

基于 Voronoi 结构的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法

蔡永昌 朱合华

王建华

(同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092) (上海交通大学土木建筑工程系, 上海 200030)

摘要 基于自然邻结点近似位移函数提出了一种用于求解弹性力学平面问题的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法. 这种方法在结构的求解域 Ω 内任意布置离散的结点, 并且利用需求结点的自然邻结点和 Voronoi 结构来构造整体求解的近似位移函数. 对于构造好的近似位移函数, 在局部的 Delaunay 三角形子域上采用局部 Petrov-Galerkin 方法建立整体求解的平衡控制方程, 这样平衡方程的积分可在背景三角形积分网格的形心上解析计算得到, 而采用标准 Galerkin 方法的自然单元法需要三个数值积分点. 该方法能够准确地施加边界条件, 得到的系统矩阵是带状稀疏矩阵, 对软件用户来说, 它还是一种完全的、真正的无网格方法. 所得计算结果表明, 该方法的计算精度与有限元法四边形单元相当, 但计算和形成系统平衡方程的时间比有限元法四边形单元提高了将近一倍, 是一种理想的数值求解方法.

关键词 无网格, 自然单元, Voronoi 图, 局部 Petrov-Galerkin 方法, Delaunay 三角化

引 言

无网格方法由于只需结点而不需单元或网格信息, 前处理特别简单, 能够方便地用于裂纹开裂、非线性大变形等问题的数值计算, 具有许多传统的计算方法(如有限元法)无法比拟的优点, 正吸引着越来越多的力学工作者和工程技术人员来对其进行研究和应用. 经过十多年的发展, 目前无网格方法的种类已十分繁多^[1~6], 比较典型的有光滑粒子法(Smooth Particle Hydrodynamics, 简记为 SPH)、单位分解法(Partition of Unity)、有限点法(Finite Point Method)、无单元伽辽金法(Element Free Galerkin Method, 简记为 EFG)和无网格局部伽辽金法(Meshless Local Petrov-Galerkin Method, 简记为 MLPG)等, 这些方法各有自己的优缺点和不同的应用范围, 其中又尤以 EFG 法和 MLPG 法因具有求解精度高、收敛快和数值解稳定等优点而应用最为广泛. 但是由于 EFG 法和 MLPG 法均以滑动最小二乘法(Moving Least Square, 简记为 MLS)为理论基础, 其近似位移函数的构造十分复杂, 难以选择准确的数值积分阶次; 形函数的形成需要求解大量的矩阵求逆和相乘运算, 计算时间长, 效率低; 不同材料的交界区域、不连续面的处理十分复杂; 而且 MLS 近似位移函数不满足 Kronecker 条件, 在位

移边界上难以准确地施加边界条件等, 这些缺点的存在极大地限制了 EFG 法和 MLPG 法的应用和发展, 使得它们虽然名义上比有限元法简单、方便, 实际上却无法真正应用于实际工程问题的计算, 目前仅停留在理论上进行探讨.

无网格方法主要是为了克服有限元法在前处理网格划分方面的困难而提出的, 但是它却在计算时间、边界条件和不连续面的处理等方面付出了极为昂贵的代价. 实际上, 在有限元法里, 如果对结构分析域完全采用三角形网格来进行计算, 无论对于多么复杂的几何形状, 用 Delaunay 准则均能全自动地生成形状良好的三角形或四面体, 根本就不会存在网格划分的困难. 但遗憾的是有限元法里三角形单元和四面体单元是常应变单元, 计算精度很低, 因此一般采用较高精度的四边形单元来进行有限元分析, 从而带来了前处理网格划分的巨大困难. 如果既能够利用成熟的 Delaunay 全自动三角化技术, 又能够使三结点单元的求解精度相当于有限元四结点或八结点单元, 那无网格方法和有限元法所面临的问题也就迎刃而解了. 基于这样的思路, 依托于求解结构的 Delaunay 三角形网格, Braum 等提出了自然单元法(Nature Element Method, 简记为 NEM)^[7~9]的概念, 他利用求解点的自然邻结点和 Voronoi 结构

