步 Runge-Kutta 方法. 几何守恒律及刚体动力学模型可参考文献 [7].

4.3 振动矩形机翼绕流

跨声速气动弹性问题是飞行器设计中的重要环节, CFD 数值模拟能够提供全流场参数以及结构变形的细节信息, 有利于缩短设计周期, 提高效率, 是风洞试验和飞行试验的必要的补充. 在对复杂外形的气动弹性响应进行精确模拟之前, 有必要对强迫振动下的刚性翼绕流进行计算以检验数值方法的准确性和可信度. 本文算例的背景来自于 AGARD 风洞试验^[11].

机翼截面为 NACA64A010 翼型, 总展弦比为 4. 来流马赫数 $Ma_\infty = 0.8$. 机翼攻角 $\alpha(t)$ 的变化规律是 $\alpha(t) = -\alpha_{\max} \sin(\bar{\omega}t)$, 其中振幅 $\alpha_{\max} = 1.0^\circ$, 无量纲角频率 $\bar{\omega} = \frac{\omega c}{u_\infty} = 0.268$, c 表示弦长, 振动转轴在 1/2 弦线处. 为得到周期解, 计算了两个周期. 由于网格较粗, 计算中没有使用限制器. 图 4, 图 5 分别为定常和非定常三个典型展向位置的压强系数分布. 为区分相内 (in-phase) 和相外 (out-of-phase) 压力, 非定常压强系数按傅立叶系数分解为实部和虚部, 即

$$\frac{\text{Re}}{\text{Im}}\{C_p\} = \frac{2}{\alpha_{\max}(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ C_p(\tau) \cdot \begin{bmatrix} \sin \\ \cos \end{bmatrix} (\bar{\omega}\tau) \right\} d\tau$$

图 6 所示为表面及对称面网格, 图 7 是第二周期最大攻角时压力等值线分布.

