

复合材料扭转轴截面微结构拓扑优化设计¹⁾

袁 振 吴长春

(中国科学技术大学力学与机械工程系, 合肥 230026)

摘要 提出复合材料扭转轴截面微结构拓扑优化设计新模型, 模型的优化目标是获得具有最大宏观剪切特性加权的单胞形式. 通过模型和均匀化方法及优化技术可以获得优化的微结构单胞, 进而改善或者得到最优宏观弹性特性的复合材料. 为了便于制造和应用, 胞体材料用来获得复合材料的极值剪切模量. 最后的优化结果表明, 该模型连同数值处理技巧可以非常有效地实现微结构的拓扑优化设计.

关键词 拓扑优化, 均匀化方法, 优化微结构, 扭转

引 言

复合材料微结构拓扑优化设计理论最早是由 Sigmund O. 于 20 世纪 90 年代中期提出来的^[1]. 复合材料的宏观性能可由微结构单胞使用均匀化技术得到, 通过对微结构进行拓扑优化设计可获得具有良好特性的复合材料, 例如负的泊松比、负的热膨胀系数、零剪切性能及良好压电特性的压电材料. 拓扑优化兼有尺寸优化和形状优化的复杂性, 微结构最终拓扑形式是未知的, 它基于逆均匀化^[1]理论追求一定约束条件下的结构最佳布局, 并使其性能达到最优. 复合材料扭转轴作为一大类工业结构, 在机械和汽车工业等领域得到广泛使用. 该类构件由于传递扭矩往往需要大的扭转刚度和剪切模量. 因此, 新的计算模型将使用均匀化方法和优化技术实现扭转轴截面微结构单胞的拓扑优化设计, 从而使该材料宏观剪切性能最优.

1 St Venant 扭转问题的均匀化方法

均匀化方法具有严格的数学理论推导, 它采用均质的宏观结构和具有周期性分布的细观结构来描述复合材料, 用宏观和细观两种尺度来描述由于材料的非均质所引起的力学响应量在小范围内变化情况, 如图 1 所示.

柱体在弹性扭转状态下, 其截面仅在自身平面内转动, 但容许轴向自由翘曲. 设 x_1 轴, x_2 轴为惯性主轴, x_3 轴沿着轴向. 按照 St Venant 扭转理论, 位移分量可表示为^[2]

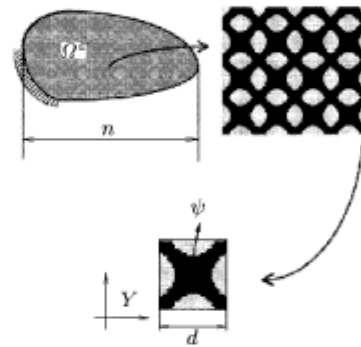


图 1 均匀化方法示意图

Fig.1 Illustration of a problem with two length scales

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\theta x_3 x_2 \\ u_2 &= \theta x_3 x_1 \\ u_3 &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

θ 代表单位长度扭转角. 假定横截面 Ω^ϵ 上的微结构周期性分布. 整体坐标系 x_i 和单胞局部坐标系 y_i 的关系为

$$y_i = \frac{x_i}{\epsilon}, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

ϵ 是一极小正值, 代表两尺度的比例因子. 按照均匀化理论, 位移、应力和应变均是两尺度坐标的函数. 将位移场 $u_3^\epsilon(x, y)$ 展开为小参数 ϵ 的渐近形式

$$u_3^\epsilon(x, y) = u_3^{(0)}(x, y) + \epsilon u_3^{(1)}(x, y) + \epsilon^2 u_3^{(2)}(x, y) + \dots \quad (3)$$

2001-07-16 收到第一稿, 2002-07-08 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10102018) 与安徽省基金联合资助.

单位长度扭转角 θ 和非零应变 γ_{3j}^e 及非零应力 τ_{3j}^e 可由下面的式子得到

$$\frac{\partial \tau_{3j}^e}{\partial x_j} = 0, \quad \text{in } \Omega^e, \quad j = 1, 2 \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{31}^e \\ \gamma_{32}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & -x_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & -x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3^e \\ \theta \end{Bmatrix}, \quad \text{in } \Omega^e \quad (5)$$

$$\tau_{3i}^e = C_{ij}^e \gamma_{3j}^e, \quad \text{in } \Omega^e \quad (6)$$

$$M_t = \int_{\Omega^e} (\tau_{32} x_1 - \tau_{31} x_2) d\Omega \quad (7)$$

根据材料对称性, 剪切张量 C_{ij}^e 是对称张量, M_t 为施加在轴端的扭矩. 由式 (5), (6) 得应变场 γ_{3j}^e 和应力场 τ_{3j}^e 的渐近展开式

$$\gamma_{3j}^e(x, y) = \varepsilon^{-1} \gamma_{3j}^{(-1)} + \gamma_{3j}^{(0)} + \varepsilon \gamma_{3j}^{(1)} + \dots \quad (8)$$

$$\tau_{3j}^e(x, y) = \varepsilon^{-1} \tau_{3j}^{(-1)} + \tau_{3j}^{(0)} + \varepsilon \tau_{3j}^{(1)} + \dots \quad (9)$$