来全域构造近似位移函数, 这种位移函数的构造方法是无单元法思想, 它几乎克服了最小滑动二乘法和有限元法的所有缺点, 能够方便地施加边界条件, 处理不连续面, 完全能够适用于各种复杂问题的数值求解. 不足的是 Braun 等采用标准的 Galerkin 方法形成自然单元法的系统平衡方程, 需要在背景三角形积分网格里采用三个以上的积分点完成平衡方程的数值积分, 而且自然邻结点近似位移函数的计算比三结点有限元法形函数慢 1~2 倍^[8], 加上寻找自然邻结点等方面的时间消耗, 总体来说目前自然单元法计算和形成系统平衡方程的时间仍比相当精度的四结点有限元法慢. 本文采用自然单元法的近似位移函数, 在结构的局部 Delaunay 三角形子域上使用局部 Petrov-Galerkin 方法完成系统平衡方程的推导, 可以简化平衡方程的形成过程, 并可在三角形积分网格的中心采用解析方法来进行平衡方程的数值积分, 从而达到进一步减少计算时间、提高求解效率的目的, 使该方法能更好地为工程计算服务.

1 自然邻结点近似位移函数

对一个任意几何形状的分析区域 Ω , 先在区域上按照一定的规则布置离散的计算点 (见图 1). 按照 Delaunay 空圆原则, 即在通过每个三角形三个顶点的外接圆内不再包含其他结点, 全自动完成区域离散点的 Delaunay 三角形网格化, 并根据三角化网格建立区域 Ω 的 Voronoi 结构. 对区域 Ω 任一结点

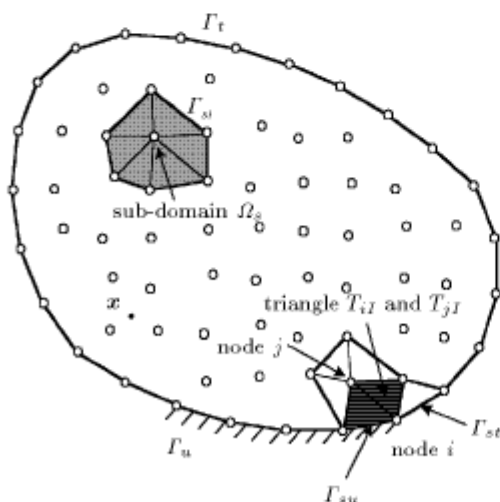


图 1 区域 Ω 的离散模型及任意结点 i 的局部 Delaunay 三角形子域、边界

Fig.1 Discrete model of region Ω and local Delaunay triangular subdomain and boundary for arbitrary node i

x_i , 其 Voronoi 结构定义为

$$T_i = \{x \in R^2 : d(x, x_i) < d(x, x_j) \forall j \neq i\} \quad (1)$$

式中, $d(x, x_i)$ 是结点 x 与 x_i 的距离.

这里以图 1 所示的分析区域 Ω 内的任意点 x 为例来说明其自然邻结点近似位移函数的建立过程.

点 x 周围结点的三角化网格及 Voronoi 结构如图 2 所示. 在此基础上, 再进一步建立点 x 周围的二次 Voronoi 结构 (见图 3). 则点 x 的插值函数可表示为

$$\Phi_i(x) = A_i(x)/A(x) \quad (2)$$

其中 $A_i(x)$ 为结点 x_i 与点 x 的 Voronoi 结构的重叠部分的面积, $A(x)$ 为点 x 的 Voronoi 结构的面积.