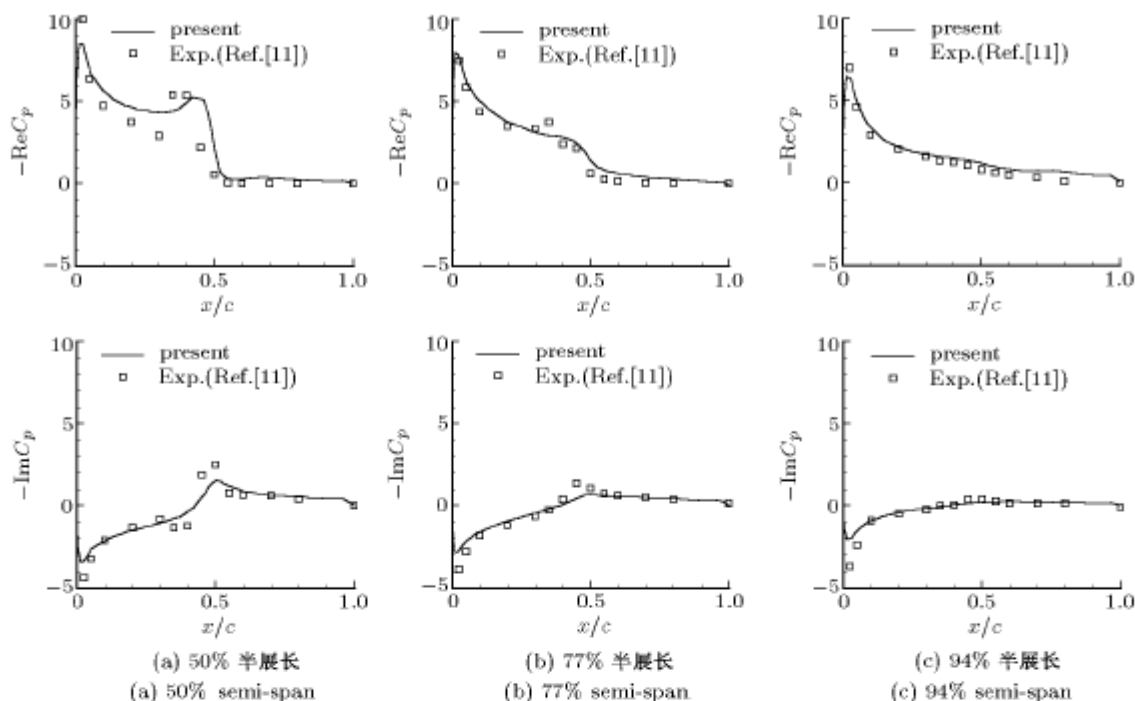


图 5 非定常压力系数分布比较

Fig.5 Comparison of unsteady pressure coefficients

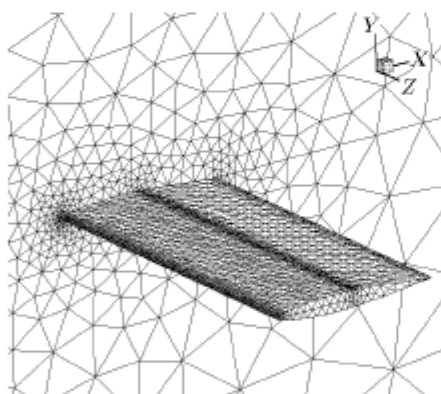


图 6 表面及对称面网格

Fig.6 Mesh on the surface and symmetric plane

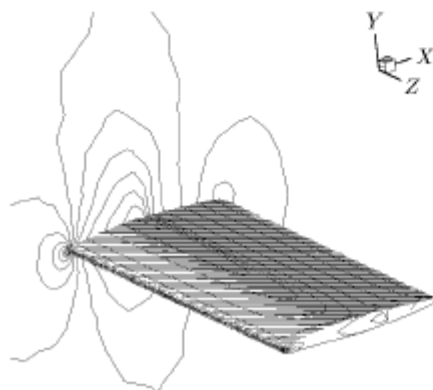


图 7 表面及对称面压力等值线

Fig.7 Pressure contour on the surface and symmetric plane

在图 4 中定常压力系数的计算值与实验值吻合得非常好. 50% 半展长位置的吸力峰值比实验值稍低, 原因估计来自于三个方面, 一是实验用的模型最大厚度为 10.6%, 比计算外形稍厚; 二是洞壁效应对实验值有影响; 三是计算网格不够密. 在图 5(a) 所示的 50% 半展长位置的实压力系数图中, 激波位置比实验结果偏后, 这主要是由于没有考虑黏性的原因; 由于网格较粗, 激波峰值没有达到无黏流结果应有的高度, 波前的压力降幅也不及实验结果. 图 5(a) 明显地表示出, 在一个振动周期内, 激波移动的范围约占 25% 弦长. 图 5 所示的非定常结果中, 77% 和 94% 半展长位置的计算值与实验值非常吻合.

4.4 激波与双立方体的相互作用

为进一步检验动网格的变形能力及其与本文的非定常解算器耦合求解高度非定常多体绕流的能力, 研究了两个可以自由运动的立方体盒子受到平面激波冲击后形成的流体与刚体运动相互作用的流场. 初始网格生成采用 Octree 切割法, 动网格由改进的弹簧近似方法实现. 考虑到计算区域外边界都是平面, 为进一步提高网格变形能力, 允许边界点在边界上滑动. 具体方法是采用布尔运算对边界点分类并标记, 位于单一边界面上的点可在该边界面上

滑动, 位于两个边界面交线上的点可沿交线滑动, 三个边界面的交点即顶角点不移动. 立方体的运动通过耦合求解三自由度刚体动力学方程^[7]得出.

激波马赫数 $Ma_s = 5.0$, 立方体质量 $m/(\rho_0 L^3) = 4.9$, 转动惯量 $I/(\rho_0 L^5) = 0.816$. 图 8 是初始时刻的对称面网格. 图 9 是 $t = 0.7$ 时的对称面网格, 此时立方体已向下游移动了大约 1.5 倍边长的距离, 图中显示边界位移大部分被稀疏网格区域吸收, 物面附近的网格质量仍然较高. 由于流场下边界面作壁面处理, 两个立方体的运动并不对称. 表 1 是 $t = 0.7$ 时两个立方体的速度以及波后气体的速度, 表中速度数值以波前声速为参考量进行了无量纲化. 可见, 尽管波后气流的绝对速度很大, 但其相对于立方体是亚声速流动. 图 10 是 $t = 0.7$ 时对称面压力等值线. 由表 1 和图 10 可知, 物体在激波的推动下高速运动, 同时物体的运动又使反射激波的强度大为减弱.