式 (8), (9) 代入式 (4), 令 $\varepsilon^i (i = -2, -1, 0, 1, \dots)$ 的系数为零, 并使用周期性条件, 最后得到均匀化的剪切模量为

$$C_{jk}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y C_{ji} (\delta_{ik} + \chi_{3,y_i}^{3k}) dY \quad (10)$$

其中, Y 为单胞的有效面积, $\chi_3^{3j}(y)$ 为定义在单胞的周期性函数, δ_{ik} 为 Kronecher 符号.

2 复合材料周期性微结构拓扑优化设计新模型

由第 1 节知均匀化以后的材料本构模量为

$$C^H = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

考虑材料对称性, c_{12}, c_{21} 往往远小于 c_{11} 和 c_{22} . 作为目标函数, 我们取剪切模量的加权和形式 (权系数

$w_1 = 0.5, w_2 = 0.5$). 为减少优化过程中中间密度单元的影响, 目标函数施加了一惩罚项; 约束条件为规定的材料体积数, 材料对称性和平均应变场. 这样, 优化问题可表示为

$$\left. \begin{aligned} \min : & F = -w_1 c_{11}(\rho) - w_2 c_{22}(\rho) + \\ & \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho_e (1 - \rho_e) dY \\ \text{subject to : } & H = \int_Y \rho_e dY - V_0 \leq 0 \\ & \sum_{e=1}^{ne} K^e(\rho_e) q^k = \sum_{e=1}^{ne} e f^k \\ & \rho_{\min} \leq \rho_e \leq \rho_{\max} \\ & \rho = (\rho_1 \quad \rho_2 \quad \dots \quad \rho_{ne}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ne 为设计区域的离散单元总数; ρ_{\min}, ρ_{\max} 分别为设计变量的上下限; ρ_e 为设计变量, 即初始化的单元密度, 它满足 $\varepsilon \leq \rho_e \leq 1, 0 < \varepsilon \ll 1$; ρ 为密度矩阵, V_0 为规定的材料体积数. 在微观尺度上使用变密度法可获得单元剪切模量与单元密度之间的关系

$$G(\rho) = G_0 \rho^3 \quad (13)$$

G_0 为单元密度为 1 时材料的剪切模量. 本文使用了优化准则算法, 数值实施过程中为克服棋盘格式, 敏度分析要使用过滤技术 [3].

3 数值算例及结论

微结构拓扑优化设计区域为一正方形, 实体材料的剪切模量 $G_0 = 1$, 泊松比 $\nu = 0.3$. 体积约束取 $0.3Y$ 和 $0.6Y$ 两种情况, 结构分别离散为 $12 \times 12, 24 \times 24$ 及 36×36 三组不同数目的正方形四结点等参元. 最终拓扑优化结果如图 2 和图 3 所示. 由图 2, 图 3 可知, 由于使用了过滤技术, 优

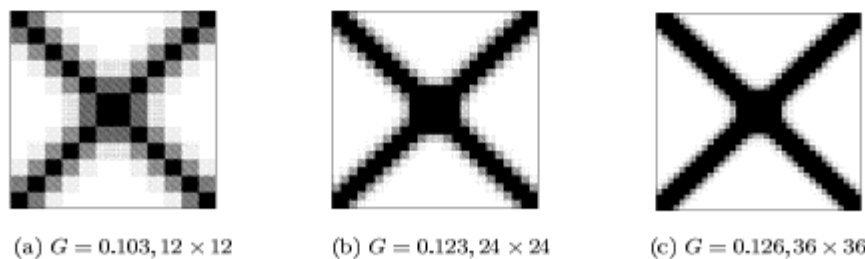


图 2 体积约束 $V_0 = 0.3Y$

Fig.2 Optimal microstructures with volume constraint $V_0 = 0.3Y$

化结果对有限元网格和体积约束并没有严格的敏感性. 优化的极值剪切模量 G 与 Hashin-Strickman 上限解 G_{up} 进行了对照. 由图 4 可知, 数值解靠近或

者达到了 Hashin-Strickman 上限解. 如果数值解与 Hashin-Strickman 上限解靠近或重合, 我们说材料特性是优化的或极值的^[4].