例如结点 1 的插值函数可表示为

$$\Phi_1(x) = A_{aefd}/A_{abcd} \quad (3)$$

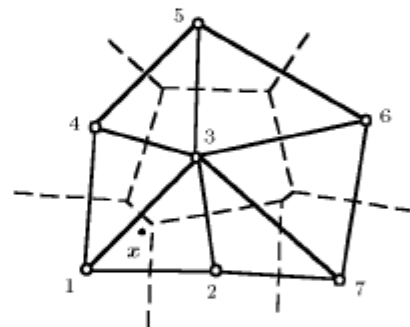


图 2 点 x 周围的 Delaunay 三角形和 Voronoi 结构
Fig.2 Delaunay triangle and Voronoi cells about x

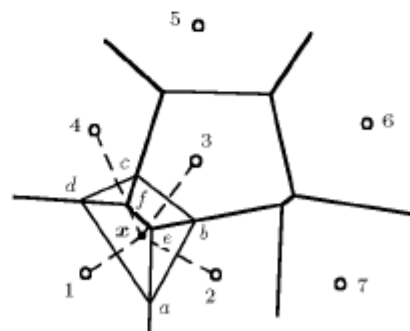


图 3 点 x 的一次和二次 Voronoi 结构
Fig.3 1st-order and 2nd-order Voronoi cells about x

定义了各结点的插值函数后, 点 x 的位移函数可写为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) u_i \quad (4)$$

式中, $u_i (i=1, \dots, n)$ 是点 x 周围自然邻结点 i 的结点位移, $\Phi_i(x)$ 为对应结点的形函数.

从方程 (2) 可以发现, 形函数 $\Phi_i(x)$ 满足单位分解的条件

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i(x) = 1, \quad x \in \Omega \quad (5)$$

同时还可以证明, 方程 (2) 的形函数 $\Phi_i(x)$ 与有限单元形函数一样满足

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \Phi_i(x) \leq 1 \\ \Phi_i(x_j) = \delta_{ij} \end{aligned} \right\} x \in \Omega \quad (6)$$

与其它无网格方法相比, 上述用无网格思想构造的自然邻结点形函数 $\Phi_i(x)$ 和位移函数 $u^h(x)$ 具有如下优点: 由于形函数 $\Phi_i(x)$ 满足 δ 条件, 故可以直接准确地施加边界条件; 自然邻结点位移函数除在结点上 C^0 连续外, 在其他地方均为 C^∞ 连续^[8], 能够很方便地处理不连续材料的交界面或不连续面的位移梯度, 而且除在结点和结点的连线上外, 在其它地方均可得到同阶精度的连续的位移和应力解答; 计算形函数 $\Phi_i(x)$ 的时间比 EFG 等无网格法大幅度减少, 比三结点有限元法稍长, 但是求解精度却得到大幅度的提高.

为了确定方程 (4) 的任意点 x 的位移函数, 需要首先用 Delaunay 的空圆准则求点 x 周围的自然邻结点. 如图 4 所示, 设图中的 Delaunay 三角形 123, 134, ... 的外接圆圆心分别为 $V_{123}, V_{134}, \dots$, 如果

$$R(V_t, x) < R_t \quad (7)$$

式中, $V_t = (v_1, v_2)$ 是三角形 t_l 的外接圆圆心, $R(V_t, x)$ 是点 x 到 V_t 的距离, R_t 是三角形 t_l

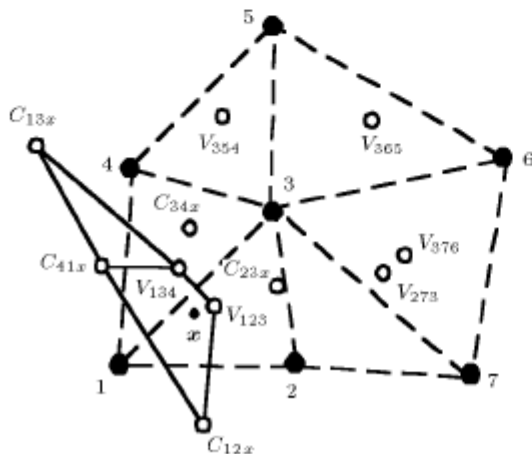


图 4 自然邻结点形函数的计算

Fig.4 Computation of natural neighbour shape functions

的外接圆半径. 则满足方程 (6) 的 Delaunay 三角形是点 x 的邻接三角形, 对应的三角形结点即为点 x 的自然邻结点. 因此图 4 中对应点 x 的邻接三角形 t_l 为三角形 123 和 134, 自然邻结点为结点 1, 2, 3 和 4.