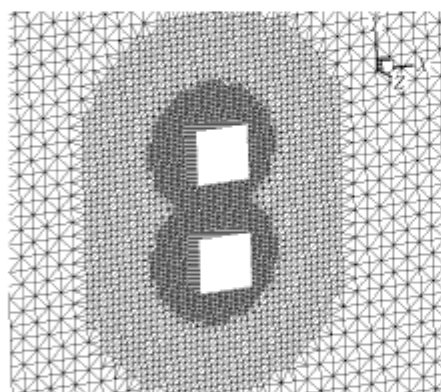


图 8 初始时刻对称面网格

Fig.8 Initial grids on the symmetric plane

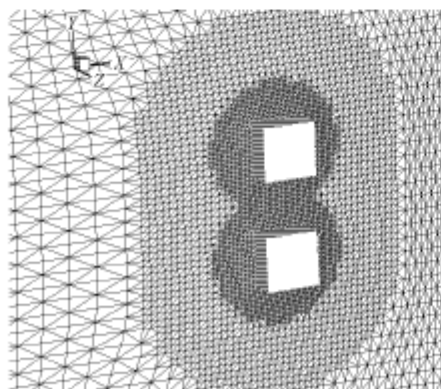


图 9 $t = 0.7$ 时刻对称面网格

Fig.9 Grids on the symmetric plane at $t = 0.7$

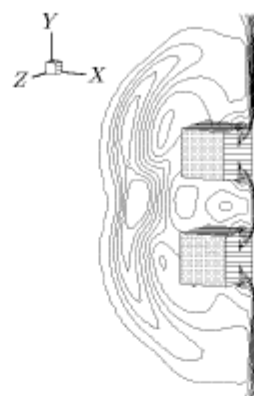


图 10 $t = 0.7$ 时刻对称面压力等值线

Fig.10 Pressure contour on the symmetric plane at $t = 0.7$

表 1 $t = 0.7$ 时刻波后气体及刚体的速度

Table 1 Velocities of the cubes and gas behind shock at $t = 0.7$

	v_x	v_y	ω
cube 1	3.628	-0.08650	0.07075
cube 2	3.633	0.07886	0.02735
gas behind shock	4.000		

5 结 论

本文所发展的动网格方法及适用于动网格的非定常有限体积解算器具有较高的精度, 可用于模拟流体与结构耦合问题. 激波与双立方体相互作用算例说明, 本文的数值方法与刚体动力学方程的耦合是成功的, 从而可以解决一类由气动力决定的轨迹确定问题. 经过边界修正和扭转效应修正后的弹簧近似方法, 在不降低计算效率的同时, 大大提高了网格的变形能力和网格质量, 很好地解决了非结构动网格技术中关键的网格变形部分, 为今后与网格重构方法相结合解决大变形问题奠定了基础.

参 考 文 献

- 1 Batina JT. Implicit flux-split Euler schemes for unsteady aerodynamic analysis involving unstructured dynamic meshes. N91-10918, 1990
- 2 Cavallo PA, Hosangadi A, Lee RA, et al. Dynamic unstructured grid methodology with application to aero/propulsive flowfields. AIAA Paper 97-2310, 1997
- 3 Baum JD, Luo Hong, Lohner R. Application of unstructured adaptive moving body methodology to the simulation of fuel tank separation from an F-16 C/D fighter. AIAA-97-0166, 1997
- 4 Tezduyar TE, Behr M, Liou J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and

- interfaces—The deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1992, 94: 339~351
- 5 Batina JT. Unsteady Euler algorithm with unstructured dynamic mesh for complex-aircraft aerodynamic analysis. *AIAA Journal*, 1991, 29(3): 327~333
- 6 Singh KP, Newman JC, Baysal O. Dynamic unstructured method for flows past multiple objects in relative motion. *AIAA Journal*, 1995, 33(4): 641~659
- 7 郭正, 刘君, 瞿章华. 用非结构网格方法模拟有相对运动的多体绕流. 空气动力学学报, 2001, 19(3): 310~316 (Guo Zheng, Liu Jun, Qu Zhanghua. Simulation of flows past multi-body in relative motion with dynamic unstructured method. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2001, 19(3): 310~316 (in Chinese))
- 8 Guo Zheng, Liu Jun, Qu Zhanghua. Simulation of oscillating airfoil flow using dynamic unstructured grids. In: Zhang HX ed. Proceedings of The Fourth Asian Computational Fluid Dynamics Conference. 2000, Mianyang, China. Beijing: University of Electronic Science and Technology of China Press.
- 9 Blom FJ. Considerations on the spring analogy. *Journal of Aircraft*, 2000, 32: 647~668
- 10 Frink NT. A fast upwind solver for the Euler equations on three-dimensional unstructured meshes. AIAA-91-0102, 1991
- 11 Mabey DG, Welsh BL, Pyne CR. A summary of measurements of steady and oscillatory pressures on a rectangular wing. *Aeronautical Journal*, 1988, 92(911): 10~28

DYNAMIC UNSTRUCTURED GRID METHOD WITH APPLICATIONS TO 3D UNSTEADY FLOWS INVOLVING MOVING BOUNDARIES¹⁾

Guo Zheng Liu Jun Qu Zhanghua

(College of Aerospace and Material Engineering, NUDT, Changsha 410073, China)

Abstract Spring analogy method for dynamic unstructured grids is studied. The stiffness of the springs in the modified vertex spring analogy is analyzed. Improvements considering torsional spring effect and boundary effect are developed to standard method. Application of the improved spring analogy method to rotating airfoil grids shows that the new method greatly improves the deforming ability and the quality of the mesh. This dynamic grid method coupled with 3-D ALE Euler solver is then applied to simulate unsteady transonic flow about an oscillating rigid rectangular wing. Computational results are in good agreement with experimental data and that of other literature. To demonstrate the capability in solving interaction problems of multiple rigid body and fluid, the whole methodology coupled with rigid body dynamics equations is used to simulate propagating shock and double cube interaction, time-dependent flow structures are obtained. It can be concluded from the research that the improved spring analogy method coupled with the unsteady finite volume solver developed in this paper, is an effective way to study fluid and structure interaction problems with small boundary displacement.

Key words dynamic unstructured grids, spring analogy, moving boundarie, unsteady flow, Euler equation

Received 11 December 2001, revised 2 July 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (A10176037, 90205027).