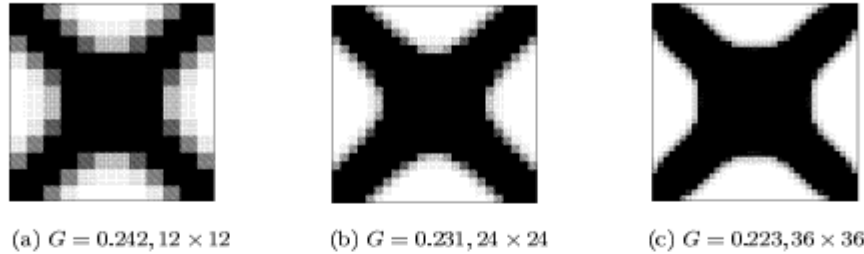


图 3 体积约束 $V_0 = 0.6V$

Fig.3 Optimal microstructures with volume constraint $V_0 = 0.6V$

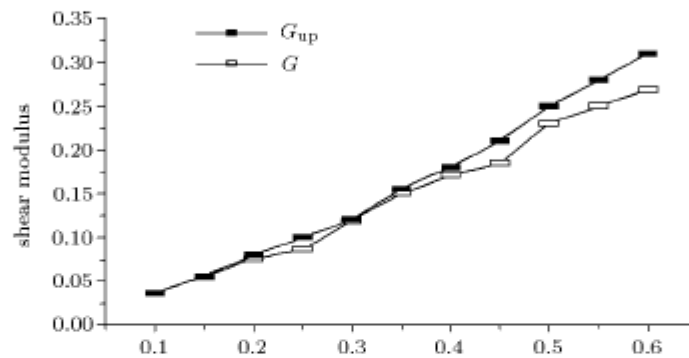


图 4 剪切模量随材料体积百分含量变化曲线

Fig.4 Shear modulus versus volume fraction

将有限元与优化方法结合起来基于均匀化理论对微结构单胞进行拓扑优化设计, 改变微结构布局, 可使复合材料达到要求的宏观性能. 本文用提出的新模型对扭转轴截面微结构进行拓扑优化设计, 使材料的剪切特性达到了最优. 现代制造技术已能使这些高性能材料制造出来并得到应用^[4]. 本文的数值实施也证实了该理论的可行性, 这对材料设计和工程应用非常有指导作用.

参 考 文 献

- 1 Sigmund O. Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem. *International Journal of Solids and Structures*, 1994, 31(17): 2313~2329
- 2 Timoshenko SP, Goodier JN. *Theory of Elasticity*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1970
- 3 Sigmund O, Pettersson J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 1998, 16(1): 68~75
- 4 Sigmund O, Torquato S. Composite with extremal thermal expansion coefficients. *Applied Physics Letters*, 1996, 69(21): 3203~3205
- 5 Emilio C. Nelli Silva, Jun S, et al. Optimal design of periodic piezocomposites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998(159): 49~77
- 6 Neves MM, Rodrigues H, Guedes JM. Optimal design of linear elastic microstructure. *Computer & Structures*, 2000(76): 421~429
- 7 Karihaloo BL, Xiao QZ, Wu CC. Homogenization-based multivariable element method for torsion of composite shafts. *Computer & Structures*, 2001, 79(18): 1645~1660

TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR MICROSTRUCTURES OF CROSS-SECTION OF COMPOSITE TORSIONAL SHAFTS¹⁾

Yuan Zhen Wu Changchun

(Department of Modern Mechanics, University of Science & Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract One computational model for topology optimization of periodic microstructures of cross-section of composite torsional shafts is presented in this paper. The new model addresses the problem of finding the optimal representative microstructural element that maximizes linear combination of the equivalent shear properties. Optimal microstructure obtained through the new models and homogenization method can be used to improve and optimize naturally occurring or man-made materials. In order to be more practical for engineering applications, cellular materials rather than ranked material are used in optimal process in the existence of optimal bounds for the elastic properties. The final optimal results show that the approach with the numerical technique are very effective in obtaining composite with extremal constitutive properties.

Key words topology optimization, homogenization method, optimal microstructure, torsion

Received 16 July 2001, revised 8 July 2002.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10102018) and Provincial Natural Science Foundation of Anhui.