设点 x 的邻接三角形 t_l 的局部结点编号为 $(I, J, K) = 1, 2, 3$, 记

$$C_l(x) = \Theta(a_J, a_K, x) \quad (8)$$

为通过点 x 和三角形 t_l 的局部结点 J, K 的外接圆圆心. 用 $\{C_1(x), C_2(x), V_l\}$, $\{C_2(x), C_3(x), V_l\}$, $\{C_3(x), C_1(x), V_l\}$ 组成三个新的子三角形, 则这些新三角形的面积可计算如下

$$\alpha_{It_l}(x) = A(C_J(x), C_K(x), V_l) \quad (9)$$

设局部结点 I 对应整体编号 i , 则三角形 t_l 的各个子三角形对整体结点 i 的面积贡献为

$$A_i(x) = A_i(x) + \alpha_{It_l}(x) \quad (10)$$

对点 x 所有自然邻结点 $i = 1, 2, \dots, n$ 求和

$$A(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x) \quad (11)$$

将方程 (10) 和 (11) 代入方程 (2) 即可求得点 x 的形函数 $\Phi_i(x)$. 同理可以求出相应的形函数的导数 $\Phi_{i,j}(x)$.

如果计算点 x 在各 Delaunay 三角形的边界上, 由于子三角形 $(C_l(x), C_j(x), V_l)$ 的外接圆圆心在无穷远处, 前面的算法会遇到计算上的困难. 幸好本文方法的数值积分只需要计算各 Delaunay 三角形形心点处的位移函数, 并不会遇到上述困难.

2 局部 Petrov-Galerkin 积分方程

弹性力学二维平面区域 Ω 的平衡方程和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_i &= 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u_i &= \bar{u}_i, & \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \\ \sigma_{ij} n_j &= \bar{t}_i, & \text{在 } \Gamma_t \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中 b_i 是体力分量, n_j 是边界单位外法线分量, $\bar{u}_i$ 和 $\bar{t}_i$ 分别为边界上给定的位移和面力分量.

自然单元法从方程 (12) 出发, 采用标准的 Galerkin 过程^[8] 建立系统平衡方程, 由于自然邻结点近似位移函数一般在 2 阶以上, 因此自然单元法在背景三角形网格里要使用 3 个以上的积分点才能进行系统平衡方程的积分. 下面我们采用局部 Petrov-Galerkin 法来减少自然单元法的计算时间, 进一步提高该方法的计算效率.

图 1 的分析区域 Ω 可以看作由围绕结点 i 的 Delaunay 三角形子域 Ω_s 构成, 在每个三角形子域 Ω_s 上利用加权残值法得

$$\int_{\Omega_s} w_i(\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0 \quad (13)$$

式中, w_i 为加权函数.

对方程 (13) 的左边项进行分部积分并利用散度定理后, 可得

$$\int_{\Gamma_s} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega_s} (w_{i,j} \sigma_{ij} - w_i b_i) d\Omega = 0 \quad (14)$$

上式中的子区域 Ω_s 的边界 Γ_s 通常由三部分组成: 内边界 Γ_{si} , 局部边界 $\partial\Omega_s$ 位于整体边界上的给定位移边界条件部分 Γ_{su} 和自由边界 Γ_{st} . 注意到方程 (14) 中的 $\sigma_{ij} n_j = t_i$, 方程 (14) 可进一步改写为

$$\int_{\Gamma_{si}} w_i t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} w_i t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} w_i t_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} (w_{i,j} \sigma_{ij} - w_i b_i) d\Omega = 0 \quad (15)$$

当子域 Ω_s 完全位于整体域 Ω 中, $\partial\Omega_s$ 与区域 Ω 的边界 Γ 不相交, 方程 (15) 中的 Γ_{su} 和 Γ_{st} 积分项为零.

方程 (15) 中的加权函数和试函数可分别取自不同的函数空间. 为了简化方程 (15), 我们选择加权函数 w_i 在内边界 Γ_{si} 上的值为零, 于是方程 (15) 变为

$$\int_{\Gamma_{su}} w_i t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} w_i t_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} (w_{i,j} \sigma_{ij} - w_i b_i) d\Omega = 0 \quad (16)$$

3 平衡离散方程

对于图 1 所示的任意结点 i 的子域 Ω_s , 方程 (15) 可进一步分解到组成子域 $\partial\Omega_s$ 的各个三角形单元上

进行积分.

$$\int_{\Gamma_{su}} w_i t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} w_i t_i d\Gamma - \sum_{I=1}^N \int_{T_{iI}} (w_{i,j} \sigma_{ij} - w_i b_i) d\Omega = 0 \quad (17)$$

式中 T_{iI} 为结点 i 的子域 Ω_s 对应的第 I 个三角形, N 为组成子域 Ω_s 的三角形总个数.

在每个三角形单元上 T_{iI} , 选取结点 i 的三结点有限单元形函数 N_i 作为加权函数 w_i , 即 $w_i = N_i$, 很显然, 这样的加权函数 N_i 能够满足上面方程 (16) 所说的在子域 $\partial\Omega_s$ 的内边界 Γ_{si} 为零的条件. 方程 (17) 的 Γ_{su} 积分项包括如图 5 所示的两种情况, 对于图 5(a) 加权函数 N_i 在局部位移边界 Γ_{su} 上恒等于零, 故整个积分项为零; 对于图 5(b), 虽然约束反力 t_i 的贡献非零, 但由于位移约束, 将该项集集到总体刚度矩阵时, 其对应的刚度矩阵项失效. 因此, 方程 (17) 可进一步简化为

$$\int_{\Gamma_{st}} w_i t_i d\Gamma - \sum_{I=1}^N \int_{T_{iI}} (w_{i,j} \sigma_{ij} - w_i b_i) d\Omega = 0 \quad (18)$$

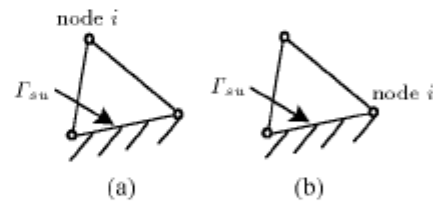


图 5 子域上 Ω_s 的位移边界 Γ_{su}

Fig.5 Essential boundary condition Γ_{su} over sub-domain Ω_s

将方程 (3) 的自然邻结点近似位移函数 ϕ_i 代入式 (18), 并将其改写为矩阵形式

$$\sum_{I=1}^N \left(\int_{T_{iI}} \mathbf{v}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \cdot \mathbf{U} \right) = \int_{\Gamma_{st}} N_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega_s} N_i \mathbf{b} d\Omega \quad (19)$$

简写为

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (20)$$

其中 N_i 为对应于三角形 T_{iI} 的加权函数; N 为构成子域 Ω_s 的 Delaunay 三角形的个数; $\mathbf{D}$ 为平面问题的弹性矩阵;

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (20a)$$

$$B = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \cdots & \phi_{n,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & \cdots & 0 & \phi_{n,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \cdots & \phi_{n,y} & \phi_{n,x} \end{bmatrix} \quad (20b)$$

式中 n 为计算点 x 周围的自然邻结点个数.

方程 (20) 中的刚度矩阵 K 为 $2 \times 2n$ 矩阵, 且其中 v_i 为常量矩阵可以降低刚度矩阵 K 的阶次, 实验和算例表明, 仅在每个三角形 T_{ij} 的形心上进行解析计算 (相当于 1 点数值积分) 该方法就可以通过各种分片测试, 得到满意的计算结果; 载荷列阵 F 为 2×1 向量, 仅需加权函数 N_i 就可解析计算出来, 不需要计算试函数 ϕ_i , 因而也特别简洁.

在弹性力学平面问题中, 由于未知位移变量的个数为结点个数的 2 倍, 因此在整体域 Ω 中需要在每个结点上建立子域 Ω_s , 以得到与未知变量数相等的代数方程组.

实际计算时, 可以采用分子表结构来存储各个结点 i 的子域三角形, 同时也能加快寻找自然邻结点的速度. 需要注意的是, 如图 1 所示, 例如对结点 i 的子域三角形 T_{ij} 要求其形心的自然邻结点近似位移函数和刚度矩阵, 在结点 j 的子域上需要在相同的三角形 $T_{ji} = T_{ij}$ 上完成同样的运算, 在编制程序时, 应对此进行处理, 以避免重复计算, 造成计算时间不必要的浪费.

4 数值实例

4.1 分片测试

图 6 所示为文献 [8] 中用于测试无网格方法性能的分片实验考题. 在边界上施加位移

$$u(x, y) = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (21)$$

无论对于规则或不规则布置的结点, 用本文方法在

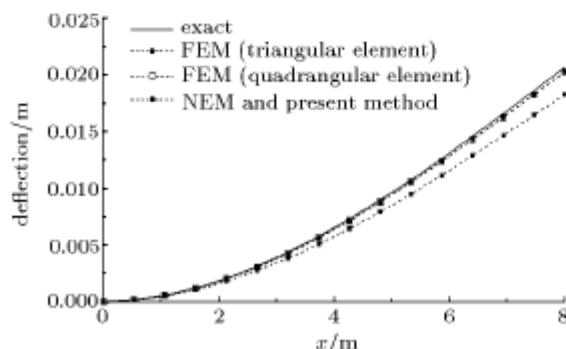


图 8 悬臂梁沿 $y=0$ 表面的 y 向位移和 x 向正应力 σ_x 比较

Fig.8 Comparison of deflection y at $y=0$ and normal stress σ_x for the cantilever beam problem

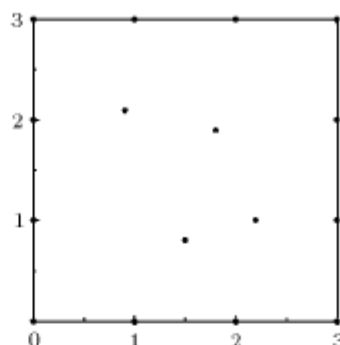


图 6 分片测试的结点布置方案

Fig.6 Nodal arrangement for patch test

子域三角形的形心上解析计算刚度矩阵的积分, 均能精确地通过分片测试, 即在内部结点上位移仍然精确满足方程 (21). 而文献 [8] 中的自然单元法要对刚度矩阵采用三点数值积分才能通过分片测试.

4.2 悬臂梁

考虑如图 7 示的悬臂梁, 在末端受有垂直向下的集中力 $P=1\text{ N}$, 厚度 $t=1\text{ m}$, 长 $l=8\text{ m}$, 宽 $b=1\text{ m}$. 材料的弹性模量 $E=1 \times 10^5\text{ Pa}$, 泊松比 $\nu=0.25$, 不计自重, 按平面应力分析. 该问题的应力、位移解析解可参见文献 [3].

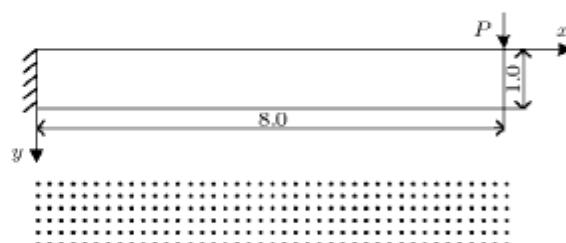
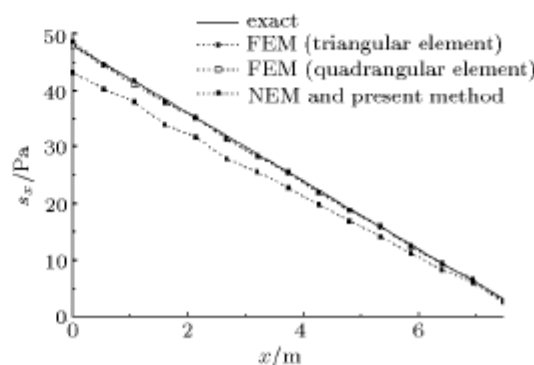


图 7 悬臂梁及其结点布置

Fig.7 Cantilever beam and its nodes distribution

图 8 给出了该问题在 246 结点离散情况下, 用有限元三结点、四结点单元, 自然单元法和本文方



法得到的悬臂梁 $y = 0$ 表面上的 y 向位移及 x 向正应力 σ_x 与解析解的比较. 可以看出, 有限元三结点单元得到的位移和应力结果与解析解相差较大, 而有限元四结点单元、自然单元法和本文方法的计算结果均与理论解非常接近, 其中, 采用标准 Galerkin 过程的自然单元法与采用局部 Petrov-Galerkin 过程的本文方法得到的结果完全相同. 在同一台计算机上, 各种方法在不同结点离散情况下计算和形成整体平衡方程 (不包括求解方程) 的计算时间比较见表 1 所示, 从表 1 可以看出, 本文方法的计算时间大约为有限元四结点单元的 1/3, 以及自然单元法的 1/4.

表 1 各种方法计算时间比较 (单位: s)

Table 1 Comparison of computational cost (units: s)

	246 nodes	891 nodes	1313 nodes
FEM(triangular element)	0.04	0.25	0.44
FEM(quadrangular element)	0.16	1.01	1.80
NEM	0.37	1.56	2.11
present method	0.07	0.38	0.67

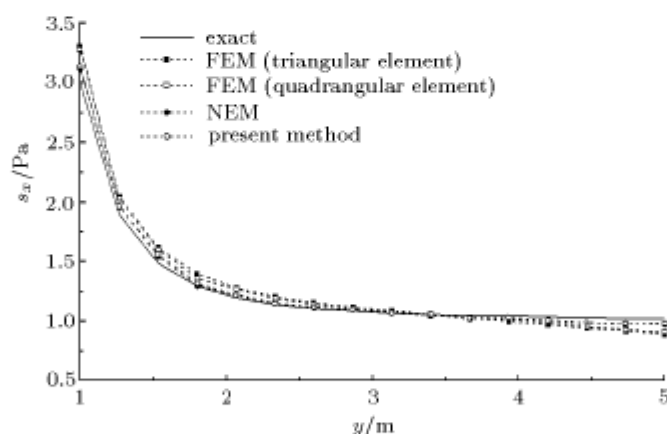


图 10 无限大圆孔板 $x = 0$ 截面的正应力 σ_x 比较

Fig.10 Comparison of normal stress σ_x at $x = 0$ for the infinite plate with central hole problem

5 结 论

本文利用需求解点的自然邻结点和 Voronoi 结构来构造整体求解的近似位移函数, 并在子域上使用局部 Petrov-Galerkin 方法建立系统平衡方程, 得到了一种简单实用, 且效率和精度均十分优良的数值分析方法. 虽然该方法需依托于分析域的 Delaunay 三角化网格, 但它用无网格方法的思想在全域构造近似位移函数, 且其三角化网格过程由程序采用成熟的 Delaunay 算法全自动完成, 对于软件用户

4.3 无限大圆孔板

设一个在左侧 x 方向承受均匀拉伸的平板, 其拉应力为 $\sigma = 1 \text{ Pa}$, 板中有半径为 $a = 1 \text{ m}$ 的小圆孔, 板的宽度取为 $b = 5 \text{ m}$, 按平面应力分析. 考虑到对称性, 可取结构的 1/4 作为分析模型 (见图 9). 圆孔板在 336 结点离散情况下, 用上述各种方法计算得到的 $x = 0$ 截面上的 x 向正应力 σ_x 与解析解的比较如图 10 所示, 可见, 对于这种应力集中问题本文方法与自然单元法一样, 仍然能够得到接近于解析解的数值解答.

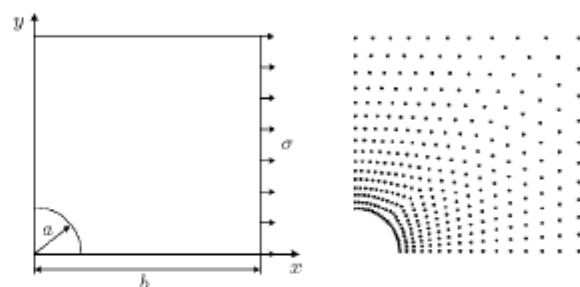


图 9 无限大圆孔板及其结点布置

Fig.9 Infinite plate with central hole and its nodes distribution

来说它是一种真正的无网格方法. 该方法还可容易地推广到非线性及非均匀介质等力学问题的求解计算.

参 考 文 献

- 1 Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin method. *Int J Num Meth Eng*, 1994, 37: 229~256
- 2 Belytschko T, Krongauz Y, Organ D. Meshless methods: An overview and recent developments. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1996, 139: 3~47

- 3 宋康祖, 陆明万, 张雄. 固体力学中的无网格方法. 力学进展, 2000, 30(3): 55~65 (Song Kangzu, Lu Mingwan, Zhang Xiong. Meshless method for solid mechanics. *Advance in mechanics*, 2000, 30(3): 55~65(in Chinese))
- 4 龙述尧. 弹性力学问题的局部 Petrov-Galerkin 方法. 力学学报, 2001, 33(4): 508~518 (Long Shuyao. A local Petrov-Galerkin method for the elasticity problem. *Acta Mechanica Sinica*, 2001, 33(4): 508~518(in Chinese))
- 5 周维垣, 寇晓东. 无单元法及其工程应用. 力学学报, 1998, 30(2): 193~201 (Zhou Weiyuan, Kou Xiaodong. Element-free method and its application in engineering. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, 30(2): 193~201(in Chinese))
- 6 Atluri SN, Zhu TL. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 1998, 22(2): 117~127
- 7 Braun J, Sambridge M. A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids. *Nature*, 1995, 376: 655~660
- 8 Sukumar N, Moran, Belytschko T. The nature element method in solid mechanics. *Int J Num Meth Eng*, 1998, 43: 839~887
- 9 Cueto E, Doblare M, Gracia L. Imposing essential boundary conditions in the natural element method by means of density-scaled α -shapes. *Int J Num Meth Eng*, 2000, 49: 519~546

THE MESHLESS LOCAL-PETROV GALERKIN METHOD BASED ON THE VORONOI CELLS

Cai Yongchang Zhu Hehua

(Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Wang Jianhua

(Department of Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract The meshless local Petrov-Galerkin method, which is based on the Voronoi cells and natural neighbour interpolations, is presented for solving the planar elasticity problem in this paper. The discrete model of the domain Ω consists of a set of distinct nodes, and a polygonal description of the boundary. The whole interpolation is constructed with respect to the nature neighbour nodes and Voronoi tessellation of the given point. The natural neighbour interpolants are strictly linear between adjacent nodes on the boundary of the convex hull, which facilitates imposition of essential boundary conditions with ease as it is in the conventional finite element method. The triangular FEM shape functions and the natural neighbour interpolations are differently chosen as the trial and test functions, and a local weak form is used to form the system discrete equation for two-dimensional solids. Compared with natural element method using standard Galerkin procedure which need three point quadrature rule, the numerical integral can be analytical calculated at the center of the background triangular quadrature meshes in this method, and hence the difficulty in the numerical integral due to complexity of shape functions from meshless approximations can be avoided. The method is also a truly meshless method for software users, because the properties of natural neighbour interpolations are meshless and all the numerical procedures are automatically accomplished by the computer. The method is applied to various problems in solid mechanics, which include, the patch test, the cantilever beam and gradient problems is, and excellent agreement with exact solution is obtained. Numerical results also show that the accuracy of the present method is almost equal to the quadrangular finite element method, and the time cost is less than the quadrangular finite element method.

Key words meshless, natural element, Voronoi diagrams, local Petrov-Galerkin method, Delaunay triangulation